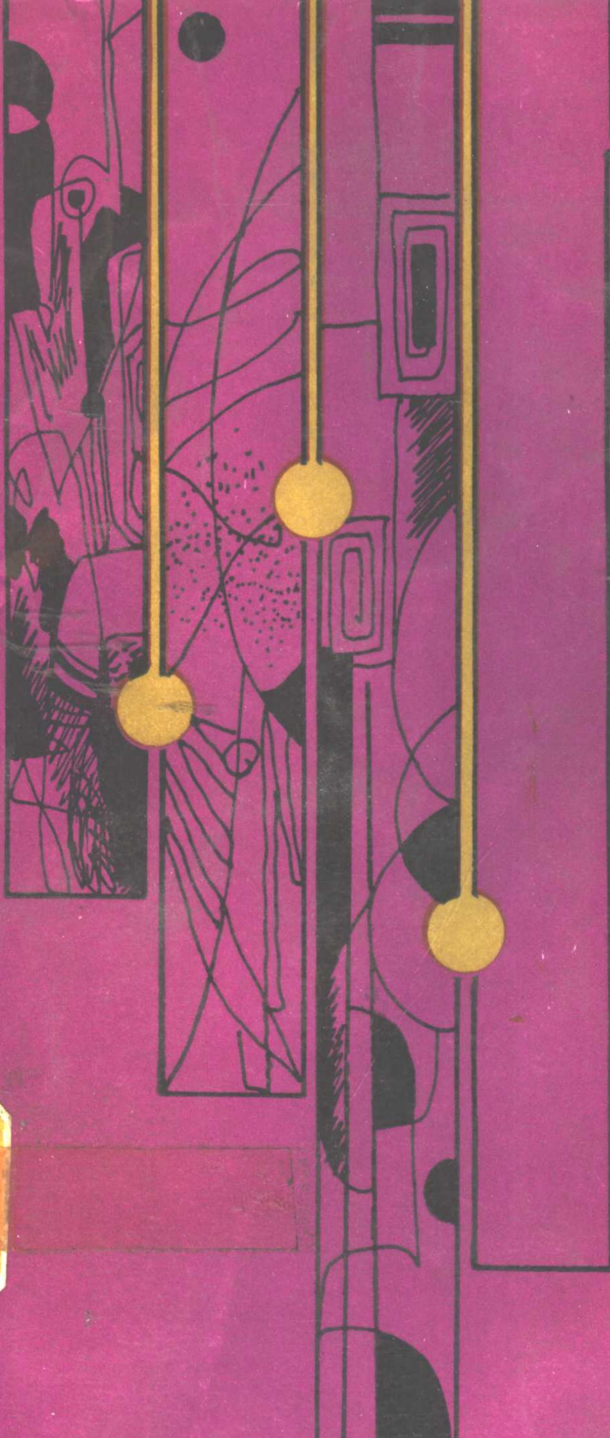
高等学校试用教材

高等数学

（下册）

西南交通大学 黄盛清 主编



中国铁道出版社

高等学校试用教材

高等数学

（下册）

西南交通大学　黄盛清　主编
西北工业大学　孙家永　主审

中国铁道出版社
1993年·北京

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

本书是根据国家教委 1987 年批准的“工科高等数学基本要求,”结合近年来开展教学研究活动的成果进行编写的。在理论叙述上,注意问题的背景与思路,逐步深入。在内容的取舍上,则侧重于理论的应用。

本书分上、下两册。本书为下册,内容包括无穷级数、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、二元及三元函数的积分、微分方程等。书末附有习题答案。

本书可作为高等学校工科高等数学课程的试用教材或教学参考书。

高等学校试用教材
高等数学
(下册)
西南交通大学 黄盛清 主编
中国铁道出版社出版、发行
(北京市东单三条 14 号)
责任编辑 程东海 封面设计 陈东山
中国铁道出版社印刷厂印

开本:850×1168 毫米 1/32 印张:12.75 字数:336 千
1993 年 10 月 第 1 版 第 1 次印刷
印数:1—4500 册

ISBN7-113-01487-9/O·38 定价:7.25 元

目　　录

第六章 无 穷 级 数

从有限向无穷发展，在数学上是一种自然趋势。无穷级数就是这一趋势的产物，它是有限项和式发展而成的无穷项和式。

我们所知的无穷小数，其实就是无穷级数。例如，

$$\frac{7}{6}=1.166\cdots=1+\frac{1}{10}+\frac{6}{10^2}+\frac{6}{10^3}+\cdots$$

Newton 在将二项式定理由正整数情形向其它情形推广时，就自然地将有限多项式发展成无穷多项式。例如：

$$\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\cdots \tag{1}$$

对此逐项积分，进一步得到：

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

在 18 世纪，无穷级数为许多数学家所关注。1715 年 Taylor 将 Newton 的一个插值公式演变为

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+f''(a)\frac{h^2}{2!}+\cdots$$

这就是所谓的 Taylor 级数。

Euler 对无穷级数感到莫大的兴趣，做了许多卓越的工作。例如，他从函数

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots \tag{2}$$

具有零点 $\pm\pi,\pm2\pi,\pm3\pi,\cdots$ 这一事实，运用多项式因式分解的理论，推断：

$$\frac{\sin x}{x}=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots \tag{3}$$

并由(2)、(3)两式比较 x^2 的系数得到：

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{3!}=\frac{\pi^2}{6}$$

从有限向无穷发展包含着极限的思想，对于无穷级数的严密讨论应该考虑其收敛性。但是那个时期的数学家们对此不很重视，而且他们还有一个信念：多项式的运算性质（如加法的交换律、结合律；导数与积分的线性运算性质可以畅通无阻地移植于无穷级数之中。这就使得他们在取得巨大成功的同时，也做出了一些令人困惑的互相矛盾的结果。例如在(1)式中，令 $x=1$，得

$$\frac{1}{2}=1-1+1-1+\cdots$$

按加法结合律，得

$$\frac{1}{2}=(1-1)+(1-1)+\cdots=0$$

及 $$\frac{1}{2}=1-(1-1)-(1-1)-\cdots=1$$

这类矛盾引起了人们对无穷级数收敛性的研究。在此基础上进一步研究：多项式的运算性质在什么条件下可移植于无穷级数之中？

函数在什么条件下可以展开为无穷级数？

本章我们将根据数列的极限理论，简要地介绍无穷级数的理论。

第一节　常数项级数

一、基本概念与性质

1. 基本概念

定义 6—1—1　由一个数列$\{a_n\}$的前 n 项和

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k \qquad (n=1,2,\cdots)$$

构成的数列$\{S_n\}$称为由数列$\{a_n\}$产生的部分和数列。

部分和数列$\{S_n\}$的极限通常写成无穷项求和的形式：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

我们称之为以 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 为项的无穷级数，简称级数。其中，a_n 叫做级数的一般项，S_n 称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 n 项部分和。

定义 6—1—2 如果部分和数列

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k (n = 1, 2, \cdots)$ 是收敛数列，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，且称 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和，记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

如果部分和数列 $\{S_n\}$ 是发散数列，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。但当 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$（或 $-\infty$）时，也称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和为 $+\infty$（或 $-\infty$），记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$（或 $-\infty$）。

当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛时，级数的和 S 与部分和 S_n 的差为

$$r_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

r_n 叫做级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的 n 项余和。

显然，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$ 的充要条件为 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$；用 S_n 近似替代 S 时，所产生的误差为 $|r_n|$。

有些级数可以直接根据定义 6—1—2 判定其收敛性，并求其和。

例 6—1 判断下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$。

解(1)
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=1$$

故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$收敛， 且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$

解(2)$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{1}{k})=\sum\limits_{k=1}^{n}[\ln(k+1)-\ln k]=\ln(n+1)$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty$$

故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$发散，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})=+\infty$

定理 6—1—1 设 a、q 是常数，且 $a\neq0$，则

(1)当 $|q|<1$ 时，等比级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$收敛，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=\frac{a}{1-q}$；

(2)当 $|q|\geqslant1$ 时，等比级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$发散。

证 (1)

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q} \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a}{1-q}$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$收敛， 且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}=\frac{a}{1-q}$。

证 (2)当 $|q|>1$ 时，由(1)式，得

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$$

当 $q=1$ 时，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}aq^{k-1}=na$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$$

当 $q=-1$ 时，$S_n=\begin{cases}a，当\ n=1,3,5,\cdots时；\\0，当\ n=2,4,6,\cdots时。\end{cases}$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 不存在。

故当 $|q|\geqslant 1$ 时，$\{S_n\}$ 是发散数列，即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$ 发散。

由例 6—1 及定理 6—1—1 可见，根据定义 6—1—2 判定级数的收敛性，需首先求出部分和 S_n 的通式。在一般情况下，S_n 的通式是难以求出的。因此，我们必须讨论级数的性质，寻求判定级数收敛性的有效方法。

2. 级数的基本性质

定理 6—1—2 （级数收敛的必要条件）如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n})=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{2n}a_k=0$。

证 (1) 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，故 $\{S_n\}$ 是收敛数列。令 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$。由于 $a_n=S_n-S_{n-1}$，
故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=S-S=0$。

证 (2) 因为 $\sum\limits_{k=n+1}^{2n}a_k=S_{2n}-S_n$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{2n}a_k=\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=S-S=0$

这个定理表明，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$ 或者 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{2n}a_k\neq 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散。

例如，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{100n+1}=\dfrac{1}{100}\neq 0$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{100n+1}\text{发散}$$

注意 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 只是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的必要条件，而不是充分条件。

例 6—2 证明调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

是发散级数。

证 $$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

$$=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right]$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2\neq 0$$

据定理 6—1—2 的(2)知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散。

无穷级数是有限项和式的推广，因此，有限项和式的某些运算规律在一定条件下可推广到无穷级数中。

定理 6—1—3 （线性性质）

(1)（收敛级数分配律）如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，$C$是常数，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}Ca_n$也收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}Ca_n=C\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散，$C\neq0$是常数，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}Ca_n$也发散。

(2)如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$也收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

证 根据定义 6—1—2 及极限运算法则，很容易证明这个定理，仅以证(2)为例。

证(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=S,\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}b_k=\sigma$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\lim\limits_{n\to\infty}(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k+\sum\limits_{k=1}^{n}b_k)$

$=S+\sigma$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$收敛，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$

注意 (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，不能推出$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$也发散。

例如，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 都发散，而

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[(-1)^{n-1}+(-1)^n]$收敛。

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$发散。

这是因为，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$收敛，则由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-a_n)$收敛。于是，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[(a_n+b_n)+(-a_n)]$收敛，这与假设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散相矛盾。故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$发散。例如，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n}\right)$为发散级数。

定理 6—1—4 设 m 是一个给定的正整数，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充要条件为$\sum\limits_{n=m+1}^{\infty}a_n$ 收敛；$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散的充要条件为$\sum\limits_{n=m+1}^{\infty}a_n$ 发散。

证 设 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k,\sigma_j=\sum\limits_{k=m+1}^{m+j}a_k$，当 $n>m$ 时，令 $n=m+j$，则

$$S_n=\sum_{k=1}^{m}a_k+\sum_{k=m+1}^{m+j}a_k=S_m+\sigma_j$$

于是
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{j\to\infty}(S_m+\sigma_j) \tag{2}$$

在(2)式中，S_m 是与 n、j 无关的常数。因此，由(2)式可知，$\{S_n\}$收敛(或发散)等价于$\{\sigma_j\}$收敛(或发散)。据定义 6—1—2，得证。

此定理表明，将一个级数删去有限项或加上有限项，不改变级数的收敛性。

定理 6—1—5 (收敛级数结合律)收敛级数加括号后所成的级数仍然收敛，且其和不变。

证 设
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{3}$$
是收敛级数，其和为 S。将级数(3)加括号后所成的级数，比如为
$$(a_1+a_2)+a_3+(a_4+a_5+a_6)+\cdots \tag{4}$$
则级数(4)的部分和数列$\{\sigma_n\}$为

$\sigma_1=a_1+a_2$，　$\sigma_2=(a_1+a_2)+a_3=a_1+a_2+a_3$，

$\sigma_3=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$，…

由此可见，级数(4)的部分和数列$\{\sigma_k\}$是级数(3)部分和数列$\{S_n\}$的子列。据子列收敛定理 1—2—1 知，$\lim\limits_{k\to\infty}\sigma_k=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$。

注意 定理 6—1—5 的逆定理不成立。例如，级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[(-1)^{n-1}+(-1)^n]$收敛，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$发散。

由此可见，有限项和式的运算规律不能无条件地、盲目地推广于无穷级数中。

定理 6—1—6 (Cauchy 收敛原理)级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛的充要条件为：$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ n_0\in N$，$\forall\ n\geqslant n_0$ 及 $k\in N$，有 $|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+k}|<\varepsilon$。

这个定理的证明从略。

二、正项级数的审敛法

每项都非负(即$\forall\ n\in N, a_n\geqslant 0$)的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$叫做正项级数。本段介绍判断正项级数收敛性的一些方法。

1. 正项级数的收敛准则

定理 6—1—7 设$\forall\ n\in N, a_n\geqslant 0, S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛的充要条件为$\{S_n\}$是有上界数列。

证 因为$a_n\geqslant 0$,故$\{S_n\}$是递增数列。据定理 1—2—8 及定义 6—1—2 就可得证。

下面的定理 6－1－8 是应用定理 6—1—7 的一个重要例题,它类似于定理 5—3—2。

定理 6—1—8 (p 级数的收敛性)

(1)若 $p>1$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$收敛;

(2)若 $p\leqslant 1$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$发散。

证(1)
$$\forall\ n\in N, S_n = 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}$$
$$= 1+\int_1^2\frac{1}{2^p}\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{3^p}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n-1}^{n}\frac{1}{n^p}\mathrm{d}x$$
$$< 1+\int_1^2\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x(\text{见图 6—1})$$
$$= 1+\int_1^n\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x<1+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=1+\frac{1}{p-1}=\frac{p}{p-1}$$

即$\{S_n\}$是有上界数列。据定理 6—1—7,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$收敛。

证(2)
$$\forall\ n\in N, S_n=\int_1^2 1\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{2^p}\mathrm{d}x+\cdots$$
$$+\int_n^{n+1}\frac{1}{n^p}\mathrm{d}x>\int_1^2\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x+\cdots$$

$$+\int_{n}^{n+1}\frac{1}{x^{p}}\mathrm{d}x\text{（见图 6—1）}$$

$$=\int_{1}^{n+1}\frac{1}{x^{p}}\mathrm{d}x$$

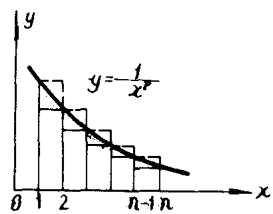


图 6—1

由于 $p\leqslant 1$ 时，$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^{p}}\mathrm{d}x=+\infty$，所以从上面不等式知，$\{S_n\}$ 无上界。故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p}}$ 发散。

2. 比较判别法

下面定理类似于定理 5—3—6。

定理 6—1—9 如果 $\forall\ n\in N, 0\leqslant a_n\leqslant b_n$，则

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散 $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散。

简言之，两个正项级数中，项较大级数收敛时，项较小级数也收敛；项较小级数发散时，项较大级数也发散。

证 (1)因为 $\forall\ n\in N, 0\leqslant a_n\leqslant b_n$，故 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}b_k=\sigma_n$。

据定理 6－1－7，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛的充要条件为 $\{\sigma_n\}$ 有上界，从而 $\{S_n\}$ 有上界，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

(2)此为(1)的逆否命题，故得证。

将定理 6—1—9 与定理 6—1—4 相结合，可得如下结论：

推论 把定理 6—1—9 中的条件"$\forall\ n\in N, 0\leqslant a_n\leqslant b_n$"改作"$\exists\ n_0\in N, \forall\ n\geqslant n_0, 0\leqslant a_n\leqslant b_n$"，则定理 6—1—9 的结论仍然成立。

例 6—3 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}(a>0)$ 的收敛性。

解 当 $a>1$ 时，$0<\dfrac{1}{1+a^n}<\dfrac{1}{a^n}=(\dfrac{1}{a})^n(\forall\ n\in N)$ 由定理 6—1—1 知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{a})^n$ 收敛，据定理 6—1—9，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}$ 收敛。

当 $a\leqslant 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+a^n}\neq 0$，据定理 6—1—2，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}$ 发散。

例 6—4 判定下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$，　　　(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$。

解(1) 因为 $\dfrac{n!}{n^n}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n}\cdots\dfrac{n}{n}\leqslant\dfrac{2}{n^2}(\forall\ n\in N)$ 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n^2}$ 收敛故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$ 收敛。

解(2) 据定义 6—1—2 易知(参看例 6—1 之(2))，

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}[\ln\ln(n+1)-\ln\ln n]$ 是发散级数。由 Lagrange 微分中值定理，得

$$\ln\ln(n+1)-\ln\ln n=\frac{1}{\xi\ln\xi}(n<\xi<n+1)$$

故 $\forall\ n\geqslant 2$，有

$$\frac{1}{n\ln n}\geqslant\frac{1}{\xi\ln\xi}=\ln\ln(n+1)-\ln\ln n$$

因而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ 发散。

由以上两例可见，运用定理 6—1—9 判断一个正项级数收敛性的思路是：寻找一个已知其收敛性的级数与之比较而得结论。通常用作比较的级数有等比级数(见定理 6—1—1)及 p 级数(见定理 6—1—8)，有时还要引用其它级数(如例 6－4 中的(2))。