几何重观

原著【美】
H·S·M·COXETER
S·L·GREITZER
译
王宗尧
王岳庭

河南教育出版社

几何重现

几 何 重 观

H.S.M. Coxeter S.L.Greitzer著

王宗尧 王岳庭译

河 南 教 育 出 版 社

几何重观

H.S.M. Coxeter S.L.Greitzer著

王宗尧 王岳庭 译

责任编辑 温 光

河南教育出版社出版

河南第一新华印刷厂印刷

河南省新华书店发行

787×1092毫米32开本 7.125印张 139千字

1984年10月第1版 1984年10月第1次印刷

印数：1—8,100册

统一书号：7356·40 定价：0.68元

前　言

美国中学数学研究小组（NML）于1961年开始出版，1975年起改为美国数学会（MAA）出版的《新数学丛书》是适合美国高中学生阅读的一套丛书。丛书的内容涉及到美国高中数学教学大纲中所没有的许多方面，出版后吸引了广大高中学生的兴趣，也受到不少教师和大学生的欢迎。

《几何重观》是这套丛书中的一本。全书内容很丰富，除去重现了初等几何中许多著名的定理之外，编者还应用了变换的思想并介绍了“反演几何”、“射影几何”方面的一些初步知识。本书在前面几章的阐述中，一般都是从一些很简单的概念出发，逐步引伸，逐步深入；引进的许多著名定理，不仅作了分析论证，还介绍了有关的历史事实，很能吸引读者兴趣，也有利于发展读者的思维能力；本书后面几章所介绍的内容，叙述深入浅出，适合高中水平的读者自学；此外书中还配备了不少有一定难度的习题，并在书后附上了提示或解答，供读者练习、思考、进一步钻研。这些内容，对我国高中学生来说也是适合的。阅读并钻研这本书，可以使读者了解欧氏几何的发展过程，扩大眼界，提高解几何问题的能力，所以它是高中学生一本很好的数学课外读物，同

时也是中学数学教师和高师数学系科学生，研究初等几何的一本有用的参考用书。

本书编者在书的序言中，提出了他们对平面几何教学的一些观点，可供我们讨论参考。

余元希

1983年3月于华东师大

译　序

我们将加拿大多伦多大学(University of Toroto)考克斯特(H.S.M. Coxeter)教授与美国路脱格大学(Rutgers University)格里查(S.L.Greitzer)博士合著的这本《几何重观》(Geometry Revisited)介绍给我国读者。

本书的主要目的是复习和研究初等几何中一些使我们的前人特别感兴趣的内容。前几章完全是初等几何的内容，由浅入深，使读者从一些极简单的概念出发，逐步深入到问题的核心中去，引人入胜。在第五章，向读者介绍了在分析中有重要应用的反演几何。第六章介绍了二次曲线，其中着重介绍焦点和离心率两个概念，因为它们与研究彗星、行星和人造卫星的运行轨道密切相关。

本书的选材与写法，通俗易懂，富于直观；在定理的叙述与证明中，严密而准确；作者应用了一种“变换的思想”，有利于对几何本身内容的理解、又可将几何学与其它数学分支联系起来；全书所配的练习题，不仅可以加深对内容的理解，激发兴趣，而且能培养和锻炼独立思考能力。

本书可供中学生作为数学课外读物，也可供中学数学教师作教学参考书，同时对高等师范院校数学系科开设初等数

学专题研究，亦可作为选修课教材使用。

中国数学会理事、中国教育学会数学教育研究会副会长、华东师范大学数学系余元希副教授，在本书翻译过程中，给我们许多具体的指导，并且热情地为本书写了前言，在此谨表衷心感谢！

本书的第一、五、六章由王宗尧同志翻译，第二、三、四章由王岳庭同志翻译。由于译者水平所限，不妥之处，恳请广大读者批评指正。

译　者

1983年10月

目　录

序　言

瞧不起欧氏几何的人，就像
一个刚从外国回来而说自己
家乡坏话的人。

H.G.　福德。

中学的几何课程，按正规包含有一年的平面几何，或者一门由几何和初等解析几何组成的所谓十年制数学的教程。这门在学生中学阶段的初期开设的课程，是学生接触平面几何唯一的一次机会。与此相对照，学生有机会学习初等代数、中等代数甚至高等代数，因此，很自然他们会偏爱代数而轻视几何；而且一些具有偏见的人会热心地使学生相信，几何是“在数学的主流之外”的一门学科，应该用分析或者集合论代替它。

几何在中学课程中的次要地位，也许是起源于部分搞教育的人对几何的性质和它在发展过程中的一些进展缺乏了解.这些进展包括许多漂亮的结果，例如勃里考 (Brianchon) 定理(§3.9)，费尔巴赫(Feuerbach)定理(§5·6)彼德森-绍特(Petersen—Schoute)定理(§4.8)和莫勒(Morley)定理(§2·9)。从历史上讲，应该记住欧几里德是为成年人研究

哲学作准备而写他的著作的。直到我们这一世纪，教授几何课的主要原因之一，是人们认为它的公理化方法是学习演绎推理的最好内容。自然，为了达到有效的教育目的，要强调正规的几何方法，然而只要合适，无论是古代的还是现代的几何学家，都会毫不犹豫地采用其它传统的方法。如果三角、解析几何或者向量方法有用，几何学家都会使用它们。但是他们也发明了几何学自己的优美而有效的现代技术。这种技术之一，是使用变换。例如旋转，反射和伸缩。它们可缩短一些定理的证明，并把几何学和结晶学及艺术联系起来。有关这方面的几何动态是第四章讨论的主题。另一个"现代"技术是讨论点和圆的"反演几何学"的方法，它把直线看作通过"无穷远点"的一个圆。对此，我们在第五章中可略见一斑。第三个技术是射影几何的方法，它不考虑距离和角度而是强调点和线之间的相似处。在此，不仅任意两点可连成一条直线，而且任意两条直线交于一点，平行线的交点在"无穷远直线"上。在第六章中我们可以得到有关这方面的一些启示。

今天，几何学仍然保持有整整一代人之前它所具有的所有优点，在自然界中有几何学的内容等待人们去认识和鉴别。几何（特别是射影几何）仍然是引导学生掌握公理法的极好内容，它对人们仍然具有很大的吸引力。它的一些结果的优美性并没有因为时间的推移而减小，而对于科学家和应用数学家来说，它比过去更为有用和必要。例如，在考虑人造卫星轨道的形状和空间-时间连续统的四维几何学时就是

如比。

经过这么多世纪的发展，几何学中新的概念和处理问题的新方法层出不穷，要学习和掌握这么丰富的内容，学生会感到有一定的困难，因此我们要回过头来重新看看欧氏几何的发展过程，以求知道用什么样的方法能最有助于实现我们的目的。让我们去发现对我们说来是崭新的一些结果，也许这样做的话，我们会重新感受到当我们第一次接触几何学时所激起的惊叹和敬畏之情。

莱克斯(Dr.Anneli Lax)博士耐心地和我们合作并提出许多有用的建议，作者在此深表谢意。

H.S.M.C.

S.L.G.

第一章 与三角形相联系的点和线

这一章将导出的欧几里德以来所发展的一些新定理。我们考察一个任意三角形及与它相联系的最重要的点和直线：外接圆心，中线，重心，角平分线，内心，外心，高，垂心，欧拉直线，九点圆。

由角平分线引出的斯迪拉—莱毛史（Steiner-Lehmus）定理，虽然目前看来，是非常容易的，但一百多年以来，大家都认为很难给出证明。这一章的最后，由一个三角形及三角形中任一点P，导出一个新的三角形，其顶点系由P到已知三角形各边的垂线足构成。由此我们将引出一些有趣的发展，其中某些内容将在下一章中论述。

1·1 正弦定理的加强

正弦定理是应用最广泛的三角定理之一，但如果把定理的结论进一步加强，则使用起来会更方便。下面我们来证明结论加强了的正弦定理。

如图1·1A和1·1B所示，$\triangle ABC$ 的外接圆圆心是O点，

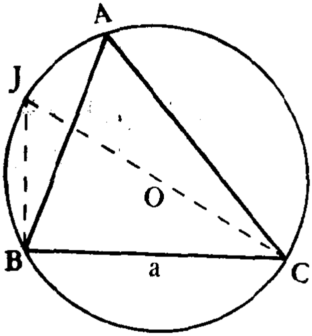

图 1.1A

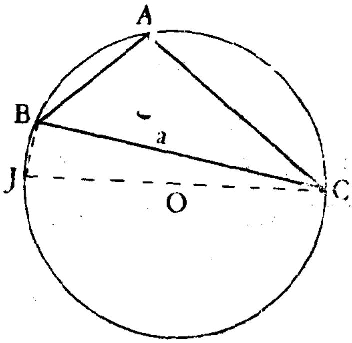

图 1.1B

半径为R，作直径CJ和弦BJ，在这两种情况中$\angle CBJ=90^\circ$，因此在这两个图形中

$$\sin J=\frac{a}{CJ}=\frac{a}{2R}.$$

在图1·1A中，因为$\angle A$和$\angle J$对同一条圆弧，所以$\angle J=\angle A$。在图1·1B中，因为圆内接四边形对角互补，所以$\angle J=180^\circ-\angle A$。因为$\sin\theta=\sin(180^\circ-\theta)$，所以在这两张图的情况中都有$\sin J=\sin A$，即都有

$$\sin A=\frac{a}{2R},\qquad \therefore\quad \frac{a}{\sin A}=2R.$$

同理，对于$\triangle ABC$的另外二角有

$$\frac{b}{\sin B}=2R,\qquad \frac{c}{\sin C}=2R.$$

把以上结果联起来就得到加强了的正弦定理：

定理1.11 对于外接圆半径为R的$\triangle ABC$，有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

以下凡是图形的名称外面加个括号，就表示图形的面积。例如(ABC)表示$\triangle ABC$的面积，$(PQRS)$表示四边形$PQRS$的面积，依此类推。

练　　习

1.证明对于任何$\triangle ABC$，即使B或C是一钝角，都有$a=b\cos C+c\cos B$.使用正弦定理来推导“加法公式”

$$\sin(B+C)=\sin B\cos C+\sin C\cos B.$$

2.在任一$\triangle ABC$中，

$a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)=0.$

3.在任一$\triangle ABC$中，$(ABC)=abc/4R$.

4.设p、q为通过A点，分别和BC相切于B点和C点的两个圆的半径，则$pq=R^2$.

1·2　塞瓦(Ceva)定理

连结三角形一个顶点和对边上一点的线段，称为三角形的塞瓦线。例如，如果X、Y、Z分别为$\triangle ABC$的BC、CA、AB三条边上的点，则线段AX、BY、CZ就是塞瓦线。这一名称是从意大利数学家塞瓦(Ciovanni Ceva)的名字而来，他在1678年发表了下面这个很有用的定理：

定理1.21 从$\triangle ABC$的每一顶点出发作一条塞瓦线，设