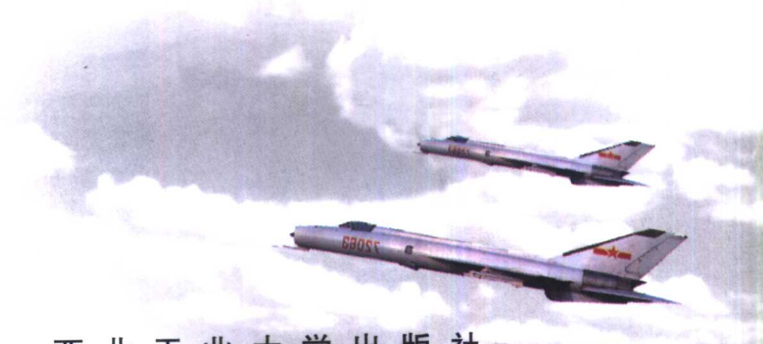
工科课程提高与应试丛书

- 涵盖课程重点及难点
- 精设典型题详解及评注
- 选配课程考试模拟及全真试卷

潘高田 编著

随机过程

典型题解析及自测试题



西北工业大学出版社

工科课程提高与应试丛书

随机过程
典型题解析及自测试题

潘高田　编著

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书分为四部分。首先是对课程内容的基本理论与要求简要介绍，其次是例题选解，然后是习题，并附有简单答案，最后给出了自测试题。阅读本书，对工科研究生和理工科本科高年级学生，在进行随机过程的理论研究和信号分析与处理的应用研究时，具有一定的帮助。

本书叙述简洁，内容丰富，可作为理工科研究生和本科高年级学生学习随机过程课程的辅导书，也可供科技工作者参考。

图书在版编目（CIP）数据

随机过程典型题解析及自测试题/潘高田编著．—西安：西北工业大学出版社，2002.10
（工科课程提高与应试丛书）
ISBN 7-5612-1536-3

Ⅰ．随… Ⅱ．潘… Ⅲ．随机过程—高等学校—解题
Ⅳ．0211.6-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 055112 号

出版发行：西北工业大学出版社
通信地址：西安市友谊西路 127 号 邮编：710072 电话：029-8493844
网　　址：http://www.nwpup.com
印 刷 者：陕西友盛印务有限责任公司
开　　本：850 mm×1 168 mm 1/32
印　　张：8.875
字　　数：221 千字
版　　次：2002 年 10 月第 1 版 2002 年 10 月第 1 次印刷
印　　数：1～6000
定　　价：12.00 元

前 言

随机过程是高等院校理工科高年级本科生和工科研究生的一门重要的基础理论课。自 20 世纪 80 年代以来，随机过程的数学思想与计算方法已广泛而迅速地应用于生物、医学、工业工程、财贸金融、电子工程、信号分析与处理以及计算机科学中。这门课程的思想和方法已经日益成为自然科学和高新技术领域不可缺少的知识。

笔者多年给工科研究生讲授随机过程课，深深感到随机过程课程内容比较抽象，有其独特的思维方式和处理问题的方法。初学者往往感到内容看明白了，但题目不会做。特别对在本科时概率论学得比较少的专业，似乎更困难一些。而学理科的人运用工科研究生对随机过程中实际问题的处理方法和思想时，有时也感到困惑。

随机过程教材无论是针对理科还是工科的，在市场上都很少，在为数不多的教材中的题目有的作者给了简单的答案，有的根本没有答案。由于随机过程题目比较难做，在给出的一些答案中，个别的也有一些小纰漏。笔者在教学的过程中，当动手做一些题目，详细推导时，才发现问题。为此基于我多年教学经验，从各种随机过程教材中选编了一些具有典型性的题目，使之内容丰富，有难有易，由浅入深，并将学生容易犯错误的题目给出了详细的解答及说明。力求使读者在阅读本书时，能有益于掌握随机过程的基本概念和处理问题的思想和方法，同时通过做题培养提高学生解决问题的能力。相信本书也会对信号分析与处理、电子工程等专业的研究生有所帮助。

本书可作为理工科研究生和本科高年级学生学习随机过程的辅导书，也可供科技工作者参考。

在本书的编写过程中，受到胡家义老师的热情指点，在此深表谢意。

由于作者水平有限，在编写中难免有疏漏和不妥之处，恳请读者指正。

编　者

2002年5月于北京装甲兵工程学院

目　　录

第一章　概率论补充知识

工科本科生在概率统计学习过程中，对随机变量的特征函数、多元正态分布和条件数学期望、连续型全概公式等接触很少，有的甚至不学。为了使工科研究生更好地学好后续课程——随机过程，我们将此内容简要地给以介绍，并针对有关问题，举些例子，给出必要的习题，以加强对基础知识的掌握，有利于后续课程的学习。

一、特征函数

(一) 内容提要

1. 一元特征函数

(1) 定义：设随机变量 X 的分布函数为 $F_X(x)$，则称 $\varphi_X(t)=E[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}]=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}F_X(x)$ 为 X 的特征函数。其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 为虚数单位。t 为任意实数。

因为对任意的 $t\in\mathbf{R}$，$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}|=1$，所以 $E[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}]$ 总是存在的。

如果 X 是离散型随机变量，其分布律为 $P\{X=x_k\}=p_k,k=1,2,\cdots$ 则 $\varphi_x(t)=E[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}]=\sum\limits_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx_k}p_k$。

如果 X 是连续型随机变量，其概率密度为 $f(x)$，则

$$\varphi_x(t)=E[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}]=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}f(x)\mathrm{d}x$$

(2) 特征函数性质:

① 设 $\varphi(x)$ 是特征函数,则 $\varphi(0)=1$, $|\varphi(t)|\leqslant 1$, $\varphi(-t)=\overline{\varphi(t)}$。

② 特征函数 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 一致连续。

③ 特征函数 $\varphi(x)$ 是非负定的。即对任意的自然数 n,任意的实数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$,及任意的复数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(t_i-t_j)a_i\overline{a_j}\geqslant 0$$

④ 线性性质。设 a,b 是常数,$Y=aX+b$,则

$$\varphi_Y(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}bt}\varphi_X(at)$$

⑤ 如果 X 与 Y 相互独立,则 $\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)$。

推广:如果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立,则

$$\varphi_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(t)=\varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t)\cdots\varphi_{X_n}(t)$$

⑥ 如果 X 的 n 阶矩存在,则它的特征函数 n 次可导,且对 $k\leqslant n$ 有 $\varphi_X^{(k)}(0)=\mathrm{i}^kE(X^k)$。

⑦ (Bochner—辛钦定理)函数 $\varphi(x)$ 是特征函数的充要条件为:$\varphi(x)$ 是连续非负定的,且 $\varphi(0)=1$。

⑧ (惟一性定理)随机变量的分布函数与特征函数是一一对应的。即可相互惟一确定。特别的,若特征函数 $\varphi(x)$ 绝对可积,则相应的分布函数是连续型的,且有 $\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}f(x)\mathrm{d}x$, $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\varphi(t)\mathrm{d}t$ 即在特征函数绝对可积的条件下,概率密度函数与特征函数构成一个 Fourier 变换对。

对离散型随机变量的特征函数,如果特征函数 $\varphi(x)$ 可表示成 $\varphi(x)=\sum_k p_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx_k}$,其中 x_k 为实数,p_k 为正数,且 $\sum_k p_k=1$ 则 $P\{X=x_k\}=p_k$, $k=1,2,\cdots$。

对于一元特征函数，要会求一些常用的随机变量的特征函数；熟记一些重要分布的特征函数。譬如正态分布的特征函数 $\varphi(x)=\exp(\mathrm{i}\mu t-\frac{\sigma^2 t^2}{2})$ 等；会利用性质判定 $\varphi(x)$ 是否为特征函数；会利用特征函数求相应随机变量的各阶矩；会利用特征函数求多个独立随机变量和的分布。

2. 多元特征函数

（1）定义：设 n 维随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$ 的分布函数为 $F(x_1,x_2,\cdots,x_2)$，记 $\boldsymbol{T}=(t_1,t_2,\cdots,t_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 定义 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$ 的特征函数为

$$\varphi_X(t_1,t_2,\cdots,t_n)=E[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_1x_1-t_2x_2-\cdots+t_nx_n)}]=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_1x_1-t_2x_2-\cdots+t_nx_n)}\mathrm{d}F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_x(\boldsymbol{T})=E[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}}]=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}}\mathrm{d}F(\boldsymbol{X})\qquad（矩阵表示）$$

（2）性质：

① $\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中一致连续且 $|\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)|\leqslant\varphi(0,0,\cdots,0)=1$，$\varphi(-t_1,-t_2,\cdots,-t_n)=\overline{\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)}$

②（线性性质）设 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$ 的特征函数为 $\boldsymbol{\Phi}_X(\boldsymbol{X})=\varphi_X(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{A}$ 为一 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$，则 m 维随机向量 $\boldsymbol{Y}=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_m)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{b}$ 的特征函数为 $\boldsymbol{\Phi}_Y(\boldsymbol{U})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}\boldsymbol{\Phi}_X(\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$，

特别地，如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b$ 为任意常数则 $Y=a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n+b$ 的特征函数为 $\varphi_Y(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}bt}\varphi_X(a_1t,a_2t,\cdots,a_nt)$

更特别地，如果 $Y=X_1+X_2+\cdots+X_n$，它的特征函数为 $\varphi_Y(t)=\varphi_X(t,t,\cdots,t)$

③ 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的特征函数为 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，而对

$k \leqslant n$，k 维随机向量的特征函数为

$$\varphi_{(X_1,X_2,\cdots,X_k)}(t_1,t_2,\cdots,t_k)=\varphi(t_1,t,\cdots,t_k,0,0,\cdots,0)$$

④ 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的特征函数为 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，而 X_k 的特征函数为 $\varphi_{X_k}(t)$，$k=1,2,\cdots,n$，则 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 相互独立的充要条件为 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\varphi_{X_1}(t_1)\varphi_{X_2}(t_2)\cdots\varphi_{X_n}(t_n)$

⑤ 如果 $E[X_1^{k_1}\ X_2^{k_2}\cdots\ X_n^{k_n}]$ 存在，则

$$E[X_1^{k_1}\ X_2^{k_2}\cdots\ X_n^{k_n}]=$$

$$\mathrm{i}^{\sum_{l=1}^{n}k_l}\left[\frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n}\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)}{\partial t_1^{k_1}\partial t_2^{k_2}\cdots\partial t_n^{k_n}}\right]\Bigg|_{t_1=t_2=\cdots=t_n=0}$$

(二) 典型题解析

例 1.1.1 设随机变量 X 服从 $(0-1)$ 分布，即 $p_k=p\{X=k\}=p^kq^{1-k}$，$k=0,1$ 则特征函数为

$$\varphi_X(t)=\sum_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}tk}p_k=q+p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

例 1.1.2 设随机变量 X 服从二项分布，即 $p_k=p\{X=k\}=C_n^kp^kq^{n-k}$，$k=0,1,\cdots,n$ 则特征函数为

$$\varphi_X(t)=\sum_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}tk}p_k=\sum_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}tk}C_n^kp^kq^{n-k}=(q+p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^n$$

例 1.1.3 设随机变量 X 服从 Poisson 分布，即 $p_k=p\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$，$k=0,1,\cdots,n$ 则特征函数为

$$\varphi_X(t)=\sum_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}tk}p_k=\sum_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}tk}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}=$$

$$\sum_k(\lambda\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\frac{1}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1)}$$

例 1.1.4 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求 X 的特征函数。

解 因为 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，所以先求 Y 的特征函数。

$$\varphi_Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx-\frac{x^2}{2}}dx$$

因为 $\left|ixe^{itx-\frac{x^2}{2}}\right|\leqslant|x|e^{-\frac{x^2}{2}}$，而且 $\int_{-\infty}^{\infty}|x|e^{-\frac{x^2}{2}}dx<\infty$，故有

$\varphi'_Y(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}ixe^{itx-\frac{x^2}{2}}dx$，易见 $it\varphi_Y(t)+i\varphi'_Y(t)=$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(it-x)e^{itx-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{itx-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0$，故得微分方程

$t\varphi_Y(t)+\varphi'_Y(t)=0$，解方程得 $\varphi_Y(t)=Ce^{-\frac{t^2}{2}}$，利用 $\varphi_Y(0)=1$，定出 $C=1$，所以 $\varphi_Y(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$，由 $X=\sigma Y+\mu$ 及特征函数的线性性质得

$$\varphi_X(t)=e^{i\mu t}\varphi_Y(\sigma t)=\exp(i\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2})$$

评注：求随机变量的特征函数：(1)一般按定义求解；(2) 对一些特殊的分布，可化为微分方程求解；(3) 用 Fourier 变换去求解。

例 1.1.5　设随机变量 X 在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上服从均匀分布，$Y=\cos X$，利用特征函数求 Y 的概率密度。

解　X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{\pi}$，$x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$$\Phi_Y(t)=E(e^{itY})=E(e^{it\cos X})=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{it\cos x}\frac{1}{\pi}dx=$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{it\cos x}\frac{1}{\pi}dx\qquad(偶函数)$$

令 $u=\cos x$，$du=-\sin x dx=-\sqrt{1-u^2}dx$

所以 $\varphi_Y(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{itu}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u$，利用特征函数与分布函数一一对应的惟一性定知道 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\ 0<y<1$$

例 1.1.6 设随机变量 X 的特征函数为 $\varphi(t)=\frac{1}{1+t^2}$，试求其概率密度。

解 法① $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-itx}\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos tx}{1+t^2}\mathrm{d}t$ 因为 $\cos tx$ 为偶函数，所以 $f(x)$ 是偶函数，不妨设 $x>0$，$f'(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t\sin tx}{1+t^2}\mathrm{d}t$。因为 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t\sin tx}{1+t^2}\mathrm{d}t$ 绝对可积，所以求导与积分号互换是合理的。又利用著名的狄利克雷积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin tx}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$ 得

$$2\pi f'(x)+\frac{\pi}{2}=\int_{-\infty}^{\infty}\sin tx\left(\frac{-t}{1+t^2}+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin tx}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

两边再对 x 求导得

$2\pi f''(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos tx}{1+t^2}\mathrm{d}t=2\pi f(x)$，求解 $f''(x)=f(x)$ 得 $f(x)=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{-x}$ 因为 $f(x)$ 为概率密度，所以 $x\to\infty$ 时，$f(x)\to0$，所以 $C_1=0$，由因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(x)=C_2e^{-|x|}$。又 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$ 所以 $C_2=\frac{1}{2}$，$f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$。

法②　可利用复变函数的留数定理做。

$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}\frac{1}{1+t^2}dt$ 是 x 的偶函数，不妨设 $x<0$，则 $-x>0$，

利用公式 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}\frac{1}{1+t^2}dt=2\pi i\mathrm{Res}[e^{itz}\frac{1}{1+z^2}]_{z=i}=2\pi ie^{-x}\frac{1}{2i}=\pi e^{-x}$，故

$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$。

二、多维正态分布

（一）内容提要

1. 多维正态分布的定义

设 $\boldsymbol{B}$ 是一个 n 阶实正定矩阵，$\boldsymbol{B}^{-1}$ 是它的逆矩阵，$\boldsymbol{\mu}$ 是一实值 n 维向量，$\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 则以 $f(X)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n|\boldsymbol{B}|^{\frac{1}{2}}}\exp\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})\}$ 为概率密度的概率分布，称为 n 维正态分布，记为 $\boldsymbol{X}\sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{B})$。

2. 多维正态分布的特征函数

设 $\boldsymbol{X}\sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{B})$。则其特征函数为

$\boldsymbol{\Phi}_X(\boldsymbol{T})=\exp(i\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}-\frac{1}{2}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{T})$，这里 $\boldsymbol{T}=(t_1,t_2,\cdots,t_n)^{\mathrm{T}}$

3. 多维正态分布的性质

(1) 设 $\boldsymbol{X}\sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{B})$，则其任意子向量 $(X_{k_1},X_{K_2},\cdots,X_{k_m})^{\mathrm{T}}$，$(m\leqslant n)$ 服从 m 维正态分布 $\boldsymbol{N}(\tilde{\boldsymbol{\mu}},\tilde{\boldsymbol{B}})$，这里 $\tilde{\boldsymbol{\mu}}=(\tilde{\mu}_{k_1},\tilde{\mu}_{k_2},\cdots,\tilde{\mu}_{k_m})^{\mathrm{T}}$，$(m\leqslant n)$，而 $\tilde{\boldsymbol{B}}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 中保留第 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 行和列的 m 阶方阵。特别的 $X_k\sim N(\mu_k,b_{kk})$。

(2) 设 n 维向量 $\boldsymbol{X}\sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{B})$，则 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别为 n 维向量 $\boldsymbol{X}$ 的

均值向量和协方差矩阵。

(3) 设 n 维向量 $\boldsymbol{X}\sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{B})$，则 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立的充要条件为它们两两不相关。

(4) n 维向量 $\boldsymbol{X}\sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{B})$ 的充要条件为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的任意非零线性组合 $Y=\sum\limits_k l_k X_k$ 服从一维正态分布，

$$Y\sim N(\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l},\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{l}),\boldsymbol{l}=(l_1,l_2,\cdots,l_n)^{\mathrm{T}}$$

(5) 设 n 维向量 $\boldsymbol{X}\sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{B})$，而 $\boldsymbol{C}$ 为任一 $m\times n$ 矩阵，则 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}$ 服从 m 维正态分布，$\boldsymbol{X}\sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})$。这里 $\boldsymbol{C}$ 的秩为 m。

该性质表明正态变量在线性变换下还是正态变量，此性质称为正态变量的线性变换不变性。

(6) 设四维随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,X_3,X_4)^{\mathrm{T}}\sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{O},\boldsymbol{B})$，则

$$E(X_1X_2X_3X_4)=E(X_1X_2)E(X_3X_4)+E(X_1X_3)E(X_2X_4)+E(X_1X_4)E(X_2X_3)$$

(二) 典型题解析

例 1.2.1 设四维随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,X_3,X_4)^{\mathrm{T}}\sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{B})$，其中 $\boldsymbol{\mu}=(1,-1,0,1)^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{B}_X=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$$

(1) 求 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_4)^{\mathrm{T}}$ 的分布。

(2) 求 $\boldsymbol{Y}=(2X_1,X_2+X_3,X_3-X_4)^{\mathrm{T}}$ 的分布。

(3) 写出 $\boldsymbol{Y}$ 的特征函数。

解 (1) $\boldsymbol{X}=(X_1,X_4)^{\mathrm{T}}$ 服从均值向量为 $\boldsymbol{\mu}=(1,1)^{\mathrm{T}}$ 协方差矩阵为 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$(划去 $\boldsymbol{B}_X$ 中的第二、三列和第二、三行后得到

的二阶矩阵)的二维正态分布。

(2) 因为 $\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\\Y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\\X_4\end{pmatrix}=\boldsymbol{CX}$,$\boldsymbol{C}$ 的秩为 3,所以 $\boldsymbol{Y}$ 服从三维正态分布。$\boldsymbol{Y}\sim N(\boldsymbol{\mu}_Y,\boldsymbol{B}_Y)$,其中 $\boldsymbol{\mu}_Y=\boldsymbol{C\mu}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}_Y=\boldsymbol{CB}_X\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}8&2&0\\2&6&2\\0&2&2\end{pmatrix}$。

(3) $\Phi_Y(\boldsymbol{T})=\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\mu}_Y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}-\frac{1}{2}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_Y\boldsymbol{T})=2t_1-t_2-t_3-\frac{1}{2}(8t_1^2+$

$$6t_2^2+2t_3^2+4t_1t_2+4t_2t_3)$$

例 1.2.2　设 X_1,X_2,X_3 独立同分布于 $N(0,1)$,证明 $Y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(X_1-X_2)$,$Y_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(X_1+X_2-2X_3)$,$Y_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(X_1+X_2-X_3)$也独立同分布于 $N(0,1)$。

证明:$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$,其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{-2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$可算出 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3$,$(X_1,X_2,X_3)$的协方差阵为单位矩阵,由性质(5)知道 $\boldsymbol{Y}$ 服从三维正态分布,经计算其协方差阵为 $\boldsymbol{CIC}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$,$\boldsymbol{\mu}_Y=\boldsymbol{C\mu}=\boldsymbol{O}$ 故 $\boldsymbol{Y}\sim N(\boldsymbol{O},\boldsymbol{I})$,$Y_1,Y_2,Y_3$ 独立同分布于 $N(0,1)$。

评注:线性变换后独立的随机变量个数等于 $\boldsymbol{C}$ 的秩。

例 1.2.3　设$(X_1,X_2)^{\mathrm{T}}\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,$Z=\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}+$

$\dfrac{X_2-\mu_2}{\sigma_2}$，求随机变量 Z 的特征函数与分布密度。

解 $Z=\dfrac{X_1}{\sigma_1}+\dfrac{X_2}{\sigma_2}-\dfrac{\mu_1}{\sigma_1}-\dfrac{\mu_2}{\sigma_2}$，利用多元特征函数性质得

$$\varphi_Z(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\frac{\mu_1}{\sigma_1}+\frac{\mu_2}{\sigma_2})t}\Phi_X(\frac{t}{\sigma_1},\frac{t}{\sigma_2})\text{而}$$

$$\Phi_X(T)=\exp(\mathrm{i}(\mu_1 t_1+\mu_2 t_2)-\frac{1}{2}(\sigma_1^2 t_1^2+2\sigma_1\sigma_2 t_1 t_2\rho+\sigma_2^2 t_2^2))$$

故 $\varphi_Z(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\frac{\mu_1}{\sigma_1}+\frac{\mu_2}{\sigma_2})t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\mu_1}{\sigma_1}+\frac{\mu_2}{\sigma_2})t-\frac{1}{2}(2+2\rho)t^2}=\mathrm{e}^{-(1+\rho)t^2}$ 由惟一性定理知道 $Z\sim N(0,2(1+\rho))$

评注：由于用了二维正态分布密度和其特征函数的对应关系以及二维特征函数的性质，从而大大简化了本例的计算。

例 1.2.4 已知随机变量 X 和 Y 服从二维正态分布，其概率密度为 $f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\{-\dfrac{1}{2(1-r^2)}[\dfrac{x^2}{\sigma_1^2}-\dfrac{2rxy}{\sigma_1\sigma_2}+\dfrac{y^2}{\sigma_2^2}]\}$，求 X 和 Y 取不同符号的概率。

解 依题意求 $p\{XY<0\}=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+$

$$\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x,\ \text{令}\ u=\frac{x}{\sigma_1},v=\frac{y}{\sigma_2}$$

$$p\{XY<0\}=\frac{1}{\pi\sqrt{1-r^2}}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\exp\{-\frac{1}{2(1-r^2)}[u^2-2ruv+v^2]\}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=$$

$$\frac{1}{\pi\sqrt{1-r^2}}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\exp\{-\frac{1}{2}[(\frac{u-rv}{\sqrt{1-r^2}})^2-\frac{1}{2}v^2]\}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}R\mathrm{d}R\int_{-\arccos r}^{0}\exp\{-\frac{R^2}{2}\}\mathrm{d}\theta=\frac{\arccos r}{\pi}$$