线性代数

同济大学函授数学教研室　编著

TONGJI UNIVERSITY PRESS

同济大学出版社

线性代数

同济大学函授数学教研室　编

同济大学出版社

（沪）新登字204号

内 容 提 要

本书按“成人教育本科‘线性代数’教学基本要求”，在总结多年函授教学的基础上编写而成。全书分五章，即行列式、矩阵、向量组的线性相关性与向量组的秩、线性方程组、矩阵的特征值和二次型。各章末附有习题、学习指导及复习思考题。本书可作工科专业函授生教材，也可作为电大、职大、夜大有关专业的教材。

责任编辑 许纪森
封面设计 王肖生

线 性 代 数
同济大学函授数学教研室编
同济大学出版社出版
（上海四平路1239号）
新华书店上海发行所发行
吴县人民印刷二厂印刷
开本850×1168 1/32 印张7.25字数 210千字
1995年2月第1版 1995年2月第1次印刷
印数：1—6000 定价：4.70元
ISBN7-5608-1425-5/O·126

前　言

本书是根据全国普通高等理工院校成人教育研究会数学研究组制定的“成人教育本科‘线性代数’教学基本要求”，在我校原有的函授《线性代数》教材及总结多年来的函授教学经验基础上编写而成的。全书共分五章，主要内容有行列式、矩阵、向量组的线性相关性与向量组的秩、线性方程组、矩阵的特征值和二次型等。

根据函授教学以“自学为主，面授为辅”的特点，我们在编写此书时力求做到：概念清楚，论述正确；循序渐进，由浅入深；例题较多，台阶较小；重点突出，难点分散。

为使教材便于学生自学，我们在编写教材时，采取了以下一些措施：

(1) 取材“少而精”。对于超出教学基本要求的内容一般都不编入，例如“线性空间与线性变换”等。对于较难证明的定理与结论，或不给出证明，或证明部分用“△”表示，可不作为必读的内容。

(2) 在内容安排上，尽量保持章节间的独立性。例如将矩阵的秩的概念放入第二章，既使第二章矩阵的内容更完整，又使第二、三章的内容具有相对的独立性，使难点分散。

(3) 在每章的末尾都编写了“学习指导”。一方面指出学习该章的基本要求及重点，另一方面对于某些概念、重点或难点，进行适当的解释和说明，以弥补函授生在学习过程中缺少教师指导的不足。

(4) 贯彻“学练结合，适当反复”的教学原则。在每章之末尾配有习题，以供学生在学习的基础上，系统而又全面地消化巩固所学的知识；为便于复习和提高的需要，在每章的末尾还选配了适量的复习思考题。这些习题在书后均附有解答，可供参考。此外，为了定期检查

学生的学习效果，书中还精心选编了阶段性测验作业题。

本书由徐鑑青、周忆行执笔编写，郭景德老师也参与了编写工作，同济大学应用数学系骆承钦教授全面审阅了本书内容，提出了许多宝贵意见，对于本书的修改定稿起到了重要的作用，在编写过程中，我们还广泛地参考了兄弟院校的同类教材及有关资料。在此，我们一并表示衷心的感谢。

本书的编辑出版，还得到同济大学函授学院、应用数学系及同济大学出版社有关同志的关心和支持，也得到本教研室许多老师的热情帮助和支持。对此，我们深表感谢。

本书可以作为工科专业函授生的教材，也可作为工科类成人教育的电大、职大、夜大学生的教材，对于全日制工科各专业的大学生以及广大自学者、工程技术人员也是一本合适的参考书。

由于我们的水平所限，书中难免有不足或错误之处，诚望广大读者批评指正。

编　　者

1993年9月于同济大学

目　录

第一章　行　列　式

本章主要介绍 n 阶行列式的定义、性质和它的计算方法。此外还要介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆法则。

§1.1　二阶与三阶行列式

为了更好地理解 n 阶行列式的概念和性质，我们先介绍二阶与三阶行列式的一些知识。

一、二元线性方程组与二阶行列式

二元线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $a_{ij}(i=1,2; j=1,2)$ 是变量 x_j $(j=1,2)$ 的系数，b_i $(i=1,2)$ 是常数项。

用消元法消去 x_2。为此，在方程组(1)的第一个方程与第二个方程两边分别乘以 a_{22} 与 a_{12}，然后两式相减，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22}-a_{12}b_2.$$

同样地，若消去 x_1，则有

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，求得方程组(1)的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \qquad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{2}$$

为便于记忆，现在来分析一下(2)式的结构，找出它的规律。从(2)式我们看到，x_1、x_2 的分子分母都是两个数的乘积之差，且分母都

等于$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，它是由方程组(1)的系数所确定的。如果将方程组(1)的系数按原来的位置排成二行二列（横的称为行，竖的称为列）的方表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

那么$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$刚好是表中主对角线（左上角至右下角的对角线）上两个数的乘积与副对角线（右上角至左下角的对角线）上两个数的乘积之差。为便于记忆，我们规定：数$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$称为由上面方表所确定的二阶行列式，并记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\text{，} \tag{3}$$

其中a_{ij} $(i=1,2;j=1,2)$称为这个行列式的第i行第j列元素。

利用二阶行列式的概念，(2) 式中x_1,x_2的分子也可写成二阶行列式：

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22}-a_{12}b_2\text{，} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2-b_1a_{21}\text{。}$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\text{，}\qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}\text{，}\qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}\text{，}$$

于是(2)式可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a^{21} & a_{22} \end{vmatrix}}\text{，}\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}\text{，} \tag{4}$$

其中$D\neq 0$。

(4)式是容易记忆的：x_1,x_2的分母D是由方程组(1)的系数所构成的二阶行列式（简称系数行列式），x_1的分子D_1是用方程组(1)的常数项b_1、b_2替换D中x_1的系数a_{11}、a_{21}所得的二阶行列式，x_2的分子

D_2是用b_1、b_2替换D中x_2的系数a_{12}、a_{22}所得的二阶行列式。

例1 求解方程组

$$\begin{cases} 4x_1+x_2=11, \\ 2x_1+3x_2=13. \end{cases}$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=12-2=10\neq 0,$$

又

$$D_1=\begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 13 & 3 \end{vmatrix}=33-13=20.$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 2 & 13 \end{vmatrix}=52-22=30,$$

所以 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{20}{10}=2,\qquad x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{30}{10}=3.$

二、三阶行列式

1. 三阶行列式的定义为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

从定义知，三阶行列式共有六项，每一项均为三个元素的乘积，其中三项的前面为正号，另外三项的前面为负号。为便于记忆，作图如下(图1-1)：图中每条实线(共三条)所连结的三个数的乘积前面加正号，每条虚线

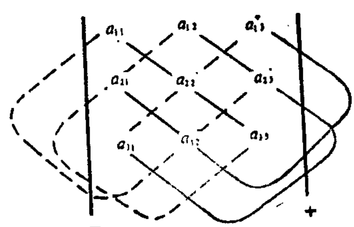

图1-1

(共三条)所连结的三个数的乘积前面加负号.这种方法叫对角线法.

例2 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ -4 & 5 & -6\\ 7 & -8 & 9\end{vmatrix}.$$

解 由对角线法

$$\begin{aligned}D&=1\times5\times9+(-2)\times(-6)\times7+3\times(-4)\times(-8)\\&\quad-1\times(-6)\times(-8)-(-2)\times(-4)\times9-3\times5\times7\\&=45+84+96-48-72-105=0.\end{aligned}$$

2. 三阶行列式与二阶行列式的关系

由三阶行列式与二阶行列式的定义可得

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\\&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\\&=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\\&=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}.\end{aligned}\tag{5}$$

从上式我们看到，三阶行列式等于它的第一行每个元素分别乘一个二阶行列式的代数和．为了进一步了解这些二阶行列式与原来的三阶行列式的关系,我们引入余子式与代数余子式的概念.

在三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

中,把元素$a_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3)$所在的第i行元素与第j列元素删

去，剩下的元素所构成的二阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}。称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij}，即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$。

例如在三阶行列式 D 中，元素 a_{12} 的余子式 M_{12} 是 D 中划去第一行和第二列元素后所成的二阶行列式，即

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

而元素 a_{12} 的代数余子式为

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

利用代数余子式，(5)式可写成

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13},$$

这表明，三阶行列式等于它的第一行每个元素与它的代数余子式的乘积之和。

上面的结果还可以进一步推广，即有下面的定理。

定理 三阶行列式等于它的任一行(或任一列)的每个元素与它的代数余子式的乘积之和，即

$$\begin{aligned} D&=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3} \\ &=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}A_{ij} \qquad (i=1,2,3), \end{aligned} \tag{6}$$

或

$$\begin{aligned} D&=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j} \\ &=\sum_{i=1}^{3}a_{ij}A_{ij} \qquad (j=1,2,3). \end{aligned} \tag{7}$$

证 只证(7)式中 $j=2$ 的情形，其他情形可类似证明.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{22}a_{11}a_{33}-a_{22}a_{13}a_{31}-a_{32}a_{11}a_{23}+a_{32}a_{13}a_{21}$$

$$=-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{22}(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})-a_{32}(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})$$

$$=-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}.$$

(6) 式称为行列式按第i行展开的展开式，(7)式称为行列式按第j列展开的展开式。定理表明，三阶行列式可以按任意一行(或任一列)展开，此定理叫行列式的**展开定理**。

如果我们定义一阶行列式为$|a_{11}|=a_{11}$，那么三阶行列式的展开定理对于二阶行列式同样适用，但由于二阶行列式的计算比较简单，故一般不用展开定理。

例3 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 由于第二列中有两个元素为零，故按第二列展开较简便。

$$D=4\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=4\times(-5)=-20.$$

§1.2 n阶行列式的概念

利用三阶行列式与二阶行列式的关系，我们用归纳法给出 n 阶行列式的定义。

定义 设有n^2个数排成n行n列数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}, \end{matrix}$$

定义n阶行列式为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{cases} a_{11}, & \text{当} n=1; \\ a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}, & \text{当} n>1. \end{cases}$$

其中A_{1j}为第一行元素$a_{1j}(j=1,2,\cdots,n)$的代数余子式①.

与三阶行列式一样,n阶行列式也有下面的展开定理.

定理 n阶行列式等于它的任一行(或一列)的每个元素与它的代数余子式的乘积之和,即

$$\begin{aligned} D &= a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (i=1,2,\cdots,n), \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} D &= a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (j=1,2,\cdots,n). \end{aligned}$$

证明从略.

例1 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 由于第二列的零元素较多,故按第二列展开较简便.

$$D=1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}+(-1)\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

---

①n阶行列式中元素a_{ij}的代数余子式的定义与三阶行列式中所介绍的相同,不再重复.

$= 37 + 46 = 83.$

为了书写简便，在计算某元素的代数余子式时，可以不写 $(-1)^{i+j}$，直接根据下图所示的符号规律确定其符号，其中左上角为正号，各行各列的符号正负相间.

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

例2 计算n阶行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中空白处的元素均为零。

解 由于 D_1的第一列的元素除 a_{11} 外均为零，故可按第一列展开，得

$$D_1 = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

同样，对于上式右边的 $n-1$阶行列式也按第一列展开，并依此类推，得

$$D_1 = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

类似地有 $D_2 = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

例2中的两个行列式均称为三角形行列式，其中 D_1称为上三角形行列式，D_2 称为下三角形行列式．其特点是主对角线一侧的元素

全为零．三角形行列式的值等于主对角线上元素的乘积．

上面的例子告诉我们，在计算n阶行列式时，为了使计算简便，可选择等于零的元素较多的那一行(或列)展开。在实际计算中，往往还要利用行列式的性质，使某行(或列)的元素尽可能多地化为零。下面来介绍n阶行列式的性质。

§1.3 n阶行列式的性质

将行列式D的各行与同序号的列互换，所得的行列式称为行列式D的**转置行列式**，记作D^T，即设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}，\text{则} D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质1 行列式D与它的转置行列式D^T相等。

证 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

于是

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a'_{1n} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $a'_{ij}=a_{ji}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$.

用数学归纳法。当$n=2$时，结论显然成立，即有