SHUXUE WULI FANGCHENG

数学物理方程

仇淑芬　编著

首都师范大学出版社

SHUXUE WULI

数学物理方程

[illegible] 编著

[illegible]

SHUXUE WULI

SHUXUE WULI FANGCHENG

数学物理方程

仇淑芬 编著

首都师范大学出版社

(京)新208号

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程/仇淑芬编著.—北京:首都师范大学出版社,1997.4

ISBN 7-81039-678-1

Ⅰ.数… Ⅱ.仇… Ⅲ.数学物理方程-高等学校-教材 Ⅳ.O175.24

中国版本图书馆CIP数据核字(96)第01588号

首都师范大学出版社

(北京西三环北路105号　邮政编码100037)

北京国马印刷厂印刷　全国新华书店经销

1997年4月第1版　1997年4月第1次印刷

开本850×1168 1/32　印张10.125

字数227千　印数0,001—1,000册

定价:10.00元

内 容 提 要

本书是根据《数学物理方程》大纲编写的.

本书共分五章.第一、二、三章分别讨论弦振动方程、热传导方程、调和方程的基本定解问题的适定性、求解方法及解的性质.第四章对二阶线性偏微分方程的理论作了分析和总结.第五章主要介绍一阶双曲型偏微分方程组.前四章为《数学物理方程》的最基本内容,其他内容可根据具体情况加以取舍.为了便于牢固地掌握这些内容,在每一节后都附有一定数量的习题.

在编定本书的过程中部分内容参考了复旦大学、北京大学数学系编的"数学物理方程"教材,并得到中科院数学所李树杰研究员及我系领导王万良、焦宝聪两位副教授的热情支持和帮助,同时在使用和修改讲义的过程中我系梅向明教授、林有浩教授提出了许多宝贵意见.在此表示衷心感谢,殷切期望读者对本书给予批评与指教.

本书可作为高等师范院校数学系《数学物理方程》教材,也可以作为应用数学专业与计算机专业的教学参考书,并适于自学者使用.

序

数学物理方程是自然科学和工程技术中出现的一些偏微分方程(组),它是一门应用范围十分广泛的数学学科,它的内容和方法不断丰富,不断更新,不断的发展,也是最富有生命力的一门数学学科.

数学物理方程是高等学校数学专业,应用数学专业与计算机专业的一门极其重要的基础课.对于高等师范院校数学专业来说,极需一本既能体现学科特点,又能结合高等师范院校学生实际的《数学物理方程》教材,此书正好满足了这个要求.

本书是作者多年来讲授数学物理方程课的教学实践的成果.在教学研究的基础上,它吸收了国内外同类教材之所长,并渗透了近代数学观点,同时依据高等师范院校《数学物理方程》的教学大纲编写而成的.它介绍了经典偏微分方程的基本内容,注意理论联系实际,并且照顾到高等师范院校学生的实际,证明严格,完整,重视帮助学生复习其他有关数学学科的基础知识,使本书内容由浅入深,学生阅读起来不会有太多的困难.同时又注重培养学生分析问题和解决问题的能力,因此我认为:本书是一份好教材.

本书共分五章,依次为:波动方程;热传导方程;调和方程;二阶线性偏微分方程的分类与总结;一阶偏微分方程组.特征理论.

本教材具体特点如下:

(1) 力图体现"师范特点"重视对有关基础知识(如:数学分析、常微分方程、线性代数、复变函数等)的有机联系及综合应用,对基础课起到复习巩固和深化的作用.

(2) 取材本着"少而精"的原则,主要研究三种典型方程的基本内容,对每一种方程理论、方法都要讲深,讲透,使学生不仅学到

具体知识，更重要的是理解其中的数学思想.

(3) 加强理论与实际的联系，力图通过对一些具有典型意义的模型方程的深入剖析，阐明和介绍偏微分方程的基本理论，解题典型技巧以及它们的物理背景. 把数学理论，解题方法与物理实际这三者有机地，紧密地结合在一起是本教材区别于其它教材的一个鲜明的特点.

(4) 力求对每一典型方程的导出、定解条件的提出及其解法都揭示其实际背景，从而在解决实际问题的过程中培养，提高学生的分析问题、解决问题的能力.

梅向明

1996. 3. 25

目　录

引言……………………………………………………（ 1 ）

第一章　波动方程——双曲型方程……………………（ 7 ）

§1　一维波动方程的导出及定解条件 ………………（ 7 ）

§2　达朗贝尔(D' Alembert)公式・波的传播 ………（ 24 ）

§3　混合问题的分离变量法——驻波法 ……………（ 48 ）

§4　高维波动方程柯西(Cauchy)问题 ………………（ 69 ）

§5　能量不等式、波动方程解的唯一性和稳定性 ……（ 93 ）

第二章　热传导方程——抛物型方程…………………（114）

§1　热传导方程及其定解问题的提法 ………………（114）

§2　混合问题的分离变量法 …………………………（123）

§3　柯西(Cauchy)问题的解法——用 Fourier 变换

……………………………………………………（133）

§4　极值原理・定解问题的唯一性和稳定性 ………（155）

第三章　调和方程——椭圆型方程……………………（163）

§1　建立方程・定解条件 ……………………………（163）

§2　格林公式及其应用 ………………………………（170）

§3　边值问题与格林函数 ……………………………（180）

§4　强极值原理・第二边值问题的唯一性 …………（203）

第四章　二阶线性偏微分方程的分类与总结…………（210）

§1　二阶方程的分类 …………………………………（210）

§2　二阶偏微分方程的特征理论 ……………………（229）

§3　三类方程的比较 …………………………………（238）

第五章　一阶偏微分方程组・特征理论………………（247）

§1　偏微分方程组的实例及一些概念 ………………（247）

§2 两个自变量的一阶线性偏微分方程组的特征理论 …………………………………………… (258)
§3 两个自变量的线性双曲型方程组的柯西(Cauchy)问题 …………………………………… (272)
§4 两个自变量的线性双曲型方程组的其它定解问题 …………………………………………… (286)
§5* 两个自变量的一阶拟线性偏微分方程组 ……… (290)
§6 幂级数解法·柯西——柯娃律夫斯卡娅定理 … (298)

引　言

一、数理方程研究的对象、任务和特点

数理方程是以物理学、力学以及工程技术中的具体问题为研究对象(即以物理模型为研究对象).那么什么叫数理方程呢?下面就介绍数理方程的概念.

1. 数理方程的概念

在自然科学和工程技术的各门分支中出现的大量的偏微分方程(有时也包括积分方程、微分积分方程等)通常称为数学物理方程,简称数理方程.它反映了客观世界物理量之间互相制约的关系.例如连续介质力学、电磁学、量子力学等方面的基本方程都属于数理方程的范围.

2. 数理方程的分类

既然数理方程是以物理模型为研究对象,因而从物理过程和状态来看数理方程一般分三类.

一类是反映物体振动和波的传播的自然现象和物理过程的典型代表方程——波动方程(双曲型方程)形如:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=f(x,y,z,t).$$

另一类是反映粒子扩散、热的传导过程的自然现象(即输运过程的物理现象)典型代表方程——热传导方程(抛物型方程)形如:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=f(x,y,z,t).$$

还有一类是反映稳定、平衡过程的物理现象的典型代表方程

——Laplace 方程(椭圆型方程)形如:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 .$$

这三类方程是我们研究的中心内容,也就是书上前三章内容.第四章是从数学角度对数理方程进行分类并且对各种类型的方程的解法及解的性质进行比较和总结.第五章为一阶偏微分方程组.特征理论.

这三类方程的最基本的内容包括这些方程是怎样从实际问题中推导出来的,应当怎样正确地提出定解问题.定解问题的基本解法有哪些,以及解的性质的初步讨论等方面.

在这里我们应当特别指出,偏微分方程的内容不限于这些.数理方程是偏微分方程的基础部分,而偏微方程的理论是现代数学中应用十分广泛,十分活跃,而且极为重要的一个数学分支.它的内容和方法在不断丰富,不断更新,不断发展,是最富有生命力的数学学科之一.但是我们的课程仅仅介绍这三类典型方程的最基本内容.为进一步学习偏微分方程打下扎实的基础.

3. 数理方程的任务

它的根本任务有以下两方面:

第一,要提供方程的解法,即给出解的表达式和计算方法.

第二,要通过理论的分析得出方程的通解或某些特解的一般性质.

这两方面任务,都是人类认识自然、改造自然迫切需要解决的,而数理方程的发展也就是围绕着这两个中心任务的.

4. 数理方程的特点

它有如下两个明显特点:

第一,它与生产实践有直接的、紧密的联系.例如:它直接地紧密地联系物理学、力学和工程技术中的许多问题.可以说实际需要决定了它的研究方向和课题.不但如此,自然现象的规律还会对方程的求解方法与解的性质的分析研究给出许多启迪.数理方程中

有许多常用的重要方法，都可以在自然现象中找到它的来源，自然现象中的许多性质也都反映在方程的许多性质中.

例如：早在18世纪初，泰勒(Tayler)就将弦线横向振动问题归纳成著名的弦振动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

以后贝努力(Bernoulli)从物理上观察弦振动发出的复杂噪音是由各种不同频率的单音迭加而成，而单音振动时形成正弦曲线，从这个观点出发，用三角级数把这方程的解表示为：

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\left(a_1\cos\frac{a\pi t}{l}+b_1\sin\frac{a\pi t}{l}\right)\sin\frac{\pi x}{l}\\&+\left(a_2\cos\frac{2a\pi t}{l}+b_2\sin\frac{2a\pi t}{l}\right)\sin\frac{2\pi x}{l}+\cdots\end{aligned}$$

的形状. 同时，他发现了数理方程中极基本的迭加原理. 这种方法被富里埃(Fourier)所发展，称为富里埃法或称为驻波法. 后来欧拉(Euler)和拉格朗日(Lagrauge)在研究流体力学，拉普拉斯(Laplace)研究位函数，富里埃在研究热传导理论时，都归结为一些偏微分方程的问题，并得到了这些问题的一些有效的解法.

第二，它广泛地应用数学中许多分支的结果.

数理方程一方面反映了各种自然现象所提供的有关变量之间互相制约关系. 另一方面作为数学分支，又要从数学角度去分析研究解决它们，因此它就成为数学理论与实际问题之间的桥梁.

由于自然现象的复杂、多样，反映到数理方程中也是极为多样和复杂，因此它需要数学工具十分广泛. 另外在解决数理方程中的问题的同时也推动了数学其它分支的发展. 数学的许多分支与数理方程这一分支之间相互推动发展的例子是很多的.

例如：复变函数的产生，首先是由于研究流体力学中的不可压缩的无旋，无源的平面稳定流动时得到两个偏微分方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_x}{\partial x} = -\dfrac{\partial v_y}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial v_y}{\partial x} = \dfrac{\partial v_x}{\partial y}, \text{其中速度 } v = v_x + i v_y. \end{cases}$$

后来复变函数的发展对偏微分方程的研究,特别是解决椭圆型方程的边值问题起了很大作用. 它是解决偏微分方程边值问题的一种很漂亮的方法.

数理方程只能解决简单边值问题,如:圆(球)形,上半平面(半空间)等边值问题,而复杂的边值问题,如果用复变函数的黎曼定理,通过保形映射变为圆形或直线形边值问题,则使问题得到解决.

又如,泛函分析的发展与数理方程中的固有值问题,变分问题等都有密切的关系,而泛函分析的思想方法现在已经渗透到数理方程中.

在本课中除去经常用到数学分析中的许多基本内容外,还要用到复变函数论与泛函分析中的一些基本知识与方法,如,围道积分、留数定理,希尔伯特(Hilbert)空间基本理论等,其它数学分支如几何、代数、常微分方程的一些基本知识也是经常用到的.

二、学习数理方程的目的要求

由于数理方程有这些特点,因此在学习时要紧密地注意它与力学、物理学中各种有关现象的联系. 同时要注意在比较复杂与多样的内容中抓住它们的共同性和相互区别的地方.

要熟练地掌握教材讲述的解决问题的方法,能分析问题,会根据问题的性质使用方法,会灵活地把其它数学分支的知识用到数理方程中来. 这样才能做到既能牢固地掌握理论,又能熟练地进行计算.

在我国社会主义建设中,需要用有关的数学知识来解决实际

问题中遇到的大量的偏微分方程问题. 例如：大型水利工程、大型建筑、气象预报等方面有不少的偏微分方程问题急需解决，这就是我们学习和钻研数理方程的巨大动力.

对基础课起巩固和提高的作用，同时为进一步学习偏微分方程打下扎实基础. 在解决实际问题中培养分析问题解决问题的能力.

关于数理方程的发展情况这里不作介绍了.

三、偏微分方程的一些概念

1. 偏微分方程的定义

包含多元未知函数 $u=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 及其若干阶偏导数的方程称为**偏微分方程**.

例如：

$$u\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2+u^2\frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+u^2=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}-c(x,t)u-f(x,t)=0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2-u=0 \tag{5}$$

都是偏微分方程.

2. 偏微分方程阶的定义

在方程中所含未知函数最高阶偏导数的阶数称为偏微分方程的阶. 方程(1)是三阶方程. 方程(2)、(3)是二阶方程. 方程(4)、(5)是一阶方程.

3. 线性方程的定义

若偏微分方程中凡是包含未知函数及其偏导数的项都是一次

的，则称它是**线性方程**. 方程(3)、(4)是线性方程.

4. 拟线性方程的定义

若方程中仅对未知函数所有最高阶偏导数都是线性的，则称它为**拟线性方程**. 方程(1)、(2)是拟线性方程.

5. 非线性方程的定义

若方程中对未知函数的最高阶偏导数不是线性的，则称它为**非线性方程**. (5)为非线性方程，也非拟线性方程.

6. 方程的解的定义

对一个偏微分方程，若存在一函数具有方程中所需要的各阶连续偏导数，并将它代入方程时能使方程成为恒等式，则称这函数为**方程的解**.

7. 自由项的定义

若方程中有不含未知函数及其偏导数的项，则称它为**自由项**.

第一章 波动方程——双曲型方程

本章介绍典型的双曲型方程，因为它在研究波的传播和物体振动现象时经常遇到. 例如：弹性波、光波、声波、电磁波以及机械振动等等. 虽然各有其特殊的规律，但它们的共性是波动. 因此，在数学上均可用波动方程来描述其运动规律. 最简单的是一维波动方程. 例子是著名的弦振动方程.

§1 一维波动方程的导出及定解条件

1. 一维波动方程的导出

例 1 弦横振动方程：设一根拉紧均匀、柔软、有弹性的弦，其长为 l，两端固定在 x 轴上 O 与 L 两点上，其弦密度为 ρ，外力密度为 $\boldsymbol{F}(x,t)$，当弦在平衡位置附近作垂直于 OL 方向的微小振动时，求弦上各点的运动规律.

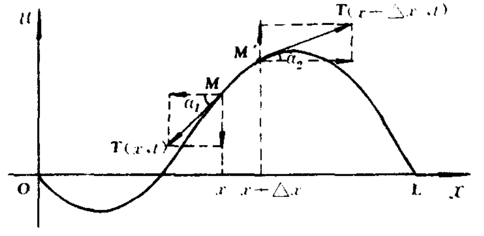

图 1.1

解 引入如上图所示的坐标系. 弦上各点满足：$0\leqslant x\leqslant l$，并且用 $u(x,t)$ 表示在 x 处在 t 时刻弦沿着垂直 OL 方向的位移. 我们

用微元法建立 $u(x,t)$ 满足的偏微分方程.

在弦内任取一小段弦 $\overset{\frown}{MM'}$，即 $(x,x+\Delta x)$. 不包含弦的端点. 其长为 Δs.

(1) 先分析作用在 $\overset{\frown}{MM'}$ 上有哪些力.

1° 张力：由于弦柔软所以没有抗弯曲力，因此张力 $\boldsymbol{T}$ 的方向是切线方向，其数值记为 T.

在 M 点的张力 $\boldsymbol{T}(x,t)$ 在 x 轴和 u 轴方向的分力分别为：

$$-T(x,t)\cos\alpha_1, \qquad -T(x,t)\sin\alpha_1.$$

其中 α_1 表示张力与水平方向的夹角，负号表示力的方向与坐标轴的方向相反.

在 M' 点张力 $\boldsymbol{T}(x+\Delta x,t)$ 在 x 轴和 u 轴方向的分力分别为：

$$T(x+\Delta x,t)\cos\alpha_2, \qquad T(x+\Delta x,t)\sin\alpha_2.$$

其中 α_2 表示张力与水平方向的夹角.

2° 外力：若外力密度为 $\boldsymbol{F}(x,t)$ 其方向是垂直于 x 轴方向，则 $\overset{\frown}{MM'}$ 上所受的外力为：

$$\int_x^{x+\Delta x} F(x,t)dx.$$

(2) 再分析小弦 $\overset{\frown}{MM'}$ 运动情况.

由于弦是均匀的，线密度为 ρ，所以小弦的质量为 $\rho\Delta x$，近似看作在重心 $\bar{x}$ 点. 又因为 $[x,x+\Delta x]$ 上各点受力很接近，因此各点的加速度也近似相同. 不妨以 $\bar{x}$ 点的加速度 $\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2}$ 来代表. 因为弦作横振动，所以沿 x 轴方向的加速度为零.

(3) 列平衡方程

物体振动遵循牛顿第二定律：$f=ma$.

水平方向的合力：

$$T(x+\Delta x,t)\cos\alpha_2 - T(x,t)\cos\alpha_1 = 0. \tag{1.1}$$

垂直方向的合力：