初中数学重点与难点

第一册

翟连林
赵学恒　　主编

光明日报出版社

初中数学重点与难点

第一册

中小学教师参考丛书

初中数学重点与难点

第一册

主　编　　翟连林　赵学恒

光　明　日　报　出　版　社

初中数学重点与难点

第一册

翟连林　　赵学恒　　主编

光明日报出版社出版、发行
（北京永安路106号）
新华书店北京发行所经销
河北省保定一中动刷厂印刷

开本：787×1092毫米　1/32　印张5.125　115千字
1991年2月第一版　1991年2月第一次印刷
统一书号：ISBN 7-80014-960-9/G・341
印数：1—22200册　定价：2.30元

丛书出版说明

实现我国四个现代化的重要因素是人的素质，提高人的素质的关键是教育，提高教育质量的关键是教师。对了帮助教师备好课，提高教学质量，我们组织全国有丰富教学经验的特教级师、高级教师和教研员，编写出版了这套“中小学教师参考丛书”。

这套丛书主要内容是：交流教学经验、教学资料和教学科研成果。

由于我们的水平有限，欢迎广大教师提出宝贵意见。

“中小学教师参考丛书”编委会

1991.1.

“中小学教师参考丛书”编辑委员会

前　言

突出重点、突破难点是提高教学质量的关键。为帮助广大初中教师，特别是青年教师备好课，提供一份实用的教学参考资料，我们组织全国八省、市有丰富经验的特、高级等优秀教师，总结多年讲授初中数学课的经验，编成本书。

本书对初一各章教材的重点和难点进行了较为详尽的分析，给出了一定数量的典型例题并进行了解题思路的引导和评注，各章末配有习题精荟（可作60——100分钟单元测试题），并附有答案或提示。书末附有两套期末测试题及答案或提示。

参加本书编写工作的有：

林宗炘（福建福州市一中）、张家瑞（江苏苏州市四中）、胡增明（浙江严州中学）、　赵莲音（四川南充市六中）、沈树基（湖南株州市一中）、徐柏万（江西抚州市三中）、潘　琦（江苏无锡市二中）、徐起勋（湖北武汉市先锋中学）、柳俐俐（上海育才中学）、贾宜民（湖北黄石市二中）、陈玉嬿（浙江金华市六中）、陈介一（江苏苏州市四中）、樊淑仁（湖北黄石市十五中）、童湘凌（浙江严州中学）、刘金玲（河北青县王镇店中学）、鲁　俊（安徽桐城县青草隔中学）

由于我们的水平有限，书中不当或错误之处在所难免，欢迎广大读者批评指正。

翟连林　　赵学恒

1990年8月

目　录

第一章 有理数

重 点 难 点

数是数学研究最基本的对象之一，它是用来表示客观世界存在的量。随着人类社会实践水平的逐步提高，数的概念在不断发展、扩张，为了表示相反意义的量引入了负数，把数的范围扩充到有理数，并建立了有理数运算法则。有理数概念是有理数运算的基础，有理数的运算是整个中学阶段数学的基本运算。因此，有理数概念和有理数的运算是本章的重点。正确认识"负数"概念是本章的第一个难点。做到数形结合，充分利用"数轴"这个助手和"绝对值"的工具作用是突破这个难点的关键。掌握有理数概念，为正确、合理、迅速进行有理数运算奠定了基础。有理数运算整个过程贯穿着一种"转化"思想。若能掌握有理数运算的符号法则和转化的手段（绝对值在其中又起着关键作用），有理数的计算就迎刃而解。有理数的混合运算是培养计算能力的陡峻之处，是本章的又一个难点。难在既要按照运算的顺序，又要特别留意数"0"和正负号，正确处理运算结果的符号（正负）与绝对值（大小），还要会灵活应用运算律，调整原来的运算顺序，使运算简便。为此，必须做足够数量的练习，达到计算正确、合理、迅速的程度。

1. 正确理解"负数"概念.引进负数后必须重视数的新的意义和特征，理解、熟记有理数集的两种分类法：

（1）按数的整分性分类：

$$
\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数（自然数）}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}
$$

（2）按数的正负性分类：

$$
\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数（自然数）}\\ \text{正分数}\end{cases}\\ \text{零}\\ \text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}
$$

注① 两种分类各有不同的用途，不管哪种分类，有理数都包括正整数、零、正分数、负整数、负分数这五类基本数。

② 任何一个有理数都可以写成分数$\frac{m}{n}$（m、n为互质整数n为正整数）的形式，每一整数都可以写成以1为分母，以原数为分子的分数。有理数也可理解和表示为循环小数（包括整数、有限小数）。有理数总可以实施加、减、乘、除（除数不为零）。

③ 零是一个整数，也是一个偶数，零与正整数、负整数组成一个整数集合。“0”是作为具有相反意义的量的基准，它既不是正数，也不是负数，它是唯一的中性数，也是唯一的绝对值为零的数，相反数是它本身的数，没有倒数的数，零仍然保持着独特的运算法则（注意：零不能作除数）。

2．数轴是一条规定了原点、正方向和单位长度的直线。

数轴的主要作用有以下三点：

（1） 数轴使有理数和最简单的图形——直线上的点之间建立了对应关系，即所有的有理数都可以用数轴上的点表示，反过来，从数轴上每个表示有理数的点，都可以读出它们所表示的有理数。

（2） 数轴能表达数的性质，即从数轴上可以看出，原点O表示的是中性数“0”。正数与负数的对立，决定了它们对应的点在原点的右边和左边的区别。从而巩固了具有相反意义（方向）的量的概念。

（3） 数轴能给出数的几何解释，即借助于数轴，关于原点对称的两个点，所表示的只有符号不同的两个数，它们是互为相反的数，零的相反数是零（任何一个数的前面添上一个负号就得到它的相反数，如果两数之和为零，那末这两个数绝对值相等，符号相反，这两个数是互为相反数）。

借助于数轴，还可直观地解释：一个数的绝对值就是表示这个数的点离开原点的距离。不难看出：任何有理数都有唯一的绝对值，绝对值最小的数是零，任何一个有理数不大于它的绝对值，绝对值相等的两个数不一定相等。显然，任何有理数的绝对值一定是一个非负数，这是绝对值的代数定义的本质。正因为如此，绝对值作为沟通算术数（非负数）与新数（有理数）之间的桥梁，这样，有理数的运算就可以转化为算术数的运算。

比较两个有理数的大小，反映到数轴上，较大的数所对应的点在较小的数所对应的点的右边，即数轴上表示的两个有理数，右边的数总比左边的数大；正数都大于零，负数都小于零，正数大于一切负数；两个负数，绝对值大的反而小。如

果是比较三个或三个以上数的大小，也可以在数轴上进行，先用点记出各数，再根据数轴上右边的数总比左边的数大的规则判定。

3．有理数的加、减、乘、除、乘方运算及混合运算，依据是法则。

（1） 有理数运算法则表：

运算		两数相加（代数和）		两数相乘（除）	
		同号	异号	同号	异号
法则	符号	不变	取绝对值较大的加数符号	+	−
	绝对值	相加	相减	相乘（除）	相乘（除）

（2） 在有理数运算中，加减法互为逆运算，它们既对立又统一，在有了相反数的概念以后，有理数的加减法就可以互相转化。同样，有理数的乘除法也是互为逆运算，它们既对立又统一，在有了倒数的概念以后，有理数的除法可以转化为乘法，转化的法则是：除以一个数，等于乘以这个数的倒数，反之亦然。

减转化为加

$$a-b=a+(-b)$$

互为相反数

除转化为乘

$$a\div b=a\times\frac{1}{b}\ (b\neq0)$$

互为倒数

乘转化为除

$$a\times b=a\div\frac{1}{b}\ (b\neq0)$$

互为倒数

（3） 乘方运算只是一种特殊乘法（相同因数相乘）的改写。只要理解了底数、指数的意义也就不难掌握了。

由此可见，掌握有理数的加法和乘法运算是学好有理数运算的基础，而学会转化则是学好有理数运算的关键，要达到转化这个目的，起决定性作用的是绝对值。做到“加法运算会计算；减法运算会转换；乘除符号判断准；运算顺序把好关”，就不难正确、熟练掌握所有的有理数运算。如何做到有理数的合理运算，还必须注意以下几点：

① 有理数的加减法，转化为求代数和，要特别注意“+”、“-”号的理解和使用问题，“一号一读，一号一用”。即同一符号或者把它看成性质符号（正、负号）或者看成运算符号（加、减号），万万不可既看成性质符号，又同时看成是运算符号，也就是说，同一符号两次应用是错误的。

② 先定结果的符号，再求结果的数值，这是合理运算的一条通用原则。

③ 算式中既有小数，又有分数时，一般先把小数化为分数，带分数化为假分数，然后再进行乘除混合运算。

④ 正确使用“四舍五入法”。用四舍五入法把一个数截取到某一指定的数位时，必须“考察到这个数位的下一位数字”。近似小数末尾的“0”不能随便去掉，如1.7与1.70，两者有效数字个数不同，精确度不同（1.70比1.7多一个有效数字，精确度高）。

典 型 例 题

例1　写出所有适合下列条件的数：

（1）最小的正整数；

（2）最大的负整数；

（3）大于－3且小于2的整数；

（4）在－4与4之间的连续偶数；

（5）在－5与5之间的连续奇数；

（6）在－1与1之间且分母为3的最简分数；

（7）绝对值最小的数；

（8）绝对值大于2.3且小于3.4的自然数；

（9）哪几个负整数的绝对值大于2且小于5；

（10）－0.375的相反数的倒数；

（11）平方数小于20的自然数；

（12）立方数小于100的正整数.

【解】(1)1；(2)－1；(3)－2，－1，0，1；（4）－2，0，2；（5）－3，－1，1，3；（6）$-\frac{2}{3}$，$-\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$；（7）0；（8）3；（9）－3，－4；（10）$\frac{8}{3}$；（11）1，4，9，16；（12）1，8，27，64。

例2　如果一个数和它的倒数、相反数比较，总是这个数最大，那么（　　）

（A）这个数是大于1的正数；

（B）这个数是正的真分数；

（C）这个数是负的假分数；

（D）这个数是负整数。

【分析】 解答数学选择题常用方法有直接判定法，求解对照法，特殊值法，筛选删除法等。为此，要因“题”制宜，解法择优。

【解一】（直接求解对照）

设这个数是a，$\because a>-a$，$\therefore a>0$，

又$\because a>\frac{1}{a}$，$\therefore a>1$，本题应选（A）。

【解二】（特殊值法）

设这个数为-3，$\because -3<-(-3)$与题设这个数总大于它的相反数相矛盾，可排除（D），同理可排除（C），又设这个数为$\frac{1}{2}$，$\because \frac{1}{2}<\frac{1}{\frac{1}{2}}$ 与题设这个数总大于它的倒数相矛盾，可排除（B），$\therefore$本题应选（A）。

例3 当$x<-1$时，化简$\left|1+\left|1+|1+x|\right|\right|$。

【分析】 正数和零的绝对值就是它本身，负数的绝对值是它相反数，只要知道这个数，就可以求它绝对值，从而由里层到外层去掉绝对值符号，有时还需要讨论。

【解】 $\because x<-1$，$\therefore 1+x<0$，$-x>0$，$1-x>0$，

$$\therefore \left|1+\left|1+|1+x|\right|\right|=\left|1+\left|1+(-1-x)\right|\right|$$

$$=\left|1+\left|-x\right|\right|=|1-x|=1-x$$

例4 （1）什么样的两数和是正数？零？

（2） 如果两数的积是零，那么这两数是什么数？

【分析】 只有深刻理解有理数的加法、乘法法则，通过详尽讨论，才能得出正确完备的答案.

【答】 （1）下列三种情况之一者，两数的和为正：

① 两加数都为正数；

② 一加数为正数，另一加数为零；

③ 一加数为正数，另一加数为负数，且正加数的绝对值大于负加数的绝对值.

当两加数互为相反的数（包括两加数都为零）时，两数的和为零.

（2） 如果两数积为零，那末这两数中至少有一个为零.

例5 计算：$(-1.78)+(-2.05)-(-3.17)-(+4.43)-(-5.14)$

【分析】 只含有加减混合运算的步骤：遇减化加，省略加号，简化算式；运用加法运算律，简化运算，求出结果.

【解】 原式

$$=(-1.78)+(-2.05)+(3.17)+(-4.43)+(+5.14)$$

$$=-1.78-2.05+3.17-4.43+5.14$$

$$=(-1.78-2.05-4.43)+(3.17+5.14)$$

$$=-8.26+8.31=0.05.$$

例6计算：$\left[2.5-\left(0.375+\frac{1}{6}-\frac{3}{4}\right)\times 24\right]\div 5\times(-1)^{1990}$

【**分析**】含加、减、乘、除、乘方的混合运算，计算时往往采取把小数化为分数，并以加减分段，每段只含有二、三级运算，分段后，每段中的运算可同时进行，能达到简化运算步骤。若能运用运算律便可进一步简化运算。

【**解**】 原式$=\left[2\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{6}-\frac{3}{4}\right)\times 24\right]\div 5\times(-1)^{1990}$

$$=\left[2\frac{1}{2}-(-5)\right]\div 5\times(-1)^{1990}$$

$$=\left(2\frac{1}{2}+5\right)\div 5\times(-1)^{1990}$$

$$=1\frac{1}{2}$$

例7 计算：$\left\{\left[3\frac{3}{4}\div\left(-\frac{1}{4}\right)+(+0.4)\times\left(-\frac{5}{2}\right)^2\right]\div\left(-\frac{5}{3}\right)-20\right\}\times(-1)^{128}$

【**分析**】 有括号的混合运算（按小、中、大括号的顺序），括号里面仍然是先进行三级运算，再进行二级运算，最后进行一级运算。

【**解**】原式$=\left\{\left[3\frac{3}{4}\div\left(-\frac{1}{4}\right)+(+0.4)\times\frac{25}{4}\right]\right.$