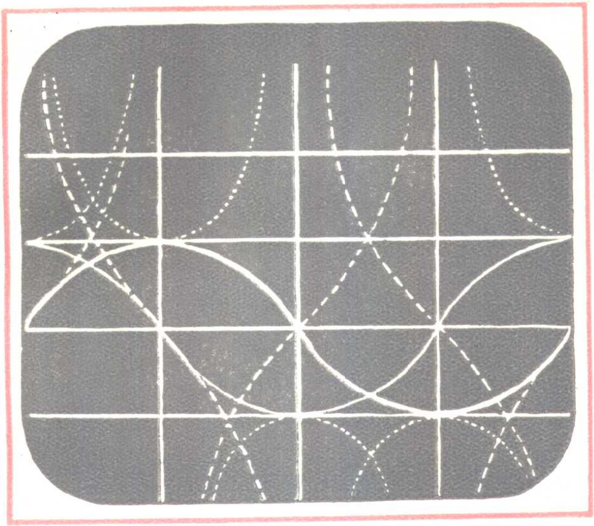

朱 水 林

对称和群

上海教育出版社

对称和群

朱水林

上海教育出版社

对 称 和 群

朱 水 林

上海教育出版社出版

（上海永福路 123 号）

新华书店上海发行所发行　崇明浜东印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 2　字数 41,000

1984 年 4 月第 1 版　1984 年 4 月第 1 次印刷

印数 1—40,500 本

统一书号：7150·3140　　定价：0.18 元

目　　录

一、图形的对称

在自然界，到处都可见到对称，最多见的是左右对称．例如，人体的外形就左右对称，动、植物界也充满了左右对称（如图 1-1）．

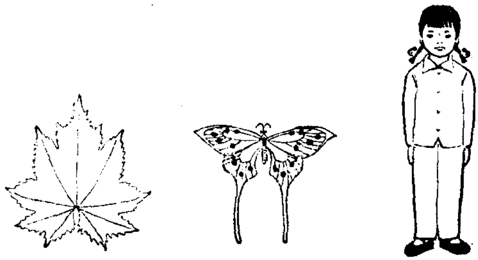

图 1-1

人类在改造自然界的过程中，经过成千上万年的实践，逐渐认识到对称的物体美观大方，受力均匀，平衡稳定，并且建造起来也较方便．于是，人们设计、制造了大量的对称形状的

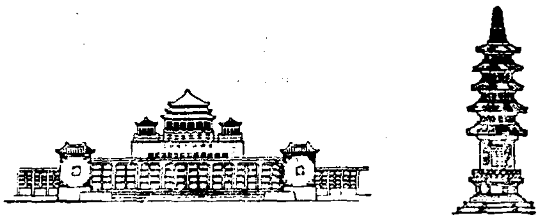

图 1-2

日用器皿、工艺美术品，古建筑和现代大型建筑也大都具有对称性(如图 1-2)．

当然，数学中的对称概念，要比上述生活直觉中理解的对称的概念广泛得多，并且，图形的对称性还往往和图形的变换联系着，以下逐一加以讨论．

1．反射变换和反射对称图形

图 1-3 是一幅花布的图样．这里，只要告诉你某一角的图案，就可以想象出整个画面．所以，设计这幅花布图样时，只需画出其四分之一即可(图 1-4)．

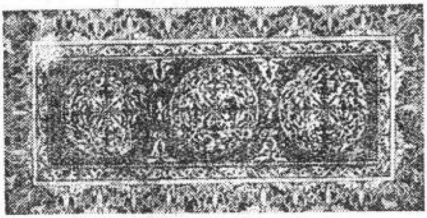

图 1-3

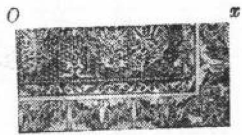

图 1-4

怎样从其右下角的图案来得到右上角的图案呢？具体说来，我们可以先将图 1-4 描在一张透明纸上，再以直线 Ox 为轴，把透明纸绕轴线 Ox 翻转 $180°$，便得到了一个新的图形．运用同样的方法，我们可以从右半图形出发得到左半图形．这里，把一个平面图形绕一直线翻转的结果，是和通常的照镜子相仿的，我们把这种翻转叫做反射变换．确切地说，一个图形 F，通过一个假想镜面 σ，使在镜面中得到一个新的图形 F'，这种从 F 到 F' 的过程叫做关于镜面 σ 的反射变换，记作

$$\sigma: F\to F'.$$

并且，镜面 σ 叫做反射面(或叫对称面)，图形 F' 叫做图形 F

的象.

这种在镜中的图形 F'，是可以运用平面镜的成象原理，用几何作图的方法而得出的．如镜面 XY 前有一点 A，它在镜面中的象 A' 可如下作出：过点 A 作直线 XY 的垂线 AB，垂足为点 B；延长 AB 至 A'，使 $AB=BA'$，则点 A' 即为点 A 关于镜面 XY 反射变换下的象(图 1-5)．

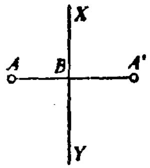

图 1-5

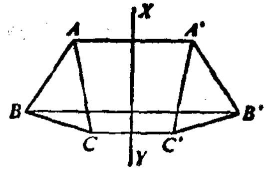

图 1-6

根据同样的道理，如果图形 F 为 $\triangle ABC$，那么它关于镜面 XY 反射变换下的象 F' 即为 $\triangle A'B'C'$(图 1-6)．这里，点 A 与 A'、点 B 与 B'、点 C 与 C' 分别是对应点，并且是一一对应的；线段 AB 与 $A'B'$、AC 与 $A'C'$、BC 与 $B'C'$ 分别是对应线段；$\angle BAC$ 与 $\angle B'A'C'$、$\angle ABC$ 与 $\angle A'B'C'$、$\angle BCA$ 与 $\angle B'C'A'$ 分别是对应角．可以证明：

$$AB=A'B'、\quad BC=B'C'、\quad CA=C'A',$$

$$\angle BAC=\angle B'A'C'、\quad \angle ABC=\angle A'B'C'、$$

$$\angle BCA=\angle B'C'A',$$

并且 $$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'.$$

可见一个图形 F 经过反射变换，能保持对应线段的长度不变，对应角的角度不变，并且，图形 F 和它在反射变换下的象 F' 是全等的图形．当然，F 和 F' 不一定重合．就是说，通过反射变换，一个图形的位置是可能改变的．

对于一个图形 F，如果存在这样一个镜面 σ，使 F 在关

于 σ 的反射变换下的象 F' 能和原图形 F 重合，即变换前后的图形重合，我们把这样的图形叫做反射对称图形.

显然，本书一开头所讲到的那些生活直觉中很为多见的"对称"，都是这里所说的反射对称图形. 反射变换下的对应点、对应线段、对应角相应地叫做这一反射对称图形的对称点、对称线段、对称角.

2. 旋转变换和旋转对称图形

图 1-7 是一张雪花结晶图. 如果我们想象在中心处有一根垂直纸面的直线，那么当将雪花图绕该直线顺时针方向旋转过 60° 度时，旋转前后的图形就会重合. 同样地，绕定直线旋转 120°、180°、240°、300°、360° 时，旋转前后的图形也会重合. 以下我们把雪花图那样的图形也作为一种对称图形，不过与前述反射对称图形不同.

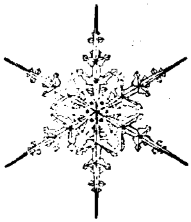

图 1-7

一般地说，一个图形 F，绕某一固定直线、按一定方向旋转某个角度 α 后，形成一个新的图形 F'，这种从图形 F 转到 F' 的过程，叫做图形关于一固定直线的旋转变换；固定直线叫做旋转对称轴(也叫旋转轴)；角 α 称为旋转角；图形 F' 是 F 关于旋转变换下的象. 记作 c: $F\rightarrow F'$.

图形关于旋转变换的象，可以通过几何作图方法得到. 现在先来看关于点 A 的象 A' 的作图方法(图 1-8). 令 L 为旋转轴，A 点在平面 π 上，L 和 π 垂直并且交于 O 点(O 为 L 在 π 上的垂足). 连结 AO; 在平面 π 上，以 O 为圆心、以 OA 为半径画弧；在此弧上依逆时针方向截取 $\overset{\frown}{AA'}=\alpha$，得到点 A',

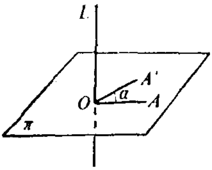

图 1-8

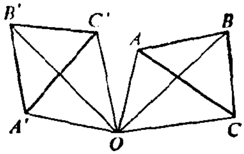

图 1-9

即为点 A 关于旋转轴 L 的旋转变换下的象.

根据同样道理,如果图形 F 为 $\triangle ABC$, 那么它关于旋转轴 L 旋转 α 角度后的象 F' 即是 $\triangle A'B'C'$(图 1-9). 其中点 A 与 A', 点 B 与 B'、点 C 与 C' 分别是对应点, 并且是一一对应的; 线段 AB 与 $A'B'$, BC 与 $B'C'$、CA 与 $C'A'$ 分别是对应线段; 角 $\angle BAC$ 与 $\angle B'A'C'$、$\angle ABC$ 与 $\angle A'B'C'$、$\angle BCA$ 与 $\angle B'C'A'$ 分别是对应角. 容易证明

$$OA=OA'、\quad OB=OB'、\quad OC=OC',$$

$$\angle AOA'=\angle BOB'=\angle COC'=\alpha.$$

也就是说, 通过旋转变换, 每双对应点到旋转轴的距离相等; 每双对应点和 O 联线之间的夹角都等于旋转角 α. 由此可以证明: 图形 F 在旋转变换后得到象 F', F 中任意两点的距离、角度和 F' 中对应点间距离、对应角度相等. 特别地, 有

$$AB=A'B'、\quad BC=B'C'、\quad CA=C'A',$$

$$\angle ABC=\angle A'B'C'、\quad \angle BCA=\angle B'C'A'、$$

$$\angle BAC=\angle B'A'C',$$

并且
$$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'.$$

可见,旋转变换和反射变换是一样的, 既保持长度不变, 又保持角度不变, 它们都是保长变换, 又是保角变换. 图形 F 与旋转变换后的象 F' 是全等图形. 但一般情况下, F 和 F' 的位置是不一样的.

一个图形 F，如果能找到一固定轴，把图形绕该轴旋转适当角度后得到象 F'，并且 F 和 F' 重合，即旋转变换前后的图形重合，我们就称它为旋转对称图形. 旋转变换下的对应点、对应线段、对应角度分别叫做这一旋转对称图形的对称点、对称线段、对称角度.

花冠、蜂巢、正齿轮等等都是旋转对称图形的实例.

在旋转过程中，图形旋转一周，可能重合的次数 n，称为这一图形的旋转对称次数，并且也称为该旋转轴的次数，即可称该轴为 n 次旋转轴. 例如：正方形，它的旋转对称轴是过对角线的交点，并且垂直正方形所在平面的直线. 显然，当正方形绕该轴旋转一周时，图形能重合 4 次，所以它为 4 次旋转对称图形，该旋转轴为 4 次旋转轴. 再来看圆形. 垂直圆心的直线是旋转轴，当绕此轴旋转一周时，能与本身重合无数次，因此我们说圆形具有无限次旋转轴，圆形是无限次旋转对称图形. 另外，海星、水母、苹果花等具有 5 次旋转轴，是 5 次对称图形. 桔子、橙子、柿子、柠檬等的横截面分别可以是 7 次、8 次、9 次、10 次旋转对称图形等.

3. 反演变换和反演对称图形

照相机摄象时，物与象的关系如图 1-10.

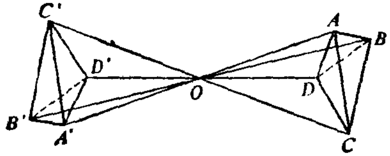

图 1-10

把一个图形 F 上的点和定点 O 联结，并作反方向相等延长，从而得到 F'，这种从 F 到 F' 的过程，叫做图形 F 关于 O

点的反演变换，定点 O 叫做反演中心。记作 i: $F \to F'$.

反演变换也可以用几何方法表示，图形 F 的象 F' 可以用作图方法得到。我们先来作一点 A，经过以 O 为反演中心的反演变换后的象 A'. 方法如下：连结点 A 和点 O，并延长至点 A'，使得 $OA=OA'$，此时，点 A' 就是点 A 在反演变换下的象(图 1-11)。

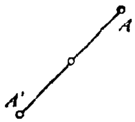

图 1-11

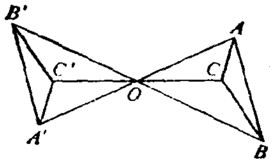

图 1-12

根据同样的道理，如果图形 F 为 $\triangle ABC$，那么它关于 O 点的反演变换下的象 F' 为 $\triangle A'B'C'$(图 1-12)。点 A 与 A'，B 与 B'，C 与 C' 是反演变换下的对应点，并且是一一对应的；线段 AB 和 $A'B'$、BC 和 $B'C'$、CA 和 $C'A'$ 是对应线段；角 $\angle ABC$ 和 $\angle A'B'C'$、$\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$、$\angle ACB$ 和 $\angle A'C'B'$ 是对应角。由于对应点到反演中心的距离是相等的，即

$$OA=OA'、\quad OB=OB'、\quad OC=OC',$$

并且

$$\angle AOB=\angle A'OB'、\quad \angle BOC=\angle B'OC'、$$
$$\angle COA=\angle C'OA',$$

所以，可以证明：对应线段、对应角也相等，即有

$$AB=A'B'、\quad AC=A'C'、\quad BC=B'C',$$
$$\angle BAC=\angle B'A'C'、\quad \angle ACB=\angle A'C'B'、$$
$$\angle CBA=\angle C'B'A'.$$

并且 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

可见反演变换也是保长变换、保角变换．反演变换前后的图形也是全等图形．当然，一般情况下，变换前后的图形位置是变化的．

一个图形 F，如果能找到一定点 O，使得 F 在以 O 为反演中心的反演变换后的象 F' 与 F 重合，即变换前后的图形重合，我们就把这个图形叫做**反演对称图形**．例如：正方形、菱形、圆、正六面体等都是反演对称图形．但是锥体和台体就不是反演对称图形．

4．平移变换和平移对称图形

图 1-13 是二方连图案．它的特点是，整个图形可以看作由截出的某个图形单位，不断向二方连续扩展而成．二方连可以看作由单位图形按水平方向连续平行移动而得的图形．

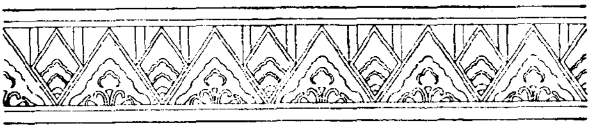

图 1-13

一个图形 F，按某向量 $\boldsymbol{a}$ 移动后，得到图形 F'，这个过程称为关于向量 $\boldsymbol{a}$ 的**平移变换**．记作

$$T: F \to F',$$

$\boldsymbol{a}$ 称为**平移向量**．一个平移变换完全由平移向量决定．

平移变换也可通过几何作图实施．我们先来作出一点 A 经过平移变换后的象 A'，方法如下：过点 A 作向量 $\boldsymbol{a}$，使得 A 点为向量的起点，这时向量的终点 A' 就是所求点 A 经过

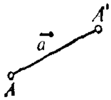

图 1-14

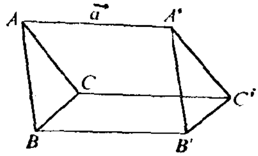

图 1-15

关于 $\boldsymbol{a}$ 的平移变换后的象(图 1-14).

同理，如果图形 F 为 $\triangle ABC$，那么它关于 $\boldsymbol{a}$ 的平移变换后的象 F' 为 $\triangle A'B'C'$ (图 1-15)，其中点 A 与 A'、B 与 B'、C 与 C' 分别是对应点，并且是一一对应的；线段 AB 与 $A'B'$、BC 与 $B'C'$、CA 与 $C'A'$ 分别是对应线段；角 $\angle BAC$ 与 $\angle B'A'C'$、$\angle ACB$ 与 $\angle A'C'B'$、$\angle CBA$ 与 $\angle C'B'A'$ 分别是对应角. 可以证明:对应线段和对应角度是相等的,即有

$$AB=A'B',\quad BC=B'C',\quad CA=C'A',$$
$$\angle ABC=\angle A'B'C',\quad \angle BCA=\angle B'C'A',$$
$$\angle CAB=\angle C'A'B',$$

可见平移变换也是保长变换和保角变换.

一个图形 F，如果能找到一个向量 $\boldsymbol{a}$，使得经过关于 $\boldsymbol{a}$ 的平移变换后的图形 F' 与 F 重合，即变换前后的图形重合，我们就称该图形为**平移对称图形**.

上述二方连图就是平移对称图形. 但是三角形、四边形、正多面体等有界限的图形都不能是平移对称图形. 平移对称图形一定是无界限的图形.

平移变换和反射、旋转、反演变换有相同之处，就是它们都是保长变换，又是保角变换，变换前后的图形都是全等图形. 但是平移对称图形还有自己的特点，它必须是无界图形，而反射、旋转、反演对称图形却可以是有界图形.

以上所述反射、旋转、反演、平移变换，可以统称为对称变换．一个图形经过对称变换能保持不变，即完成这种变换前后的图形重合，这种图形叫做对称图形．关于图形对称变换的性质，以及对称变换的多少的研究，称为对称性研究．这是一个重要的问题，以后将不断加以说明．

5．解　　例

在初等几何中，对图形上的某些元素进行对称变换，然后借各元素新旧位置关系，可以解决某些作图问题和几何极值问题，这种方法叫做对称变换法．由于所用对称变换的差别，它们可分为反射法、旋转法、中心对称法、平移法等．有时，解某个几何问题时，需要同时使用几种不同的对称变换，此时就称之为混合法．

反射法：此法所用的对称变换为反射变换．使用时，首先要注意寻出反射面，在平面图形时就是寻出反射轴，然后再注意寻找反射对称点．

[例 1]　A、B 为位于直线 l 同侧之两定点，试在定直线 l 上求一点 P，使得 $PA+PB$ 为最小．(图 1–16)

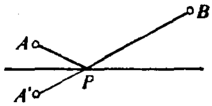

图 1-16

分析　假设 P 点已作出，这时很难发现点 P 的位置有什么特征，如果将点 A 以 l 为反射轴，作反射变换得对称点 A'．由于 $AP=A'P$，故欲使 $PA+PB$ 最小，只须 $PA'+PB$ 为最小即可．由此可知 P、A'、B 三点应该共线．

作法　1．以 l 为反射轴，作 A 点的对称点 A'．

2．连结 BA'，与 l 交于 P 点　P 点就是所要求的点．

证明 因为点 A、A' 关于 l 对称，所以

$$PA=PA'.$$

于是，$$PA+PB=PA'+PB. \quad (\text{等量代换})$$

因为 P、A'、B 三点共线，故在以 A'、B 为端点的折线中以 $PA'+PB$ 为最小．这也就证得了 $PA+PB$ 最小．

［例 2］ 过两定点 A、B，作切于定直线 l 的圆．（图 1-17）

分析 假设图已作出，P 点是线段 AB 与 l 的交点，圆 ABT 过 A、B 点并与直线 l 相切于 T 点．可以看出，此作图题的关键是确定 T 点的位置，但此时 T 点没有显示什么特点．如果作 A 点关于 l 的反射对称点 A'，我们就能看到：

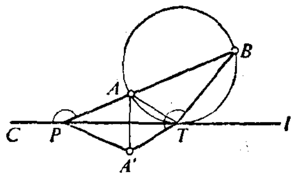

图 1-17

$$\angle ATP=\angle A'TP=\angle ABT,$$

$$\angle CPA=\angle ABT+\angle PTB$$

$$=\angle A'TP+\angle PTB=\angle A'TB.$$

因此，问题就转化为求作过 A'、B、T 这三点的圆，并使 $A'B$ 所含圆周角 $\angle A'TB$ 为定角 $\angle CPA$，这是可以解决的．

作法 1．以 l 为轴，作 A 的反射对称点 A'．

2．以 $A'B$ 为弦，作含 $\angle CPB$ 之弧，此弧与定直线 l 交于点 T．

3．作过 A、B、T 三点之圆，即为所求．

证明 因为圆过 A、B、T 三点，所以由作图知

$$\angle CPA=\angle A'TB=\angle PTB+\angle A'TP.$$

因为 $\angle CPA$ 是 $\triangle PBT$ 的外角，所以

$$\angle CPA = \angle PTB + \angle PBT.$$

综上两式，即得

$$\angle PBT = \angle A'TP.$$

于是 $\angle PBT = \angle PTA$，这就证得了圆与 l 相切于 T.

讨论 因为以 $A'B$ 为弦，作含 $\angle CPB$ 之弧，在一般情况下与定直线 l 可以相交两点，所以在一般情况下，本问题可有两解.

旋转法：按此法作图所用的对称变换为旋转变换. 这里首先要注意的是寻得适当的旋转轴，在平面图形时，就是要寻找旋转中心，否则将无从施展本法. 当旋转中心确定后，再设法确定旋转角的大小和方向.

[例 3] 求作一正三角形，使它的三个顶点 A、B、C，分别落在三条已知平行直线 a、b、c 之上.（图 1-18）

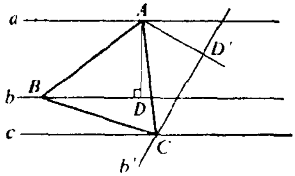

图 1-18

分析 假设正三角形已经做出，显然其中必有一顶点，例如 A 可以在 a 上任意选取，此后关键是要确定 C 点（或 B 点）的位置，但此时 C 点没有直接显示什么特点，故我们就想到，如果以 A 点为中心，把正三角形 $\triangle ABC$ 绕 A 点旋转 $60°$ 时，此时 B 点将转到 C 点的位置，同时直线 b 转到 b' 的位置，而 C 点恰为 b' 和 c 的交点，因此当 b' 确定时，C 点也就确定. 确定 b' 的位置是可以做到的，例如，如果我们作 AD 垂直 b，和 b 交于 D 点，则 D 点通过 $60°$ 旋转后将处在 D' 的位置，即 $\angle D'AD = 60°$，$AD' = AD$，作过 D' 点且与 AD' 垂直的直线就是 b'. 此时 C 点就容易确定了，它是直线 c 和直线 b' 的交点. 进而，由 A、C 就可确定 B 点.

作法 1. 在直线 a 上任选一点 A. 作 $AD\perp b$, 且与直线 b 交于 D 点.

2. 作 AD 旋转 60° 后的象 AD' (即 $\angle D'AD=60°$, 且 $AD'=AD$).

3. 过 D' 作与 AD' 垂直的直线 b', 它与 c 交于 C 点. 连结 AC.

4. 作 AB, 使 $\angle BAC=60°$, 与 b 交于 B 点. 连结 BC. 此时 $\triangle ABC$ 即为所求.

证明 由作法,有

$$\angle DAD'=\angle BAC=60°.$$

这两个角中同减去 $\angle DAC$, 即有

$$\angle D'AC=\angle DAB. \qquad \text{(等量公理)}$$

$$\therefore\ \ \mathrm{rt}\triangle AD'C\cong \mathrm{rt}\triangle ADB.$$

$$\therefore\ \ AB=AC.$$

这就证得了 $\triangle ABC$ 为等腰三角形,又因其顶角 $\angle BAC=60°$, 所以它是正三角形.

讨论 本题是不定位作图,它有解,而且适合条件的图形彼此是全等的,所以为一解. 第十四届国际中学生数学竞赛,由英国命题的第 6 题:"给出四个不重合的互相平行的平面,试证:存在一个正四面体,它的四个顶点,分别在这四个平面上". 它是例 3 的推广,即由平面问题向空间问题的推广.

中心对称法:它利用反演变换作图. 利用中心对称法解题时,要注意奇数个反演的合成仍是反演,而偶数个反演的合成却是一个平移,甚至也可以是恒等变换.

[例 4] 已知各边中点的位置,求作五边形. (图 1-19)

假设 五点为 L、M、N、O、P.

求作 五边形 $ABCDE$, 使 L、M、N、O、P 依次分别