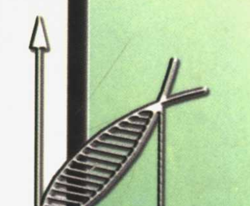
经济数学基础

——微积分



习题解答

中央财经大学数学教学部编

经济科学出版社

《经济数学基础——微积分》
习　题　解　答

中央财经大学数学教学部　编

经济科学出版社
1998.8

图书在版编目（CIP）数据

经济数学基础：微积分习题解答/中央财经大学数学教学部编．—北京：经济科学出版社，1998.9

ISBN 7-5058-1479-6

Ⅰ．经…　Ⅱ．中…　Ⅲ．①经济数学-解题②微积分-解题
Ⅳ．F224　0-44

中国版本图书馆CIP数据核字（98）第18606号

责任编辑：张建光
责任校对：徐领弟
版式设计：周国强
技术编辑：潘泽新

《经济数学基础——微积分》习题解答
中央财经大学数学教学部　编

经济科学出版社出版发行　新华书店经销
北京地质印刷厂印刷
出版社电话：62541886　发行部电话：62568479
经济科学出版社暨发行部地址：北京海淀区万泉河路66号
邮编：100086
*
850×1168毫米　32开　6.5印张　165000字
1998年9月第一版　1998年9月第一次印刷
印数：0001—7000册
ISBN 7-5058-1479-6/G·287　定价：10.50元

目　录

第一章　函　数

练　习　1-1

1. 判断以下各题 y 是否为 x 的函数：

(1) $y=\lg x^2$.　　(2) $y=\lg(-x^2)$.

(3) $y>x$.　　(4) $y=\arcsin(x^2+\sqrt{2})$.

(5) $y=\sqrt{x}+\lg(-x)$.

解：(1) 是．(2)、(4)、(5) y 不是 x 的函数，其理由为定义域为空集.(3) y 也不是 x 的函数，其理由为对某一个固定的 x，y 有多个值与之对应.

2. 作出下列函数的图形：

(1) $y=x$.　　(2) $y=x^2+1$.　　(3) $y=\sqrt{x}$.

(4) $y=\dfrac{1}{1-x}$.　　(5) $y=\sin x$.　　(6) $y=\cos x$.

(7) $y=3x+4$.　　(8) $y=\lg x$.　　(9) $y=2x$.

(10) $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$.

解：(1)

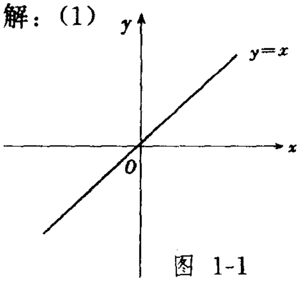


图 1-1

(2)

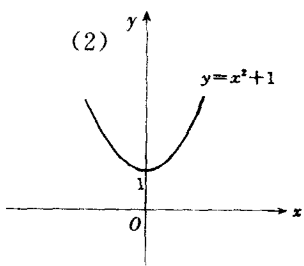


图 1-2

(3)

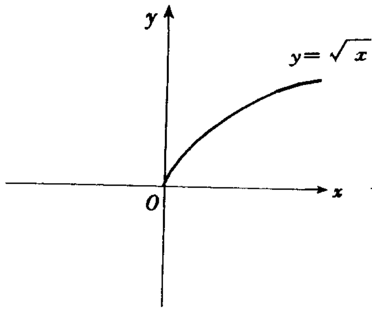


图 1-3

(4)

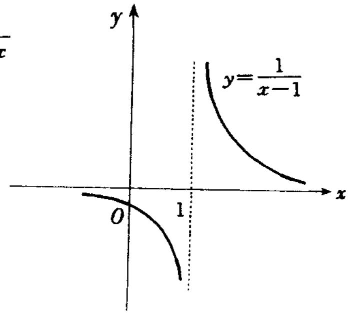


图 1-4

(5)

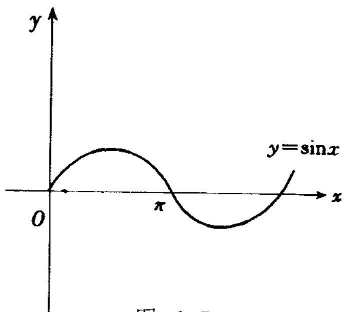


图 1-5

(6)

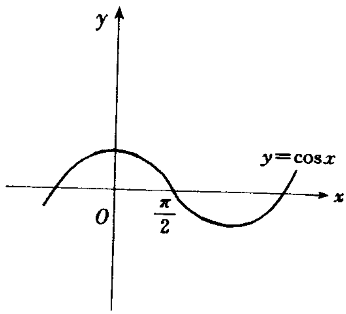


图 1-6

(7)

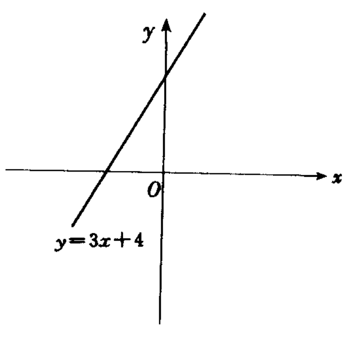


图 1-7

(8)

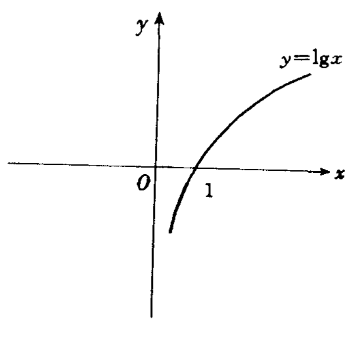


图 1-8

(9)

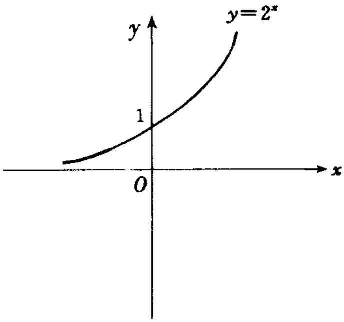


图 1-9

(10)

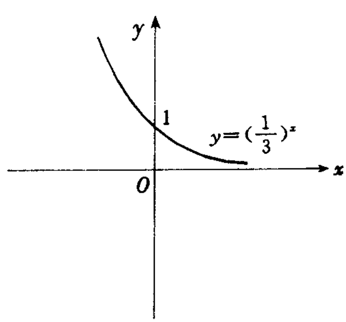


图 1-10

3. 求下列函数的反函数：

(1) $y=3x-1$.

解：$\because y=3x-1$，即 $x=\frac{y+1}{3}$，故

$$f^{-1}(x)=\frac{x+1}{3}.$$

(2) $y=\sqrt[3]{x-1}$.

解：$\because x-1=y^3$，即 $x=y^3+1$. 故

$$f^{-1}(x)=x^3+1.$$

(3) $y=\frac{1-x}{1+x}$.

解：$\because (1+x)y=1-x$，有 $y+xy=1-x$，

$y-1=-x(1+y)$.

$$x=\frac{1-y}{1+y}.$$

$$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1-x}{1+x}.$$

(4) $y=1+\ln(x+3)$.

解：$\because$ $y-1=\ln(x+3)$，即 $x+3=e^{y-1}$，$x=e^{y-1}-3$，

$\therefore$ $f^{-1}(x)=e^{x-1}-3$.

(5) $y=2^{x-1}$.

解：∵　$x-1=\log_2 y$，即 $x=1+\log_2 y$，

∴　$f^{-1}(x)=1+\log_2 x$.

练　习　1-2

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x-1}$.　　(2) $y=\sqrt{3x+1}$.　(3) $y=\dfrac{1}{1-e^{x}}$.

(4) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{9-x^2}}$.　(5) $y=\dfrac{1}{\dfrac{x-2}{x}}$.　(6) $y=\sqrt{\lg(x-4)}$.

解：(1) 要使函数有意义，必须有 $x\neq 1$，所以，定义域为

$D=\{x|(-\infty,1)\cup(1,+\infty)\}$.

(2) 要使函数有意义，必须有 $3x+1\geqslant 0$，$x\geqslant -\dfrac{1}{3}$，

$D=\{x|(-\infty,-\dfrac{1}{3}]\}$.

(3) 要使函数有意义，必须有 $1-e^x\neq 0$. $e^x\neq 1$，$x\neq 0$，

$D=\{x|(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\}$.

(4) 要使函数有意义，必须有 $9-x^2\neq 0$，即 $x^2\neq 9$，$x\neq\pm 3$，

$D=\{x|(-\infty,-3)\cup(-3,+3)\cup(3,+\infty)\}$.

(5) 要使函数有意义，必须有 $x\neq 0$，且 $x\neq 2$，

$D=\{x|(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)\}$.

(6) 要使函数有意义，必须有 $\lg(x-4)\geqslant 0$，即 $x-4\geqslant 1$，$x\geqslant 5$，

$D=\{x|[5,+\infty)\}$.

2. 判断以下各对函数是否为相同的函数：

(1) $y=\lg x^2$，　$y=2\lg x$.

(2) $y=x$，　$y=\sqrt{x^2}$.

(3) $y=|x|$，　$y=\sqrt{x^2}$.

(4) $y=\sqrt[3]{x^5-x^4}$,　$y=x\sqrt[3]{x^2-x}$.

(5) $y=\dfrac{1}{\dfrac{x-1}{x}}$,　$y=\dfrac{x}{x-1}$.

(6) $y=2x+1$,　$u=2t+1$.

(7) $y=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}$,　$y=\sqrt{x(x-1)}$.

解：(1) $y=\lg x^2$，$y=2\lg x$　不是相同函数. 因为定义域不相同.

(2) $y=x$，$y=\sqrt{x^2}$不是相同函数，因为定义域不相同.

(3) $y=|x|$，$y=\sqrt{x^2}$是相同函数.

(4) $y=\sqrt[3]{x^5-x^4}$，$y=x\sqrt[3]{x^2-x}$是相同函数.

(5) $y=\dfrac{1}{\dfrac{x-1}{x}}$，$y=\dfrac{x}{x-1}$不是相同函数，因为定义域不同.

(6) $y=2x+1$，$u=2t+1$ 是相同函数.

(7) $y=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-1}$，$y=\sqrt{x(x-1)}$是相同函数.

3. 已知 $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}-6$，求 $f(1)$, $f(2)$, $f(-1)$, $f(-x)$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $f(x^3)$, $f(u)$.

解：$f(1)=1^2+\dfrac{1}{1}-6=-4$.

$$f(2)=2^2+\frac{1}{2}-6=-1.5.$$

$$f(-1)=(-1)^2-\frac{1}{1}-6=-6.$$

$$f(-x)=(-x)^2+\frac{1}{-x}-6=x^2-\frac{1}{x}-6.$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{1}{\frac{1}{x}}-6=\frac{1}{x^2}+x-6.$$

$$f(x^3)=(x^3)^2+\frac{1}{x^3}-6=x^6+\frac{1}{x^3}-6.$$

$$f(u)=u^2+\frac{1}{u}-6.$$

4. $f(x+1)=x^2+3x+5$， 求 $f(0),f(x)$.

解：取 $t=x+1$，即 $x=t-1$，则

$$f(x+1)=f(t)$$
$$=(t-1)^2+3(t-1)+5$$
$$=t^2+t+3,$$

所以 $f(x)=x^2+x+3$

$f(0)=0^2+0+3=5$.

5. 如果 $f(x-1)=x^2$，求 $f(x+1)$.

解：取 $t=x-1$，即 $x=t+1$，代入 $f(x-1)=x^2$，得

$f(t)=(t+1)^2=t^2+2t+1$，

所以，$f(x+1)=(x+1)^2+2(x+1)+1$

$=x^2+4x+4$.

6. 若 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求下列函数的定义域：

(1) $f(2x)$.　　(2) $f(x+5)$.

(3) $f(x^2)$.　　(4) $f\left(x+\frac{1}{4}\right)+f\left(x-\frac{1}{4}\right)$.

解：(1) $2x\in[0,1]$，所以 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

(2) $x+5\in[0,1]$，所以 $x\in[-5,4]$.

(3) $x^2\in[0,1]$，所以 $x\in[-1,1]$.

(4) $x+\frac{1}{4}\in[0,1]$，所以 $x\in\left[-\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$；

且 $x-\frac{1}{4}\in[0,1]$，所以 $x\in\left[\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right]$；

于是 $f\left(x+\frac{1}{4}\right)+f\left(x-\frac{1}{4}\right)$ 的定义域为 $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$.

7. 在下列函数定义域内任意点 x 处，自变量有了改变量 Δx 后，求函数的改变量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$：

(1) $f(x)=C$（C 是常数）.　(2) $f(x)=x^2$.

(3) $f(x)=\sqrt{x}$.　　(4) $f(x)=e^x$.

(5) $f(x)=\sin x$.

解：(1) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = C - C = 0$.

(2) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

$$= (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2.$$

(3) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

$$= \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}.$$

(4) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1)$.

(5) $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x$

$$= 2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

练　习　1-3

1. 讨论下列函数在指定区间的增减性：

(1) $f(x) = 1 - 2x$.　　$x \in (-\infty, +\infty)$.

(2) $f(x) = 3^{x-1}$，　　$x \in (0, +\infty)$.

(3) $f(x) = x + \lg x$，　　$x \in (0, +\infty)$.

解：(1) 对$\forall\ x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$ 令 $x_1 < x_2$，则

$f(x_2) - f(x_1) = (1 - 2x_2) - (1 - 2x_1) = 2(x_1 - x_2) < 0$，

所以函数 $f(x) = 1 - 2x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调递减的函数.

解：(2) 对$\forall\ x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 令 $x_1 < x_2$，则

$f(x_2) - f(x_1) = 3^{x_2-1} - 3^{x_1-1} = \frac{1}{3}(3^{x_2} - 3^{x_1}) > 0$.

所以 $f(x) = 3^{x-1}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是单调递增的.

解：(3) 对$\forall\ x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 令 $x_1 < x_2$，则

$f(x_2) - f(x_1) = x_2 + \lg x_2 - (x_1 + \lg x_1)$

$$= (x_2 - x_1) + \lg \frac{x_2}{x_1},$$

由于$\frac{x_2}{x_1} > 1$，所以 $\lg \frac{x_2}{x_1} > 0$，且又由于 $x_2 - x_1 > 0$，于是有 $f(x_2)$

$-f(x_1)>0$,所以 $f(x)=x+\lg x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递增的.

2. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$. (2) $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$.

(3) $f(x)=x|x|$. (4) $f(x)=|x+1|+|x-1|$.

(5) $f(x)=2^x$.

解:(1) $\because f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$,

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{-\sin x}{-x}=\frac{\sin x}{x}=f(x),$$

所以 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 是偶函数.

(2) $\because \quad f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$,

$$f(-x)=\frac{1}{2}(a^{-x}+a^{-(-x)})=\frac{1}{2}(a^{-x}+a^x)$$

$$=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})=f(x),$$

所以 $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x+a^{-x})$ 是偶函数.

(3) $\because f(x)=x|x|$,

$f(-x)=(-x)|-x|=-x|x|=-f(x)$,

所以 $f(x)=x|x|$ 是奇函数.

(4) $\because f(x)=|x+1|+|x-1|$,

$f(-x)=|-x+1|+|-x-1|=|x-1|+|x+1|=f(x)$,

所以 $f(x)=|x+1|+|x-1|$ 是偶函数.

(5) $\because f(x)=2^x$,

$f(-x)=2^{-x}\neq f(x)$, 且 $f(-x)\neq -f(x)$,

所以 $f(x)=2^x$ 是非奇非偶的函数.

3. 下列各函数在指定区间上是否有界?若有界,求出它的一个界:

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$，在 $x\in(0,1)$ 和 $x\in[1,2]$ 上.

(2) $f(x)=\text{arctg}\ x$，在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 上.

(3) $f(x)=1-\arcsin x$，在 $x\in[-1,1]$ 上.

(4) $f(x)=x^2$，在 $x\in(-1,0]$ 上.

解：(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$在 $(0,1)$ 上无界，在 $[1,2]$ 上有界，界为 1，即$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$.

(2) $f(x)=\text{arctg}\ x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，界为$\dfrac{\pi}{2}$，即$|\text{arctg}\ x|<\dfrac{\pi}{2}$.

(3) $f(x)=1-\arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上有界，界为 $1+\dfrac{\pi}{2}$，即$|1-\arcsin x|\leqslant 1+\dfrac{\pi}{2}$，这里的 $\arcsin x$ 只考虑主值区间.

(4) $f(x)=x^2$ 在 $(-1,0]$ 上有界，界为 1，即$|x^2|<1$.

练　习　1-4

1. 求由所给函数复合而成的函数：

(1) $y=u^2$，$u=\cos x$.

(2) $y=\ln u$，$u=\sin x$.

(3) $y=\arccos u$，$u=e^v$，$v=\sqrt{x}$.

(4) $y=2^u$，$u=v^2$，$v=\text{arctg}\ x$.

解：(1) $y=u^2$，$u=\cos x$，则

$y=\cos^2 x$.

(2) $y=\ln u$，$u=\sin x$，则

$y=\ln\sin x$.

(3) $y=\arccos u$，$u=e^v$，$v=\sqrt{x}$，则

$y=\arccos e^{\sqrt{x}}$.

(4) $y=2^u$，$u=v^2$，$v=\operatorname{arctg} x$，则

$y=2^{\operatorname{arctg}^2 x}$.

2. 指出下列各函数是由哪些简单函数复合而成的：

(1) $y=\sin^2(x^3+1)$.　　(2) $y=e^{\sin\sqrt{x^2+1}}$.

(3) $y=\ln\cos e^x$　　(4) $y=(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}}$.

(5) $y=\arccos\sqrt{\ln(x^2-1)}$.

解：(1) $y=\sin^2(x^3+1)$，

$y=u^2$，　$u=\sin v$，　$v=x^3+1$.

(2) $y=e^{\sin\sqrt{1+x^2}}$.

$y=e^u$，　$u=\sin v$，　$v=\sqrt{w}$，　$w=1+x^2$.

(3) $y=\ln\cos e^x$，

$y=\ln u$，　$u=\cos v$，　$v=e^x$

(4) $y=(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}}$.

$y=u^v$，　$u=\operatorname{tg} x$，　$v=\operatorname{arctg} w$　$w=\sqrt{t}$，

$t=x-1$.

(5) $y=\arccos\sqrt{\ln(x^2-1)}$.

$y=\arccos u$，$u=\sqrt{v}$，$v=\ln w$，$w=x^2-1$.

练　习　1-5

1. 作出下列各分段函数的图形：

(1) $y=\begin{cases}-1, & x<0;\\ 0, & x=0;\\ 1, & x>0.\end{cases}$　　(2) $y=|\sin x|$.

(3) $y=|x|$.　　(4) $y=\begin{cases}1-|x|, & |x|\leqslant 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$

解：（1）

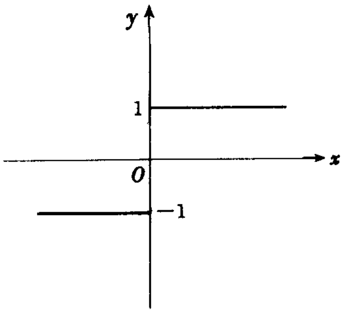


图 1-11

（2）

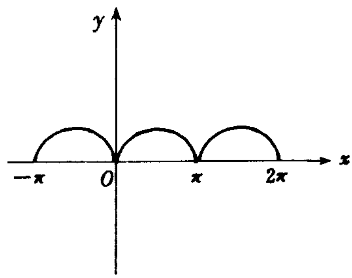


图 1-12

（3）

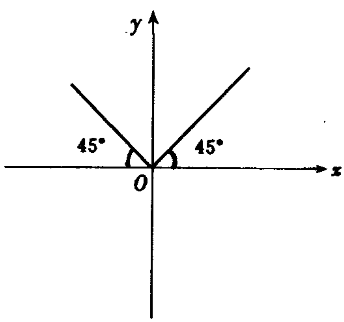


图 1-13

（4）

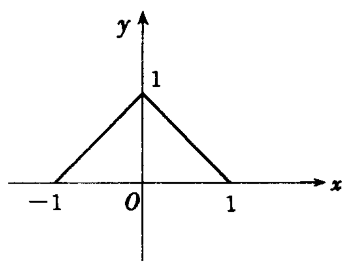


图 1-14

（4）题的分段函数还可写成 $y=\begin{cases}0, & x>-1;\\ 1+x, & -1\leqslant x\leqslant 0;\\ 1-x, & 0<x\leqslant +1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$

2. 用分段函数表示下列各函数：

（1）$y=2|x|+3$.　　　　（2）$y=5-|2x-1|$.

解：

(1) $y=\begin{cases}3-2x, & x<0;\\ 3, & x=0;\\ 2x+3, & x>0.\end{cases}$ (2) $y=\begin{cases}2x+4, & x\leqslant\frac{1}{2};\\ 5, & x=\frac{1}{2};\\ 6-2x, & x>\frac{1}{2}.\end{cases}$

练 习 1-6

1. 某厂每天生产 x 件产品的总成本 $C(x)=x^2+12x+100$（元），又知每件产品的销售价格为 40 元，求利润函数.

解：设利润函数为 $R(x)$，则

$$\begin{aligned}R(x)&=Px-C(x)\\&=40x-x^2-12x-100\\&=-x^2+28x-100\ (\text{元}).\end{aligned}$$

2. 设需求函数 $Q=-20+3P$，供给函数 $Q=220-5P$（P 为价格），试求市场的均衡价格 P.

解：达到均衡时，需求量应与供给量相等，所以

$-20+3P=220-5P$，解得 $8P=240$，$P=30$.

3. 某产品年产量为 x 台，每台售价 200 元，当年产量在 500 台以内时，可以全部售出，当年产量超过 500 台时，经广告宣传又可多售出 200 台，平均每台广告费为 20 元，生产再多，本年就售不出去了，试求出本年的销售总收入 R 与年产量 x 的函数关系.

解：设销售总收入为 $R(x)$，

$$R(x)=\begin{cases}200x, & 0<x\leqslant 500;\\ 180x+100000, & 500<x\leqslant 700;\\ 136000, & x>700.\end{cases}$$