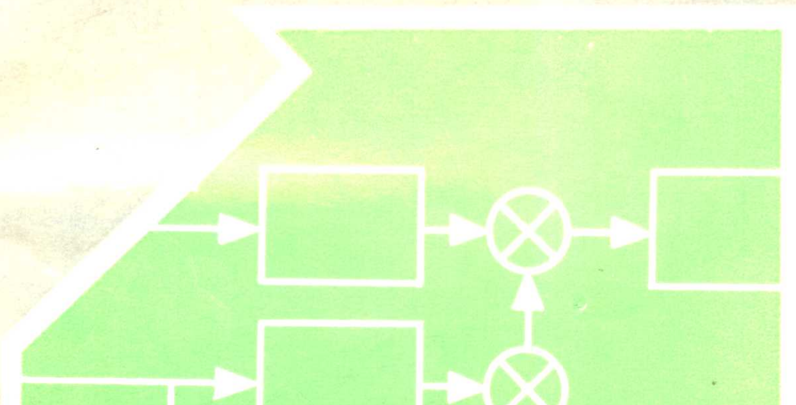
最优控制理论与应用

冯国楠 编著



北京工业大学出版社

最优控制理论与应用

冯 国 楠 编著

北京工业大学出版社

内 容 简 介

本书介绍确定性最优控制理论与应用。主要内容包括：变分法及其在最优控制问题中的应用；极小值原理；最短时间控制、最省燃料控制及其综合方法；线性二次型最优调节器及有补偿输入的线性最优调节器；线性最优伺服系统的综合及应用实例；有扰动输入的线性最优调节器和鲁棒调节器；多级决策过程和离散动态规划；离散线性二次型最优调节器和离散状态观测器综合方法与应用实例；Hamilton-Jacobi方程和连续动态规划。

本书可作为高等院校自动化专业研究生教材和本科生选修教材，也可作为有关专业师生及自动化技术领域里工程技术人员的自学参考书。

最优控制理论与应用
冯国楠 编著
*
北京工业大学出版社出版发行
各 地 新 华 书 店 经 销
北京通县燕山印刷厂印刷
*
1991年10月第一版 1991年10月第一次印刷
850×1168毫米 32开本 11.375印张 283千字
印数：1～1900册
ISBN7-5639-0152-3/TP·6
定价：3.40元

前　言

本书根据我多年来在北京工业大学自动化系为研究生和自动控制专业本科大学生讲授最优控制课程的讲义和讲稿改写而成。我的最早的一本最优控制讲义是为1979年暑假在中国自动化学会教育工作委员会举办的全国首届现代控制理论学习班上讲授这门课程而编写的。在这本讲义以及其后几年讲授这门课程的讲稿的基础上，进行了修改与补充，于1984年由北京工业大学印刷厂印成讲义。这本讲义曾得到上海交通大学张钟俊教授的热情支持。1986年，又进行了局部修改，增添了若干新内容，补充了一些实例，根据教学上的要求，又编入了相应的习题，改名为最优控制理论与应用，由北工大再次印成讲义。上述这些讲义不仅被北京工业大学自动化系所采用，也曾先后被国内多所兄弟院校选作教材或教学参考书。这次由北京工业大学出版社正式出版时，又进行了较大的修改、删节和补充。

本书针对工科大学的特点，从工程应用的角度出发，较系统地介绍了最优控制的基本理论及其在工程实际问题中的应用。全书共分五章：第一章介绍经典变分法及其在最优控制问题中的应用；第二章介绍极小值原理；第三章讨论最短时间问题及最少燃料问题；第四章讨论线性最优控制问题；第五章讲述动态规划及其应用。另外，在附录里介绍了矩阵和矢量的某些运算法则，为尚未学习这方面知识的读者学习正文时参考。

本书可用作自动化专业研究生及自动控制专业本科大学生教材，也可用作自动化技术领域里工程师及其它有关专业师生的参考书。

由于水平有限，缺点错误在所难免，敬请读者不吝指教。

冯国楠

1991年2月

于北京工业大学

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　录

绪　论

60年代前后迅速发展起来的第二代控制理论，即现代控制理论，以多变量控制、最优控制、最优估计和自适应控制为主要内容。其中最优控制是现代控制中发展较早，至今仍然十分活跃的一个领域，它是现代控制理论和实践的一个中心课题。

最优控制包括确定性最优控制（Determinitic Optimal Control）和随机最优控制（Stochastic Optimal Control)。如果受控系统的特性是固定的，或者在某一段时间里是固定的，并且系统内不存在随机干扰，这类系统的最优控制问题属于确定性最优控制问题。如果系统内存在随机噪声，便不能精确地确定系统的状态，而只能根据统计数据来估计它的状态，这就是状态估计问题。把最优控制问题同状态估计问题结合在一起便构成随机最优控制问题。本书只限于研究确定性最优控制问题。

一、最优控制问题的提出

那么，最优控制问题是怎么提出来的？它与常规控制有什么区别？

众所周知，在常规控制中是用上升时间、最大过调量、过渡过程时间、稳态误差这样一些品质指标来评价系统品质优劣。采用的方法，无论是频率法还是根轨迹法，都是试凑法。设计结果通常不是最优的。

与此同时，也有人提出另外一种评价方法，并把这种评价方法称为积分评价法。它要求按过渡过程期间误差平方的积分

$$\int_0^{\infty} e^2(t)\mathrm{d}t \tag{0-1}$$

达到最小来设计系统。式中$e(t)$表示误差。不难看出，这要比单独用上升时间、最大过调量等，来评价系统的品质更全面些。这就是最优控制思想的萌芽。

进一步，如果不仅对误差有限制，而且对误差变化率以及在控制过程中消耗的能量也有限制，这就需要进一步发展积分评价法的思想，把这些要求统一在一个评价函数中，以求得在总体上达到最优。

把式（0-1）改写成

$$\int_0^{\infty}[e^2(t)+q\dot{e}^2(t)+ru^2(t)]\mathrm{d}t$$

式中$\dot{e}(t)$表示误差的导数，$u(t)$表示控制函数，q和r是两个正常数，其大小反映了对相应的那一项的限制程度，称为权系数。通常选择$u(t)$使这个积分达到最小作为准则来设计系统的问题，就是一种较普遍的，称为基于二次型性能指标的最优控制问题。

我们把这个积分记为J，其表达式为

$$J=\int_0^{\infty}[e^2(t)+q\dot{e}^2(t)+ru^2(t)]\,\mathrm{d}t \tag{0-2}$$

它是一个纯量函数，也是评价系统性能优劣的准则。这个准则称作评价函数、目标函数、性能泛函或性能指标。

现代技术的进展，尤其是空间技术和大型工业企业的迅速发展，对控制系统提出了愈来愈高的要求，这些要求是多方面的。比如要求控制过程中消耗的燃料最少、消耗的能量最少、经过的时间最短，以及产量达到最高、成本降到最低，如此等等。于是出现了最省燃料控制问题、最少能量控制问题、最短时间控制问题，…。最优控制理论就是为了解决上述种种问题而产生和发展起来的。

二、最优控制问题举例

为了进一步说明最优控制问题是怎么提出来的，以及怎样把一个最优控制问题用数学的语言描述出来，下面介绍几个实例。

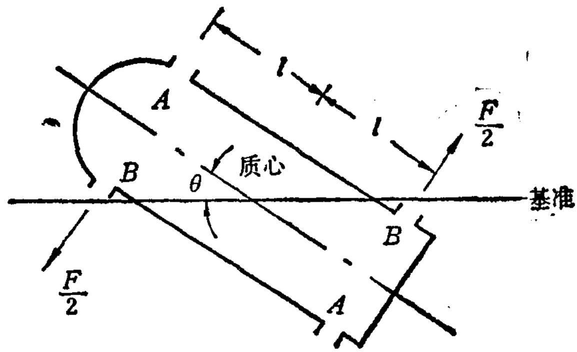


图 0-1

例0-1　姿态控制问题

图0-1是人造卫星姿态控制示意图。小喷嘴喷出燃料时产生的反作用力可以使卫星体旋转并进入要求的姿态。用A和B表示的两组斜对称配置的喷嘴是成对工作的。

如果在某时刻t_0卫星体偏离要求的姿态一个$\theta(t_0)$角，并且正以$\dot{\theta}(t_0)$的角速度继续偏离。要求从t_0时刻起加上适当的控制力，使卫星经过最短时间重新回到要求的姿态。如果用t_f表示终端时间，则要求$\theta(t_f)=0$，$\dot{\theta}(t_f)=0$，并且使t_f-t_0最小。

假设卫星体绕质心的转动惯量为J_m，每个小喷嘴产生的反作用力为$F/2$，它对轴线的垂足与质心间的距离为l，那么，作用在卫星体上的力矩为

$$2\frac{F}{2}l=Fl$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

在它的作用下，卫星体产生的角加速度为

$$\ddot{\theta}(t)=\frac{Fl}{J_m} \tag{0-3}$$

令

$$u(t)=\frac{Fl}{J_m}$$

$u(t)$称为控制，于是式(0-3)变成

$$\ddot{\theta}(t)=u(t) \tag{0-4}$$

选择$x_1(t)=\theta(t), x_2(t)=\dot{\theta}(t)$做为一组状态变量，可得

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t), \dot{x}_2(t)=u(t)$$

或写成矢量形式

$$\dot{x}=Ax+Bu \tag{0-5}$$

其中

$$x=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

由题意，系统初始状态为

$$x(t_0)=\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \theta(t_0) \\ \dot{\theta}(t_0) \end{bmatrix} \tag{0-6}$$

终端状态是

$$x(t_f)=\begin{bmatrix} x_1(t_f) \\ x_2(t_f) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{0-7}$$

由于小喷嘴可以产生的最大反作用力是有限的，因此，控制变量$u(t)$有限，它的绝对值不大于某个数值，即

$$|u(t)|\leqslant U_m \tag{0-8}$$

式中U_m为一正常数。

在这个问题中要求

$$J=t_f-t_0 \tag{0-9}$$

达到最小。这就是上述姿态最优控制问题的性能指标。

这个问题的提法是：在系统状态方程（0-5)和控制变量不等式（0-8)的约束下，选择控制变量$u(t)$，把系统(0-5）从某个初

始状态$x(t_0)$转移到所要求的状态$x(t_f)$（在这里是状态平面的原点），且使性能指标（0-9）达到最小。

这是一个最短时间问题。

在姿态控制问题中还可以从另外一种观点对控制系统提出要求，例如要求在控制过程中消耗燃料最少。

反作用力F是由于从小喷嘴喷射出高速燃料（推进剂）产生的，其大小与单位时间里喷射出燃料的数量成正比。若由A喷射出时F为正，则由B喷射出时F为负。但是，单位时间里消耗的燃料总是正的，它与F的绝对值成正比，因而与$u(t)$的绝对值也成正比。于是，最省燃料问题的性能指标可以定义为

$$J=\int_{t_0}^{t_f}|u(t)|\mathrm{d}t \tag{0-10}$$

这样一来，姿态控制问题的提法就变成：在系统方程(0-5)和控制变量不等式（0-8)的约束下，寻找控制函数$u(t)$，把系统(0-5)从某个初始状态$x(t_0)$转移到状态平面原点，且使性能指标(0-10)达到最小。

这是一个最少燃料问题。

如果在要求少消耗燃料的同时，还要兼顾时间也要短，那么，性能指标可以定义为

$$J=\int_{t_0}^{t_f}[\rho+|u(t)|]\mathrm{d}t \tag{0-11}$$

式中权系数ρ的大小表示了燃料同时间的相对重要性。若要求动作快，则加大ρ；若强调省燃料，则减小ρ。基于性能指标(0-11)的最优控制问题，称为燃料-时间问题。

例0-2 最优推力方向角选择问题

设推力ma作用于质量为m的质点，质点在二维空间里的运动用惯性坐标系x、y来确定位置。质心的速度分量分别为u和v，推力方向角$\beta(t)$是控制变量，它是时间t的函数。设重力加速度和空气阻力忽略不计，推力加速度a是时间的已知函数。规定终

端时间为t_f，终端时间质点的垂直坐标为h，如图0-2所示。试确定推力方向角随时间变化的规律，使终端时间的水平速度$u(t_f)$达到最大。

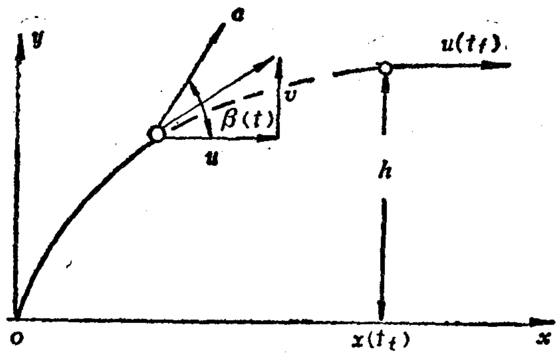


图 0-2

由力学定律可列出系统状态方程：

$$\dot{u}=a\cos\beta,\quad \dot{v}=a\sin\beta$$
$$\dot{x}=u,\qquad \dot{y}=v$$

把它们写成向量形式：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t),\beta(t)] \tag{0-12}$$

式中

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u\\ v\\ x\\ y\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(t),\beta(t)]=\begin{pmatrix} a\cos\beta(t)\\ a\sin\beta(t)\\ u(t)\\ v(t)\end{pmatrix}$$

这个问题的初始条件是

$$\left.\begin{aligned} x_1(0)=u(0)=0\\ x_2(0)=v(0)=0\\ x_3(0)=x(0)=0\\ x_4(0)=y(0)=0\end{aligned}\right\} \tag{0-13}$$

终端条件为

$$\left.\begin{aligned} x_1(t_f)&=u(t_f)\ \text{未规定}\\ x_2(t_f)&=v(t_f)=0\\ x_3(t_f)&=x(t_f)\ \text{未规定}\\ x_4(t_f)&=y(t_f)=h \end{aligned}\right\} \tag{0-14}$$

性能指标为

$$J=x_1(t_f)=u(t_f) \tag{0-15}$$

对于上述问题而言，控制变量$\beta(t)$不受限制，可以任意选取。于是，最优推力方向角选择问题的提法是：在系统方程(0-12)的约束下，寻找控制函数$\beta(t)$，使质点在$t=0$时从零状态出发，在规定终端时刻t_f到达规定高度h，并且使水平速度$u(t_f)$达到最大。

三、最优控制问题的提法

通过以上分析容易看出，要把一个最优控制问题用数学描述出来，一般应当包括以下几方面内容：

1．表示受控系统动力学特性的系统状态方程

$$\dot{x}=f[x(t),u(t),t] \tag{0-16}$$

这是系统方程(0-5)和(0-12)的一般化。其中$x(t)$表示状态矢量，$x(t)\in R^n$；$u(t)$表示控制向量，$u(t)\in R^m$；t是独立变量，$t\in[t_0,t_f]$，通常表示时间（但并不总是表示时间）。若受控系统是线性时变的或时不变的，则相应的系统方程可表示为

$$\dot{x}=A(t)x(t)+B(t)u(t)$$

和

$$\dot{x}=Ax(t)+Bu(t)$$

其中$A(t)$、$B(t)$分别为$n\times n$维和$n\times m$维时变矩阵，A、B都是分别具有相应维的定常矩阵。

2．系统初始状态，即初始时刻t_0时的状态$x(t_0)$。通常在最优控制问题中，$x(t_0)$是已知的。

3. 目标集S。一切容许终端状态的集合称为目标集，$x(t_f)\in S$。在例0-1中，S是状态平面上的一个点，即状态平面的原点；在例0-2中，S是状态空间中一切满足$x_2(t_f)=0$ 和 $x_4(t_f)=h$ 的点的集合，为状态空间中的一个曲面。若终端状态不受任何限制，则S扩展到整个状态空间。一般地说，容许的终端状态可用下列约束条件表示：

$$h_1[x(t_f),t_f]=0\text{和}h_2[x(t_f),t_f]\leqslant 0$$

式中h_1，h_2分别为q维和p维矢量函数。这时目标集可以表示为

$$S=\{x(t_f):x(t_f)\in R^n,h_1[x(t_f),t_f]=0,\ h_2[x(t_f),t_f]\leqslant 0\}$$

终端时间分为固定的和自由的。在例 0-1 中未预先规定t_f，属于自由终端时间问题；在例0-2中，t_f是预先规定的，属于固定终端时间问题。

4. 容许控制的集合$\mho$。每一个实际的控制问题，控制矢量$u(t)$都有一个规定的取值范围。这个取值范围对应于m维控制空间R^m中的一个集合$\mho$。$u(t)$的每一个取值对应于$\mho$中的一个元。属于$\mho$中的控制称为容许控制。在例0-1中，$|u(t)|\leqslant U_m$，容许控制属于某一闭集；在例0-2中$\beta(t)$的取值是不受限制的，容许控制属于某一开集。

5. 性能指标。性能指标一般可表示为

$$J=\Phi_1[x(t_f),t_f]-\Phi_2[x(t_0),t_0]+\int_{t_0}^{t_f}L[x(t),u(t),t]\mathrm{d}t \tag{0-17}$$

这是式（0-2）、（0-9）、（0-10）、（0-11）和（0-15）的一般化，式中$\Phi_1[x(t_f),t_f]$、$\Phi_2[x(t_0),t_0]$和$L[x(t),u(t),t]$都是对$x(t)$和t连续可微的纯量函数。

综上所述，最优控制问题的提法是：在系统方程(0-16)的约束下，在容许控制的集合$\mho$中，寻找控制矢量$u(t)$，$t\in[t_0,t_f]$，把系统(0-16)由给定初始状度$x(t_0)$转移到目标集S上的某个终端状态$x(t_f)$，且使性能指标(0-17)达到最大（或最小）。这个控制

称为最优控制，记为$u^*(t)$。在最优控制$u^*(t)$作用下系统方程(0-16)的解，在状态空间里是起始于$x(t_0)$，终止于$x(t_f)$的一条轨线。这条轨线称为最优轨线，并记为$x^*(t)$。

最优控制系统有开环的，也有闭环的。通常，开环系统中的最优控制u^*表示为时间t的函数，称为最优程序问题，其中最优推力方向角选择问题就是一例；在闭环控制系统中的最优控制u^*，则表示为状态$x(t)$的函数，其中姿态控制问题就是一例。图0-3(a)和(b)分别表示开环控制和闭环控制的结构图。

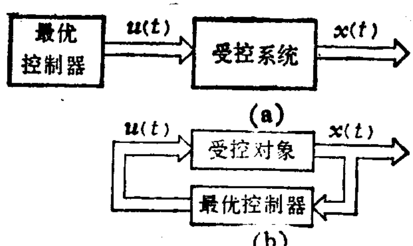


图 0-3

四、最优控制问题的研究方法

综上所述，最优控制问题就是在多种约束条件下寻找控制矢量$u(t)$，使某个性能指标J取极值。这个纯量函数J是矢量$x(t)$、$u(t)$的函数，而$x(t)$、$u(t)$又都是独立变量t的函数。换句话说，函数J是一个或一些函数的函数，这个函数J的值取决于这个或这些函数的选取。在数学上，把这类函数的函数称做泛函。由此可见，一个最优控制问题，归结为求某个泛函的条件极值问题。研究泛函的极值在数学上已形成一个独立的分支，叫做变分法。因此，变分法是研究最优控制问题的重要数学基础。

但是，经典变分法在解决实际最优控制问题时有很大局限性，它只适用于容许控制属于开集的那一类最优控制问题。而许多实际工程控制问题，比如姿态控制问题，往往带有控制变量不

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com