数学基础知识丛书

直线方程

章士藻

江苏教育出版社

直綫方程

章士藻

江苏教育出版社

直 线 方 程

章 士 藻

江 苏 教 育 出 版 社 出 版

江苏省新华书店发行　　淮阴新华印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 1/32　印张 5.125　字数 111,000

1979 年 6 月第 1 版　1984 年 4 月第 2 次印刷

印数 150,001－173,300 册

书号：13351・019　定价：0.38 元

责任编辑　赵遂之　何震邦

内 容 提 要

这套《丛书》共二十四册，系统介绍数学基础知识和基本技能，供中学数学教师、中学生以及知识青年、青年工人阅读。

《丛书》根据现行全日制十年制学校《中学数学教学大纲》（试行草案）精神编写，内容上作了拓宽、加深和提高。《丛书》阐述的数学概念、规律，力求符合唯物辩证法，渗透现代的数学观点和方法，以适应四个现代化的需要。为了便于读者阅读，文字叙述比较详细，内容由浅入深，由易到难，循序渐进，习题、总复习题附有答案或必要的提示。

本书共分四个部分，平面直角坐标系、直线方程、直线间的关系、直线型经验公式，共十五节，最后有小结。

本书原由江苏人民出版社出版，这次重印改为江苏教育出版社出版。

目　　录

一、平面直角坐标系

革命导师恩格斯指出："数和形的概念不是从其他任何地方，而是从现实世界中得来的。"（《反杜林论》）人们在长期的生产实践中，产生了数和形的概念，并逐步产生了以研究数为主的代数学与以研究形为主的几何学。起初，他们是从"数"与"形"这两个侧面，分别进行研究的。但客观事物都是既有"数"又有"形"的，数与形既有区别，又有联系，在一定条件下它们可以相互转化。

解析几何就是实现这一转化，用代数方法来研究几何图形的一个数学分科。首先，通过建立坐标系把点与一对实数（坐标）互相联系起来；然后，把曲线（图形）作为满足一定条件的点的集合，与点的坐标所满足的方程互相联系起来，从而达到用数的关系来研究有关曲线性质的目的。

直线是平面上最简单、最常见，也是最重要的几何图形，它既能表示直线运动的规律，反映两个变量之间最常见的一次函数关系，又是解析几何这门学科研究曲线的基础。

本书在坐标法的基础上，运用形、数结合的方法来研究直线，即建立点与坐标、直线与二元一次方程之间的对应，然后通过对方程的讨论，研究直线的性质、点与直线、直线与直线之间的位置关系以及与直线有关的应用问题等。因此，为研究的需要，我们首先介绍有向线段，平面直角坐标系，两点间的距离，线段的定比分割等内容。

§ 1 有向线段

1.有向线段

在实际问题中，常常需要考虑直线与线段的方向．事实上，任意一条直线，都有两个相反的方向，如果选定其中的一个方向作为它的正向，那么，另一个方向就是它的负向，象这样规定了方向的直线,叫做有向直线（或轴）,通常用箭头来指示它的正向（图 1 ）。

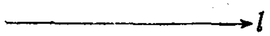

图 1

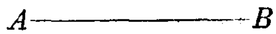

图 2

一般情况下，对于水平放置的直线，以从左到右的方向，作为这条直线的正向，对于铅垂位置的直线，以从下到上的方向，作为这条直线的正向．

同样，一条线段也有两个方向，我们将规定了起点与终点的线段，叫做有向线段，从起点到终点的方向，就是这条有向线段的方向。以A为起点，B为终点的有向线段(图2)，用记号$\overline{AB}$表示（$\overline{AB}$读作“有向线段AB”）；而以B为起点，A为终点的有向线段，用记号$\overline{BA}$表示（$\overline{BA}$读作“有向线段BA”）。

对于在轴上的线段，如果和它所在轴的方向一致，它就是正向的线段；反之，它就是负向的线段.例如，在图3中，

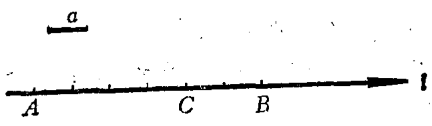

图 3

$\overline{AB}$的方向是正的，而$\overline{BC}$的方向是负的，它们是两条不同方向的有向线段。

如果选定一条线段作为长度单位，以此测量有向线段AB所得到的非负数，叫做有向线段AB的长度，也叫做有向线段AB的模或绝对值，记成$|AB|$。有向线段AB的长度，连同表示它方向的正负号，叫做有向线段AB的数量或值，记成AB。方向相同，长度相等的两条有向线段，叫做相等的有向线段。如果有向线段的起点与终点重合，这条有向线段叫做零线段，零线段的值和它的长度都为零，而它的方向不定。

例如，在图3中，$\overline{CB}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$与轴l同向，$CB=2$，$AC=4$，$AB=6$；而$\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{BA}$与轴l反向，$BC=-2$，$CA=-4$，$BA=-6$。但$|CB|=|BC|$，$|AC|=|CA|$，$|AB|=|BA|$。

一般地，对于有向线段AB与BA，有

$$AB=-BA \tag{1—1}$$

$$|AB|=|BA| \tag{1—2}$$

2.有向线段的加法 对于同一轴上的两条有向线段，如果第二条有向线段的起点在第一条有向线段的终点上，则以第一条有向线段的起点为起点，而以第二条有向线段的终点为终点的第三条有向线段，叫做这两条有向线段的和。

在图3中，我们将$\overline{AB}$叫做$\overline{AC}$与$\overline{CB}$的和，将$\overline{BA}$叫做$\overline{BC}$与$\overline{CA}$的和，记成

$$\overline{AC}+\overline{CB}=\overline{AB};$$
$$\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{BA}.$$

下面我们将要证明，对应于有向线段的值之间也具有这一关系。

定理 设A、B、C为同一轴上三点，那么不论它们的位置关系如何，总有关系式

$$AB+BC=AC \qquad (1\text{—}3)$$

证明　A、B、C三点在轴l上的排列可以有六种不同的情况（图4）。

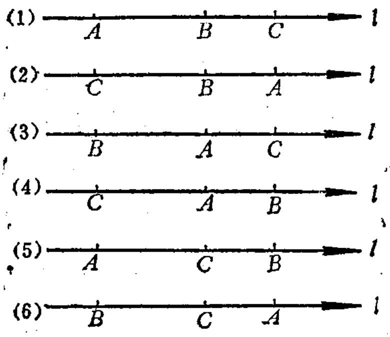

图　4

①当B点在A、C之间时[图4—(1)、(2)]，

$\because |AB|+|BC|=|AC|$，

且$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$同向，

$\therefore AB+BC=AC$ 或$-AB+(-BC)=-AC$。

即　$AB+BC=AC$。

②当A点在B、C之间时[图4—(3)、(4)]，由以上①，得$BA+AC=BC$，

$\because BA=-AB$，　$\therefore AB+BC=AC$。

③当C点在A、B之间时[图4—(5)、(6)]，同样，由以上①，得$AC+CB=AB$。

$\because CB=-BC$，　$\therefore AB+BC=AC$。

显然，当A、B、C三点中有两点或三点都重合时，公式(1—3)仍然成立。

因此，同一轴上三点A、B、C，不论其位置关系如何，公式(1—3)都成立。

类似地，应用数学归纳法，我们可以进一步证得，对于轴上n个点A_1、A_2、A_3、……A_n，不论它们的位置关系如何，也总有关系式

$$A_1A_2+A_2A_3+\cdots\cdots+A_{n-1}A_n=A_1A_n \qquad (1\text{—}4)$$

成立。

这个定理，叫做沙尔（*Chasles*　1793—1880年，法国

数学家）定理，公式（1—3）是一个基本关系式，它是推导距离公式、定比分点公式等的基础。我们应切实掌握它的内容，并能熟练地把一条有向线段的值写成用另两条有向线段的值之和或差来表示的形式。

例如，已知A、B两点，那么，在A、B所在轴上任取一点C，一定有

$$AB=AC+CB \quad 或 \quad AB=CB-CA,$$

$$BC=BA+AC \quad 或 \quad BC=AC-AB,$$

$$CA=CB+BA \quad 或 \quad CA=BA-BC.$$

注意：有向线段、有向线段的值与有向线段的长度，是三个不同的概念，它们的意义、记号都不相同，应分辨清楚。其中

有向线段$\overline{AB}$是一几何图形，记成$\overline{AB}$，并且$\overline{AB}$和$\overline{BA}$长度相等，方向相反；

有向线段$\overline{AB}$的值是一实数，记成AB，并且$AB=-BA$，即AB与BA互为相反数；

有向线段$\overline{AB}$的长度，是一非负实数，记成$|AB|$，并且$|AB|=|BA|$。

对于同一轴上三点A、B、C，其关系式$AB+BC=AC$，必须从有向线段的值去理解它，如果讨论的不是有向线段的值，而是其对应的长度，只有当B点介于A、C之间时，才有$|AB|+|BC|=|AC|$的关系成立。

例1 证明直线上四点A、B、C、D，不论它们的位置关系如何，都具有关系式

$$AB\cdot CD+AC\cdot DB+AD\cdot BC=0.$$

证明 对于直线上A、B、C、D四点，由基本关系式（1—3），

得 $$AC+CD=AD,\ AD+DB=AB.$$
即 $$CD=AD-AC,\ DB=AB-AD.$$
则
$$\begin{aligned}
&AB\cdot CD+AC\cdot DB+AD\cdot BC\\
&=AB(AD-AC)+AC(AB-AD)+AD\cdot BC\\
&=AB\cdot AD-AB\cdot AC+AC\cdot AB-AC\cdot AD+\\
&\quad+AD\cdot BC\\
&=AB\cdot AD-AC\cdot AD+AD\cdot BC\\
&=AD(AB-AC+BC)\\
&=AD(AB+BC-AC)\\
&=AD(AC-AC)\\
&\therefore AB\cdot CD+AC\cdot DB+AD\cdot BC=0
\end{aligned}$$

3. 有向线段在轴上的射影 由一点P引轴l的垂线，所得的垂足P'叫做点P在轴l上的正射影，简称射影，l叫做射影轴。

对于轴l及有向线段$\overline{AB}$，如果点A、B在轴l上的射影分别是A'与B'，则有向线段$\overline{A'B'}$的值$A'B'$叫做$\overline{AB}$在轴l上的射影（图5），并用记号"射影$_l\overline{AB}$"表示有向线段$\overline{AB}$在轴l上的射影。即

$$\text{射影}_l\overline{AB}=A'B'.$$

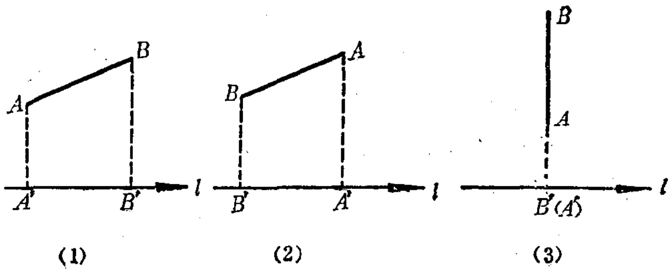

图 5

射影$_l\overline{AB}$是一个实数，如果$\overline{A'B'}$与l同向，则射影$_l\overline{AB}$是一个正数[图 5—(1)]；如果$\overline{A'B'}$与l反向，则射影$_l\overline{AB}$是一个负数[图 5—(2)]；如果A'与B'重合，则射影$_l\overline{AB}$是零[图 5—(3)]。

为研究方便，我们作如下规定：设两轴l_1与l_2相交于O点，把l_1绕O点旋转，使l_1的正向与l_2的正向第一次重合时所经过的角，叫做l_1与l_2的交角，记成$(\widehat{l_1,l_2})$。而将l_2与l_1的交角记成$(\widehat{l_2,l_1})$。和三角学中一样，按逆时针方向旋转所成的角叫做正角，按顺时针方向旋转所成的角叫做负角，即$(\widehat{l_1,l_2})=-(\widehat{l_2,l_1})$。

定理　有向线段$\overline{AB}$在轴l上的射影等于有向线段$\overline{AB}$的值乘以l与$\overline{AB}$夹角的余弦。即

$$射影_l\overline{AB}=AB\cdot\cos(\widehat{l,\overline{AB}}). \tag{1—5}$$

证明　设A、B在轴l上的射影分别为A'、B'，从A点作轴l的平行线交BB'或其延长线于C(图6)。记$\varphi=(\widehat{l,\overline{AB}})$，由三角函数定义，则$|AC|=|AB|\cos CAB$。

① 如图 6—(1)，设$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，

$\because$ $|AC|=AC=A'B'$，$|AB|=AB$，$\angle CAB=\varphi$，

$\therefore$ 由$|AC|=|AB|\cos CAB$，得 $A'B'=AB\cos\varphi$.

② 如图 6—(2)，设$\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$，

$\because$ $|AC|=-AC=-A'B'$，$|AB|=AB$，

$\angle CAB=\pi-\varphi$，

$\therefore$ 由$|AC|=|AB|\cos CAB$，

得 $$-AC' = AB\cos(\pi - \varphi),$$
$$-AC = -AB\cos\varphi, \quad \text{即} \quad A'B' = AB\cos\varphi.$$

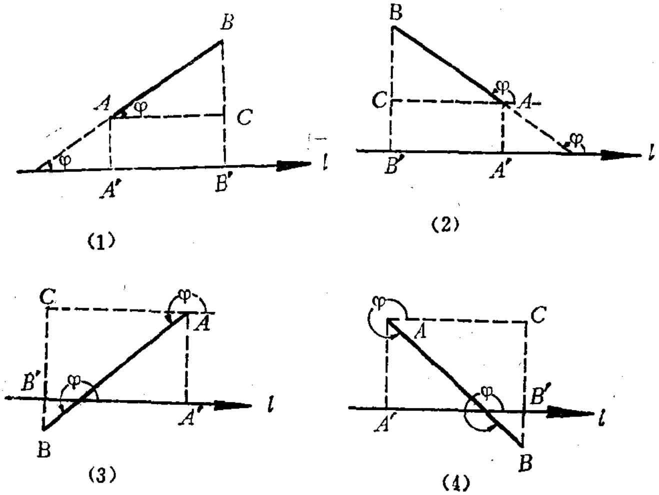

图 6

另外，如果有向线段$\overline{AB}$与轴l的位置关系为其他情况，如图 6—(3)、(4)以及图 7 中各种特殊情况时，以 上 公 式（1—5）仍然成立，从而该定理得证。

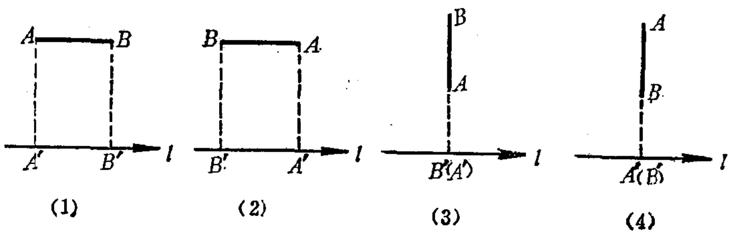

图 7

对于折线$ABCDE$，如果把A作为它的起点，E作为它的终点，在折线上依次确立各段的方向，并把它的各段看成有向线段，这样的折线，叫做有向折线，记成$\overline{ABCDE}$，有向折线的所有有向线段在轴上的射影之和，叫做有向折线在该轴上的射影。连结有向折线$\overline{ABCDE}$的起点A与终点E的线段AE，叫做有向折线$\overline{ABCDE}$的封闭线段。

有向折线的所有有向线段在轴上的射影之和叫做有向折线在该轴上的射影。由此可得下列定理。

定理　有向折线$\overline{A_1A_2A_3\cdots\cdots A_n}$在轴$l$上的射影，等于它的封闭线段$\overline{A_1A_n}$在轴$l$上的射影。

即　射影$_l\overline{A_1A_2A_3\cdots\cdots A_n}$＝射影$_l\overline{A_1A_n}$．　　（1—6）

证明　设点A_1、A_2、A_3、……A_n在轴l上的射影分别为A_1'、A_2'、A_3'、……A_n'（图8），则

射影$_l\overline{A_1A_2\cdots\cdots A_n}$＝射影$_l\overline{A_1A_2}$＋射影$_l\overline{A_2A_3}$＋……＋射影$_l\overline{A_{n-1}A_n}$ ＝$A_1'A_2'+A_2'A_3'+\cdots\cdots+A_{n-1}'A_n'$．

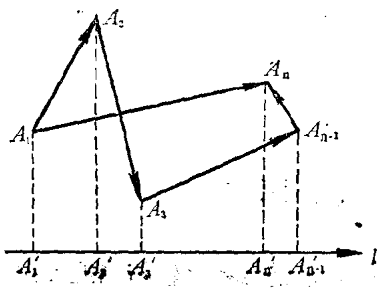

图　8

由公式（1—4），得
$A_1'A_2'+A_2'A_3'+\cdots\cdots+A_{n-1}'A_n'=A_1'A_n'$．

而　$A_1'A_n'$＝射影$_l\overline{A_1A_n}$，

∴射影$_l\overline{A_1A_2\cdots\cdots A_n}$＝射影$_l\overline{A_1A_n}$．

显然，有共同起点和终点的两个有向折线在同一轴上的射影相等。封闭线段在轴上的射影等于零。

例2　线段AB在互相垂直的两轴l_1和l_2上的射影的长分别是5和3，轴l_1与轴l的交角是$\frac{\pi}{6}$，求有向线段$\overline{AB}$在轴l上的射影。

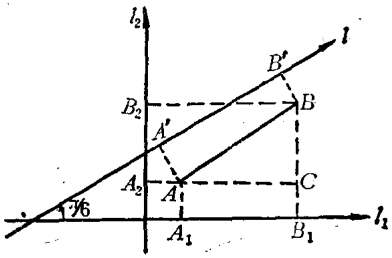

图　9

解　设A、B在轴l_1、l_2和l上的射影分别是A_1、B_1，A_2、B_2和A'、B'，延长A_2A交BB_1于C(图9)，则$\overline{AB}$是有向折线$\overline{ACB}$的封闭线段，由公式(1—6)，得

$$\text{射影}_l AB=\text{射影}_l AC+\text{射影}_l CB,$$

而　$$\text{射影}_l\overline{AC}=AC\cos(\widehat{l_1,\ l})=5\cos\frac{\pi}{6}=\frac{5\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{射影}_l\overline{CB}=CB\cos(\widehat{l,\ l_2})=3\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2},$$

$$\therefore\ \text{射影}_l\overline{AB}=\frac{3+5\sqrt{3}}{2}.$$

§2　平面直角坐标系

在生产实践与科学研究中，常常需要比较精确地刻划一个物体的位置。刻划一个物体位置的方法，就是选取一个或几个物体作为参照，按一定的方法来标明这一物体与其他物体相互位置的关系，在有了一定的度量单位以后，相互位置的关系通常都是用数来表示的。前面介绍的有向线段的值的概

念，把有向线段与数联系起来．下面我们进一步研究怎样把点与数联系起来，从而给出表示点的位置的方法．为此，先谈直线上点的坐标，后谈平面上点的坐标．

1．直线上点的坐标　对于一轴，如果在其上选定一点O作为起点，叫做原点，并取定一个长度单位（图10），则对于该轴l上任意一点P，对应于一条有向线段$\overline{OP}$，记有向线段$\overline{OP}$的值为x，即$OP=x$，于是轴l上每一点P，必有且仅有一实数x与它对应，数x的绝对值等于有向线段$\overline{OP}$的长度，符号的正负取决于有向线段$\overline{OP}$的方向与轴l的方向是否一致．即$\overline{OP}$的方向与轴l的正向相同时，x是正数；$\overline{OP}$的方向与轴l的正向相反时，x是负数；点P与O重合时，x等于零．

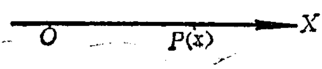

图　10

倒过来，对于每一实数x，轴l上必有且仅有一个点P与它相对应，点P是有向线段$\overline{OP}$的终点．$\overline{OP}$的长度等于x的绝对值，它的方向取决于x的符号：当x是正数时，$\overline{OP}$的方向与轴l的正向相同；当x是负数时，$\overline{OP}$的方向与轴l的正向相反；当x等于零时，点P与O重合．

这样，轴l上所有的点便与全体实数建立了一一对应的关系，轴l上的点P所对应的实数x，叫做点P的**坐标**，记成$P(x)$．

象这样确定了原点、方向与单位长的轴l，叫做**直线坐标**，或叫做**数轴**．建立了直线上的点和实数间的对应关系，叫做在直线上建立了**坐标系**．

直线上建立了坐标系之后，点的位置可用实数来表示，因而它上面的有向线段的值与长度，也就可以用线段的端点的坐标来表示．

对于数轴上任意两点A、B，由基本关系式(1－3)，得