实用多目标最优化

胡毓达 著

上海科学技术出版社

实用多目标最优化

胡毓达 著

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书从实用的角度系统地向读者介绍多目标最优化的数学模型、基本理论和求解方法。主要是为准备掌握多目标最优化方法去解决各种实际问题的读者而写的。

本书可供理、工、管理以及财经各有关专业的大学生或研究生作为相应课程的教材或参考书。也可供从事最优化研究的人员、有关部门的决策者、管理和经济工作者以及广大工程技术人员作参考。

实用多目标最优化

胡毓达 著

责任编辑 赵序明

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行 商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 9.5 字数 297,000

1990 年 4 月第 1 版 1990 年 4 月第 1 次印刷

印数 1—4,000

ISBN 7-5323-0781-6/O·84 定价: 4.95 元

序　言

进行一项复杂的工作往往有许多个方案可供选择，人们为了取得好的效果，总是要设法按某种标准从众多可供选择的方案中挑选出最好的或满意的方案。若所考虑的问题只有一个目标作为选择好坏的标准，人们应设法选取使这一目标在某种意义下达到“最优”的最优方案。这类问题就是通常的（单目标）最优化问题。但是在实践中，更多地会遇到需要考虑使多个目标（标准）都尽可能好的问题。例如，设计一种新产品，人们常常希望在一定条件下能选择哪种同时是质量好，产量高和利润大的方案。这类在给定条件下同时要求多个目标都尽可能好的最优化问题，就是所谓多目标最优化问题。

研究多目标最优化问题的学科称为多目标最优化或多目标规划，它是数学规划的一个重要分支。用数学的语言来说，多目标最优化的研究对象是：多于一个的数值目标函数在给定区域上的最优化（极小化或极大化）问题。由于多个数值目标可用一个向量目标表示，因此，多目标最优化问题有时也叫做向量极值问题。多目标最优化的理论和方法，在诸如经济规划，计划管理，金融决策，能源开发，工程设计，农业种植，卫生保健以及军事科学等领域有着大量的应用。在经济学，对策论，系统工程和控制论等学科的研究中，也常常要涉及到多目标最优化问题。

多目标最优化的思想可以说是萌芽于1776年经济学中的效用理论。1896年，经济学家 V. Pareto 首先在经济平衡的研究中提出了多目标最优化问题，引进了被称为 Pareto 最优的概念。1947年，数学家 J. Von Neuman 和 O. Morgenstern 在对策论的著作中提及多目标决策问题，引起人们对于多目标最优化研究的重视。1951年，数理经济学家 T. C. Koopmans 从生产和分配的效率分

析中考虑了多目标最优化问题，引入有效解的定义并得到某些基本结果。他的工作为多目标最优化学科奠定了初步的基础。本世纪60年代以来，人们设计了不少求解多目标最优化问题的处理方法，并运用它们去解决各种实际问题，取得了效果。1973年，J. L. Cochrance 和 M. Zeleny 编集出版了第一本《多目标决策》的书，为多目标最优化学科的形成起了推动作用。此后，关于多目标最优化的研究，不论在理论或应用方面都迅速、蓬勃地开展起来，有关的著作也与日俱增了。

自70年代以来，我国在多目标最优化的理论研究，应用研究和人才培养各方面都取得了不少成绩。在目前，特别是多目标最优化的应用已越来越引起各级决策人员和广大的管理人员、经济学者、科技工作者的关注和兴趣，应用范围日益扩大，解决问题的规模也愈加大型化。多目标最优化作为进行重大决策和解决实际课题的强有力的手段和有效的工具，必将在我国的经济建设中发挥重要的作用。

本书从实用的角度系统地向读者介绍多目标最优化的数学模型、基本理论和求解方法。主要是为准备掌握多目标最优化方法去解决各种实际问题的读者而写的。为了使读者能理解各种求解方法的实质，我们在叙述求解思想和介绍解法步骤的同时，对于每一个方法都从理论上阐明其所求得的解的意义。本书可供理、工、管理以及财经各有关专业的大学生或研究生作为相应课程的教材或参考书。也可供从事最优化研究的人员、有关部门的决策者、管理和经济工作者以及广大工程技术人员作参考。我们希望读者在学习了它之后，不仅对多目标最优化的实用方法能有基本的掌握，并且能够利用书中所介绍的不同处理方法去解决实践中出现的各种多目标最优化的课题。

本书的第1章介绍多目标最优化的研究对象，主要是通过实例归结出多目标最优化的几类数学模型。第2章阐述有关的基本概念和基本理论，是以后各章要介绍的各种多目标最优化方法的基础。从第3章开始，按求解的途径或被求解模型的类型来安排

介绍求解的方法。第3章至第5章介绍求解一般多目标最优化模型的方法，其中第3章叙述最基本的通过评价函数来求解的方法，第4章是几个典型的人机对话式的交互规划方法，第5章是求解同时具有极小化和极大化的混合模型的方法。第6章，讨论分层多目标最优化模型的求解。最后在第7章，介绍了各个目标均要求逼近各自目标值的目标规划模型的求解方法。

学习多目标最优化一般需要具有一定的数值(单目标)最优化的基础。为了使更多的读者能够顺利地阅读本书，以掌握多目标最优化的基本内容和处理方法，本书仅要求读者具备线性规划和非线性规划的最初步的知识。为了便于读者应用和参考，在本书的附录1中提供了在多目标最优化方法中经常用到的几个基本的数值最优化方法的 FORTRAN 计算机程序。把它们用于本书中所介绍的某些方法，便可进行实际求解运算。在附录2中，给出了一些比较典型和常用的多目标最优化方法的 FORTRAN 程序。在学习了相应方法的基础上，读者就可以选用它们去解决在实践中遇到的实际的多目标最优化课题了。

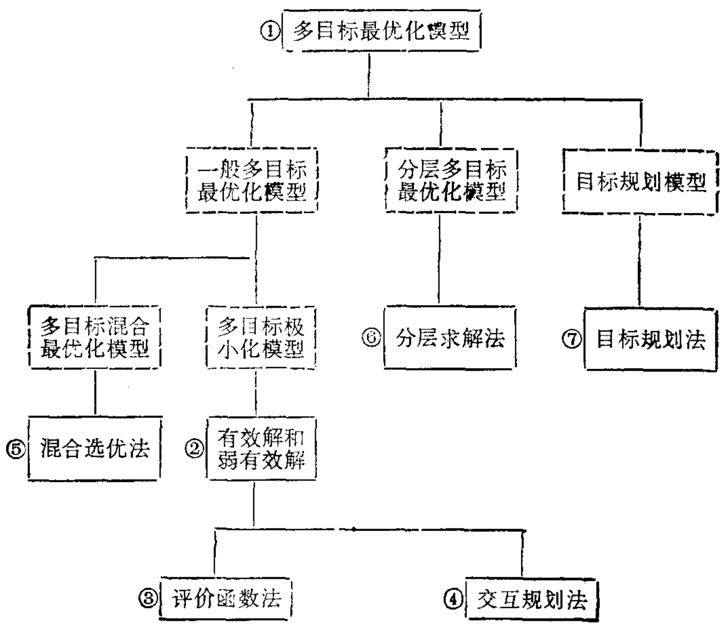
本书的写作得到了上海科学技术大学数学系张连生教授的热心支持，他仔细地阅读了本书的原稿，提出了宝贵意见。上海交通大学应用数学系王晓敏同志细心地协助我编制和试算了本书附录中的计算机程序，肖柳青和马刚同志帮助誊清了原稿。在此，作者一并表示衷心的感谢。另外，要感谢孙秀文同志，她曾分担了整理和抄写原稿的大量工作。最后，还要对上海科学技术出版社赵序明同志的热情支持和付出的细致劳动表示诚挚的感谢。

限于笔者的水平，书中难免存在缺点或错误，恳望读者不吝批评指正。

胡毓达

1987年9月于上海交通大学

各章间的关系表



注：表中①表示第1章，②表示第2章，其他依此类推。

目　　录

第1章　　多目标最优化模型

这一章中，先介绍多目标最优化这一学科所要研究的问题及其数学表达形式。

与单目标最优化不同的是，多目标最优化问题有着多种提法和模式。本章将先讨论几个实例，然后归结出三类常见的描述多目标最优化问题的数学模式。这些模式，即所谓多目标最优化的数学模型。

§1　多目标最优化问题举例

在实际问题中，常常需要研究在某些限制条件下，同时考虑多个目标(指标)的最优化问题。下面我们来看几个例子。

[例 1]　**生产计划问题**　某工厂生产 $n(\geqslant 2)$ 种产品：1号品，2号品，…，n 号品。

已知：该厂生产 $i(i=1,\cdots,n)$ 号品的生产能力是 a_i 吨/小时；

生产一吨 i $(i=1,\cdots,n)$ 号品可获利润 α_i 元；

根据市场预测，下月 i 号品的最大销售量为 b_i $(i=2,\cdots,n)$ 吨；

工厂下月的开工工时能力为 T 小时；

下月市场需要尽可能多的1号品。

问题：应如何安排下月的生产计划，在避免开工不足的条件下，使

工人加班时间尽量地少；

工厂获得最大利润；

满足市场对1号品的尽可能多的需求。

为制订下月的生产计划，设该厂下月生产 i 号品的时间为

$x_i(i=1, \cdots, n)$小时。

根据所给的已知条件，我们可以把问题中希望追求的三个目标用数量关系描述如下：

(1) 因为下月用 x_i 小时生产 i 号品($i=1, \cdots, n$)，故工厂的生产总工时为 $\sum_{i=1}^{n} x_i$ 小时，工人的加班时间为 $\sum_{i=1}^{n} x_i-T$ 小时。为使工人加班时间尽量地少，应要求

$$\text{工人加班时间} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i-T \to \text{最小};$$

(2) 下月该厂生产 i 号品的产量为 $a_i x_i$ 吨，可获利润 $\alpha_i a_i x_i$ 元($i=1, \cdots, n$)，因而工厂总利润为 $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i x_i$ 元。为使该厂获得最大利润，应使

$$\text{总利润} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i x_i \to \text{最大};$$

(3) 下月1号品的产量为 $a_1 x_1$ 吨，故要尽可能多地生产1号品以供应市场的需要，还要使

$$1\text{号品产量} \quad a_1 x_1 \to \text{最大}。$$

此外，由预测得知下月 i 号品的最大销售量为 $b_i(i=2, \cdots, n)$ 吨，所以 i 号品的产量 $a_i x_i$ 要不超过 b_i，即要求有

$$a_i x_i \leqslant b_i, \quad i=2, \cdots, n。$$

为避免工厂开工不足，生产总工时 $\sum_{i=1}^{n} x_i$ 应不低于开工能力 T，即

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant T。$$

当然，生产时间应为非负，故还有

$$x_i \geqslant 0, \quad i=1, \cdots, n。$$

综合上面的讨论，所考虑的生产计划问题可以归为下面具有三个目标的最优化问题：

$$
\begin{cases}
\min\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - T\right) \\
\max \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i x_i \\
\max a_1 x_1 \\
\text{受限制于} \quad b_i - a_i x_i \geqslant 0, \ i=1, \cdots, n。 \\
\qquad\qquad \sum_{i=1}^{n} x_i - T \geqslant 0 \\
\qquad\qquad x_i \geqslant 0, \ i=1, \cdots, n。
\end{cases}
\tag{1-1}
$$

［例 2］ 木梁设计问题 把横截面为圆形的树干加工成矩形横截面的木梁。为使木梁满足一定的规格、应力及强度条件，要求木梁的高度不超过 H，横截面的惯性矩不小于给定值 W，并且横截面的高度要介于其宽度和宽度的 4 倍之间。现问应如何确定木梁的尺寸，可使木梁的重量最轻，并且成本最低。

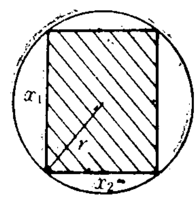


图 1-1

设所设计的木梁横截面的高为 x_1，宽为 x_2（图 1-1）。

为使具有一定长度的木梁重量最轻，应要求其横截面面积 x_1x_2 为最小，即要求

$$x_1x_2 \to \text{最小。}$$

由于矩形横截面的木梁是由横截面为圆形的树干加工而成的，故其成本与树干横截面面积的大小 $\pi r^2 = \pi\left[\left(\frac{x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{2}\right)^2\right]$ 成正比。由此，为使木梁的成本最低还应要求 $\frac{\pi}{4}(x_1^2 + x_2^2)$ 尽可能地小，或即

$$(x_1^2 + x_2^2) \to \text{最小。}$$

另外，要使木梁的高度不超过 H，并且满足给定的应力和强度条件，按问题的要求应有

$$x_1 \leqslant H,$$

$$x_1^2 x_2 \geqslant W,$$

和

$$x_2 \leqslant x_1 \leqslant 4x_2。$$

显然，木梁横截面的高度和宽度应是非负的，所以还要有

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0。$$

根据上面的讨论，确定木梁最优尺寸的问题可归结为下述对两个目标极小化的问题：

$$\begin{cases} \min\ x_1x_2 \\ \min\ (x_1^2+x_2^2) \\ \text{受限制于}\quad H-x_1\geqslant 0 \\ \qquad\qquad\quad x_1^2x_2-W\geqslant 0 \\ \qquad\qquad\quad x_1-x_2\geqslant 0 \\ \qquad\qquad\quad 4x_2-x_1\geqslant 0 \\ \qquad\qquad\quad x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0。\end{cases} \tag{1-2}$$

[例 3] **投资决策问题** 某投资开发公司拥有总资金 A 万元，今有 $n(\geqslant 2)$ 个项目可供选择投资。设投资第 $i(i=1,\cdots,n)$ 个项目要用资金 a_i 万元，预计可得到收益 b_i 万元，问应如何决策投资方案。

一个好的投资方案应该是投资少，收益大的方案。

设
$$x_i=\begin{cases}1, \text{决定投资第 } i \text{ 个项目}, \\ 0, \text{决定不投资第 } i \text{ 个项目},\end{cases} \quad i=1,\ \cdots,\ n,$$

并称它们为投资决策变量。按问题所给的条件，投资第 i $(i=1,\cdots,n)$ 个项目的金额应为 a_ix_i 万元，因而总投资金额为 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i$ 万元。为使投资所用的资金尽可能地小，应使

$$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i \to \text{最小}。$$

同时，为使获得的收益最大，又应要求

$$\sum_{i=1}^{n}b_ix_i \to \text{最大}。$$

此外，由于该公司的总资金为 A 万元，故要有限制条件

$$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i \leqslant A。$$

又因为 x_i $(i=1,\ \cdots,\ n)$ 只能是取 1 或 0 值，所以还要满足

$$x_i(x_i-1)=0,\ i=1,\ \cdots,\ n。$$

综上所述，所考虑的投资决策问题可归为对两个目标中的一个极小化，对另一个极大化的如下的问题：

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \\ \max \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \\ \text{受限制于} \quad A-\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geqslant 0 \\ \qquad\qquad x_i(x_i-1)=0,\ i=1,\ \cdots,\ n。 \end{cases} \tag{1-3}$$

类似上述要考虑多个目标最优化问题的例子还可以举出很多。例如，为制订国家的经济发展规划，在一定条件下就需要考虑以生产、消费、就业、投资回收率等项为目标的多个目标的最优化问题；设计货船，人们通常要考虑选取使船舶的试航速率最大，年货运量最多和运输成本最低等多个目标都尽可能好的方案；为了编制人才培养计划，在某些限制条件下亦需同时考虑以各级人员数额，升调面比率和工资总额等多个目标的最优化问题；为合理地使用医院的血库，也会遇到以血液库存量、血液平均寿命以及血液收集费用等为目标的多个目标的最优化问题；等等。这些例子说明，在实际应用中，具有多个目标的最优化问题是广泛和大量地存在的。

§2 一般多目标最优化模型

在本节中，我们来考察§1中各实例的数量关系的一般形式，抽象出多目标最优化问题的数学模式。

从数学结构来看，§1中几个例子实际上都属于同一类模式。这就是：它们都是考虑在一定限制条件下，多于一个数值目标函数的最优化问题。如果弃去这些例子中各种量的实际意义，而仅仅考虑这些量在问题中所起的作用以及它们之间的关系，我们可以

从这些问题中归纳出以下的共同模式：

$$
\begin{cases}
\min f_1(x_1, \cdots, x_n) \\
\quad \cdots \ \cdots \ \cdots \\
\min f_r(x_1, \cdots, x_n) \\
\max f_{r+1}(x_1, \cdots, x_n) \\
\quad \cdots \ \cdots \ \cdots \\
\max f_m(x_1, \cdots, x_n) \\
\text{s. t. } g_j(x_1, \cdots, x_n) \geqslant 0, \ j=1, \cdots, p \\
\qquad h_k(x_1, \cdots, x_n)=0, \ k=1, \cdots, q。
\end{cases}
\tag{1-4}
$$

上述的(1-4)表示，对 r 个数值函数 $f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_r(x_1, \cdots, x_n)$ 的极小化和对 $m-r$ 个数值函数 $f_{r+1}(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_m)x_1, \cdots, x_n)$ 的极大化被同等地进行，其中的 s. t. (subject to)表示受限制的意思。例如，§1[例 1]是对一个数值函数 $f_1(x_1, \cdots, x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i-T$ 的极小化和对两个数值函数 $f_2(x_1, \cdots, x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i a_i x_i$ ，$f_3(x_1, \cdots, x_n)=a_1 x_1$ 的极大化被同等地进行，其中的限制条件都是形如 $g_i(x_1, \cdots, x_n) \geqslant 0$ 的不等式(即 $b_i-a_i x_i \geqslant 0, \ i=1, \cdots, n$; $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i-T \geqslant 0$, 以及 $x_i \geqslant 0, \ i=1, \cdots, n$)。§1[例 3]则是同时对函数 $f_1(x_1, \cdots, x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$ 的极小化和对函数 $f_2(x_1, \cdots, x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i$ 的极大化，其中有不等式形式的限制条件 $A-\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i \geqslant 0$，也有等式形式的限制条件 $x_i(x_i-1)=0$，$(i=1, \cdots, n)$。

在问题(1-4)中，由于是混合地对多个目标的某一些进行极小化，对另一些进行极大化，因而，通常把(1-4)叫做多目标混合最优化模型。

我们知道，对某一函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 的极大化可以等价地转化为对函数 $-\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 的极小化。所以，若在上述模型(1-4)中把所有的“max”都转化为“min”，则可以得到如下的统一地对多个目标都进行极小化的模式：

$$
\begin{cases}
\min & f_1(x_1, \cdots, x_n) \\
& \cdots\ \cdots\ \cdots \\
\min & f_m(x_1, \cdots, x_n) \\
\text{s. t.} & g_j(x_1, \cdots, x_n) \geqslant 0,\ j=1, \cdots, p \\
& h_k(x_1, \cdots, x_n) = 0,\ k=1, \cdots, q。
\end{cases} \tag{1-5}
$$

问题(1-5)叫做多目标极小化模型。

如果把(1-4)中的"min"都转化为"max",同理也可以有多目标极大化模型。多目标极小化模型、多目标极大化模型和多目标混合最优化模型统称为一般多目标最优化模型或一般多目标最优化问题。本书将主要以多目标极小化模型的形式进行讨论。

通常,我们把模型(1-4)或(1-5)中的n个变量$x_1, \cdots, x_n$叫做所考虑模型的决策变量,$m(\geqslant 2)$个数值函数$f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_n)$叫做模型的目标函数,限制条件$g_j(x_1, \cdots, x_n) \geqslant 0 (j=1, \cdots, p)$和$h_k(x_1, \cdots, x_n) = 0 (k=1, \cdots, q)$叫做约束条件,$g_j(x_1, \cdots, x_n) (j=1, \cdots, p)$和$h_k(x_1, \cdots, x_n) (k=1, \cdots, q)$为约束函数。

如果(1-4)或(1-5)中的各个目标函数$f_i(x_1, \cdots, x_n) (i=1, \cdots, m)$,以及约束函数$g_j(x_1, \cdots, x_n) (j=1, \cdots, p)$和$h_k(x_1, \cdots, x_n) (k=1, \cdots, q)$都是决策变量$x_1, \cdots, x_n$的线性函数,则相应的问题(1-4)或(1-5)叫做多目标线性规划模型。通常,多目标线性规划模型的一般形式为

$$
\begin{cases}
\min c_{11}x_1 + \cdots + c_{1n}x_n \\
\quad \cdots\ \cdots\ \cdots \\
\min c_{m1}x_1 + \cdots + c_{mn}x_n \\
\text{s. t. } a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\
\quad \cdots\ \cdots\ \cdots \\
\quad a_{l1}x_1 + \cdots + a_{ln}x_n \leqslant b_l \\
\quad x_j \geqslant 0,\ \ j=1, \cdots, n,
\end{cases} \tag{1-6}
$$

其中的$c_{ij} (i=1, \cdots, m; j=1, \cdots, n)$, $a_{ij} (i=1, \cdots, l; j=1, \cdots, n)$和$b_i (i=1, \cdots, l)$都是常数。例如,§1中的[例1],只要把其中的极大化转化为极小化,就归为一个形如(1-6)的多目标线性规划模型(1-1)。若进一步限制模型(1-6)中的决策变量取整数值,则相应的问题叫做多目标整数规划模型。例如,§1[例

3]的 (1-3) 就是这样的模型。如果 (1-5) 中的 $f_i(x_1, \cdots, x_n)$ $(i=1, \cdots, m)$, $g_j(x_1, \cdots, x_n)$ $(j=1, \cdots, p)$ 或 $h_k(x_1, \cdots, x_n)$ $(k=1, \cdots, q)$ 之一为决策变量的非线性函数，则相应的问题 (1-5) 叫做多目标非线性规划模型。例如，§1[例 2]的(1-2)即是。

为简化记号，我们把一组决策变量用向量形式记作

$$\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_n)^T。$$

如此，m 个目标函数可表为 $f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), \cdots, f_m(\boldsymbol{x})$，约束函数可表为 $g_j(\boldsymbol{x})$ $(j=1, \cdots, p)$ 和 $h_k(\boldsymbol{x})$ $(k=1, \cdots, q)$。也可以再用向量形式来表示 m 个目标函数：

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}), \cdots, f_m(\boldsymbol{x}))^T,$$

并称 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 为模型的向量目标函数。在几何上，决策变量 $\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_n)^T$ 的一组取定值对应 n 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个点，一个向量目标函数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 对应 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $\boldsymbol{R}^m$ 的一个映射 $f: R^n \to R^m$。此外，把满足约束条件的点 $\boldsymbol{x}$ 叫做所考虑模型的可行解或可行点，由所有可行解所组成的集合叫做可行域或约束集。(1-4) 和 (1-5) 的可行域或约束集是

$$X=\left\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} g_j(\boldsymbol{x})\geqslant 0,\ j=1, \cdots, p \\ h_k(\boldsymbol{x})=0,\ k=1, \cdots, q \end{array}\right\}。$$

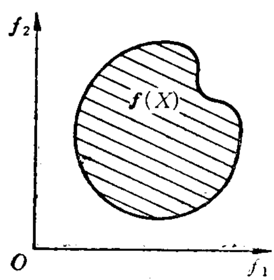


图 1-2

利用上述表示，满足所有约束条件的可行解可记作 $\boldsymbol{x}\in X$。最后，由可行域 X 通过映射 $\boldsymbol{f}$ 得到目标空间中的集合记作 $\boldsymbol{f}(X)$，并称它为相应模型的可达目标集（$m=2$ 时的图形如图 1-2 所示）。

引用了上述记号之后，多目标极小化模型(1-5)可用向量形式简记作

$$V-\min_{\boldsymbol{x}\in X} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})。 \tag{VMP}$$

上述的(VMP)为向量数学规划(Vector Mathematical Programming)的缩写，(VMP)中的 V-min 表示向量极小化，即向量目标