·高等学校教学用书·

模糊数学及其应用

GAODENG XUEXIAO JIAOXUE YONGSHU

冶金工业出版社

高等学校教学用书

模糊数学及其应用

北京科技大学

李安贵　张志宏　段凤英　编

冶金工业出版社

(京)新登字036号

高等学校教学用书

模糊数学及其应用

北京科技大学　李安贵　张志宏　段凤英　编

*

冶金工业出版社出版

(北京北河沿大街嵩祝院北巷39号)

新华书店总店科技发行所发行

河北省三河市印刷厂印刷

*

850×1168 1/32　印张 9.875　字数 258 千字

1994年6月第一版　1994年6月第一次印刷

印数1～1300册

ISBN 7-5024-1401-0

G·47（课）定价5.10元

前　言

模糊数学是近30年来发展起来的一门新兴学科，她以其崭新的理论和独特的方法，冲破了精确数学的局限性，巧妙地处理了客观世界中存在着的模糊性现象，在自然科学和社会科学的许多领域取得了令人瞩目的成果，显示出强大的生命力和渗透力.

本书是编者在多年教学实践和科学研究的基础上，参考了国内外多种模糊数学的著作和有关文献写成的，在编写时注意了下列方面：

（一）系统地介绍模糊数学的基本内容和应用方法，力求做到理论紧密联系实际，使读者通过对本书的学习，能够打下较为牢固的模糊数学基础，学会应用模糊数学的理论和方法分析和解决实际问题．书中不涉及抽象难懂的纯理论内容，只要具备高等数学和工程数学的一般基础，就能读懂全书.

（二）叙述循序渐进，深入浅出，理论推导力求严谨，方法的说明尽可能详尽，便于读者自学.

（三）除基本概念、基本理论和基本方法的介绍以外，还适当配有习题，书后附有答案，以便读者检查学习效果.

全书共分十二章，前六章着重介绍模糊数学的基本概念和基础理论，后六章着重介绍模糊数学的应用方法．

段凤英编写第一章第一节和第十一章，并写了绪论；张志宏编写第九章，并为各章配备了习题，给出了答案；其余章节由李安贵编写并统一成稿.

北京师范大学罗承忠教授和北京科技大学刘钦圣教授曾审阅本书初稿，并提出许多宝贵意见，在此谨向他们表示衷心感谢.

根据我们的实践，40学时可讲授除第四、五、十、十二章以

外的内容，70学时可讲完全部内容，教师在讲授时可根据学时和专业培养要求灵活掌握.

本书可作为大专院校工科、财经和管理类高年级大学生及研究生的教科书，也适合于广大科技工作者自学和参考.

由于我们水平有限，书中难免出现疏漏或错误之处，恳请读者批评指正.

作者　谨　识

1993年4月于北京

符 号 表

$\underset{\sim}{4}$	模糊正整数 4
$\hat{X}$	关系方程的最大解
$\check{X}$	关系方程的极小解
x^*	模糊最优解
$\vert\underset{\sim}{A}\vert$	$\underset{\sim}{A}$的基数
$\Vert\underset{\sim}{A}\Vert$	$\underset{\sim}{A}$的相对基数
$\underset{\sim}{A}^c$	$\underset{\sim}{A}$的余集
$\boldsymbol{A}_\lambda$	$\underset{\sim}{A}$的 λ-截集
$\boldsymbol{A}_\lambda$	$\underset{\sim}{A}$的 λ-强截集
$[x]_R$	关于R的等价类
R_U	R在U中的投影
$\underset{\sim}{R}_U$	$\underset{\sim}{R}$在U中的投影
$R\vert_u$	R在 u 处的截影
$\underset{\sim}{R}\vert_u$	$\underset{\sim}{R}$在 u 处的截影
$d(\underset{\sim}{A})$	$\underset{\sim}{A}$的模糊度
$r(\underset{\sim}{A})$	$\underset{\sim}{A}$的自反闭包
$s(\underset{\sim}{A})$	$\underset{\sim}{A}$的对称闭包
$t(\underset{\sim}{A})$	$\underset{\sim}{A}$的传递闭包
$t(\alpha, \sigma)$	三角模糊数
$\mathrm{dph}\,\underset{\sim}{A}$	$\underset{\sim}{A}$的深度
$\exp(y)$	e 的 y 次方
$\mathrm{hgt}\,\underset{\sim}{A}$	$\underset{\sim}{A}$的高
$\inf(x)$	x 的下确界

$\ker\underset{\sim}{A}$	$\underset{\sim}{A}$的核
$\sup(x)$	x 的上确界
$\mathrm{Supp}\,\underset{\sim}{A}$	$\underset{\sim}{A}$的支撑集
$A\times B$	Descartes积
$\underset{\sim}{A}\circ\underset{\sim}{B}$	内积
$\underset{\sim}{A}\odot B$	外积
$\underset{\sim}{I} * \underset{\sim}{J}$	二元模糊运算
U, V, X	论域
A, B, C	集合
u, v, a	元素
$\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{C}$	模糊集
$\underset{\sim}{R}, \underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{S}$	模糊关系
$A(u), B(u)$	A, B的特征函数
$\underset{\sim}{A}(u)$, $\underset{\sim}{B}(u)$	$\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}$的隶属函数
$x\equiv y\,(\mathrm{mod}\,k)$	同余
f: $A\to B$	映射
f^{-1}: $B\to A$	逆映射
$g\circ f$: $A\to C$	复合映射
T: $\mathscr{P}(A)\to\mathscr{P}(B)$	

符 号 表

	变换
$\underset{\sim}{f}: U \to \mathscr{F}(V)$	模糊映射
$\underset{\sim}{T}: \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$	模糊变换
$\mathscr{U}$	普通命题集合
$\mathscr{N}$	模糊命题集合
$\mathscr{P}(U)$	U的幂集
$\mathscr{F}(U)$	U的模糊幂集
$\mathscr{M}_{m\times n}$	$m\times n$模糊矩阵集合
$\mathscr{V}$	$c\times n$实矩阵集合
$\mathscr{L}$	偏序的扩张线性序集
$\mathscr{T}$	钻井有效探测范围集
$\forall$	任意
$\exists$	存在
$\in$	属于
$\overline{\in}$	不属于
Φ	空集
$\supseteq$	包含
$\subseteq$	被包含

$\to$	蕴涵
$\mapsto$	映射对应法则
$\leftrightarrow$	等价
$\Leftrightarrow$	当且仅当
$\triangleq$	右边定义左边
$\hat{=}_0$	非常非常小的数
$\lessapprox$	近似小于等于
$\prec$	偏序关系
$\cup$	并
$\cap$	交
$\vee$	取大，或
$\wedge$	取小，且
$\setminus$	差
$/$	商
$\neg$	非
$\hat{+}$、$\wedge$	概率算子
$\oplus$、$\dot{\ominus}$	有界算子
$\overset{+}{\varepsilon}$、$\overset{\cdot}{\varepsilon}$	Einstein算子
$\overset{+}{r}$、$\overset{\cdot}{r}$	Hamacher算子
$\underset{v}{\curlywedge}$、$\underset{v}{\curlyvee}$	Yager算子
$\perp_p$、$\top_p$	Schweizer-Sklard算子
$\wedge^*$、$\vee^*$	模糊算子

目　录

绪　论

什么是模糊数学

当我们初次见到模糊数学这一名词时，可能会感到新奇，甚至迷惑不解.数学，从来都是与精确联系在一起的，怎么会有“模糊”的数学呢？模糊数学是一门什么样的学科？它的研究对象是什么？研究问题和解决问题的方法又是什么呢？

模糊一词来自英文Fuzzy，意思是“模糊的”，“(形状或轮廓)不清楚”等等，总之，这个词意味着界限不明确.

我们所说的模糊数学决不是“模糊的”或“含糊的”数学，而是涉足模糊性现象领域的数学，是运用数学方法研究和处理带有模糊性现象的一门新兴学科，它的创始人是美国加利福尼亚大学著名的控制论专家L.A.Zadeh教授.

什么是模糊性现象呢？所谓模糊性，是指事物的亦此亦彼性，反映在概念形成过程中外延的不分明性.“健康”一词在人群中难以找到确切的外延，我们很难将一群人硬性地划分成健康人与不健康人两部分，这就叫做模糊性现象.模糊性现象的本质在人们头脑中的反映，就形成了模糊概念.在生活和工作中，我们经常运用模糊概念，比如刚才提到的“健康”.

再比如，有一个学生要找某位老师，只知道这个老师是个高个子，长着大胡子，南方口音.这里的“高个子”、“大胡子”、“南方口音”都是模糊概念.因为身高多少厘米算得上“高个子”？脸上有多少平方厘米长着胡子、每平方厘米又长着多少根胡子可称为“大胡子”？还有，怎样发音吐字可谓“南方口音”？这些很难用精确的数学语言描述.但是，如果对这位老师比较熟悉，就可以凭借这几个模糊信息，通过对以往大脑中储存的各种

信息的比较、判断、推理，确定要找的那位老师．在这里，大脑实际上进行了模糊判断和推理．

人脑不仅有模糊判断和推理的功能，而且还有模糊控制的能力．比如我们要把放在桌子上的一个鸡蛋拿起来，究竟用多大的力才能拿起来而又不致于把它捏碎呢？我们不需要对力进行精确的计算，只要通过视觉、触觉等感觉，经过几次信息反馈和力的调整，就能恰如其份地把鸡蛋拿起来．诸如此类的例子不胜枚举．这表明了大脑既象一台数字计算机，又象一台模拟计算机，既能处理各种精确的信息，也能处理各种模糊信息，而在处理模糊信息方面，人脑往往有独到之处，常常是计算机无法比拟的．

在日常生活中，我们还大量使用模糊性语言．谈论天气时常讲“天气晴好”，“风力不大”；描述一个人时，我们常说这个人“长得漂亮”或“长相一般”；评价某人工作时，往往说“治学严谨”，“工作认真”；等等，这些都是模糊性语言．正如难以说清楚一个人的五官形状、相对位置、肤色、身材、气质等怎样搭配的人才称为“漂亮”一样，很多问题是很难给出确切的统一的标准的，然而我们却能够理解其中的含义．这说明我们已经习惯用一些模糊性语言来描述事物，表达个人情感，用模糊的方法来思考问题、进行推理，从中得出清晰、明确的结论．

事实上，世界上许多事物都具有模糊性的特点，即客观事物在差异中间过渡时所表现出的“亦此亦彼”性．可以毫不夸张地说，我们几乎随时随处都会遇到模糊性现象．

概括地说，模糊数学就是把客观世界中的模糊性现象作为研究对象，从中找出数量规律，然后用精确的数学方法来处理的一门新的数学分支．它为人们研究和解决那些复杂的、难以用精确的数学描述的问题，提供了一种简捷而有效的方法．

模糊数学产生的历史背景

1965年，Zadeh教授著名的论文《模糊集合》(Fuzzy Sets, Information and Control）的发表，标志着一个新学科——模

糊数学的诞生.

Zadeh教授通过长期对控制论的研究，深刻地感到了精确数学的局限性，即有时不能准确地描述客观现实. 这方面的例子我们都能碰到，比如在看电视时，要把图象调得更清晰一些，这个连孩子都能做的事，却成了电子计算机的一大难题. 再比如，要把汽车停在拥挤的停车场上的一个空位上，有经验的司机能很快做到，而让计算机控制却难以实现. 其原因就在于把电视图象调得“更清晰一些”和找到拥挤停车场上的“可停下一辆车”的空位都是模糊概念，它们难以用精确的数学语言来描述，因而难以由计算机控制. 再有，现有的数学很难在生物学、心理学及社会科学领域中发挥更大作用，不是因为这些学科太简单，不必应用数学. 恰恰相反，是因为这些学科的规律太复杂，现有的数学无法准确地反映它们的真实面貌. Zadeh教授从重新研究数学的基础——集合论入手，发现了问题的症结所在. 集合论是以形式逻辑的同一律.矛盾律和排中律为基础的，它要求客观事物绝对的“非此即彼”. 为达到精确严格的目的，人们在研究过程中，舍弃了事物本身特有的或多或少存在着的模糊性，把客观事物简单化，把思维过程绝对化、典型化。这样一来，就使得数学这门素以严谨精确著称的科学方法，却不能完全反映客观事物的本来面目了. 为了对客观事物进行更准确的描述，Zadeh教授将普通子集的特征函数发展为模糊子集的隶属函数，将二值逻辑（即非此即彼，如真为“1”，则假为“0”）改造为多值逻辑，即把 {0，1} 扩充为〔0，1〕区间，用〔0，1〕内的数来描述事物的模糊性. 这些突破性的工作为计算机模拟人脑的某些思维方法，提高计算机的能力开辟了新的天地.

由此可知，计算机科学的飞速发展对模糊数学起了催生的作用，而模糊数学又使计算机在各领域中发挥出更大作用. 可以这样说，模糊数学的产生与发展有着明显的时代特点，它是与计算机科学、人工智能和系统工程的发展息息相关的.

模糊数学与概率论的关系

模糊数学与概率论是两个不同的学科，但这两门学科间又有某些相似的地方，因而一些对模糊数学不够了解的人往往分不清二者的区别，甚至认为模糊数学只是概率论的一个分支，这是一种错误的认识．

模糊数学与概率论所研究和处理的是两类不同的不确定性．模糊数学研究和处理的是具有模糊性的模糊现象，而概率论研究和处理的是具有随机性的随机现象．它们的共同点可归纳为：

（1）二者处理的都是不确定性问题；

（2）度量这种不确定性的数都在〔0，1〕闭区间上取值．

它们的不同点（本质区别）可归纳为：

（1）在概念上，概率论研究的随机现象，事件本身有明确的含义，即概念本身是清楚的．模糊数学研究的模糊现象，它所处理的事物概念本身是模糊的，没有明确的外延；

（2）根源上，随机性是由于发生的条件不充分，而使得在条件与事件之间不能出现决定性的因果关系引起的，这是因果律的一种破缺．模糊性是由于概念外延的不分明造成的，是排中律的一种破缺；

（3）在手段上，概率论是从随机性中去把握广义的因果律——概率规律；模糊数学则是从模糊性中去确立广义的排中律——隶属规律．

需要指出的是，尽管随机性与模糊性有着本质的不同，但是二者之间却是可以相互渗透的．在现实生活中，这两种不确定性同时存在的场合很多．例如，在气象科学中会讲“某某地区明年夏季出现暴雨天气的可能性很大”，这里“暴雨”是模糊事件，而“可能性很大”则用了概率语言．再如，在解决城市交通拥挤问题时，要求做到交通“基本上畅通”、“大部分畅通”，这些都具有“模糊性”和“概率性”，可见在解决问题时，把二者结合起来

考虑是十分重要的，由此就产生了模糊概率.

模糊数学的现状与发展前景

模糊数学诞生至今还不到30年，但其发展速度却超过了许多应用数学的学科.

首先从每年发表论文的数量看. 据统计：1965年2篇，1968年22篇，1970年69篇，1972年169篇，1974年395篇，1976年522篇，1980年1500篇（其中博士论文200篇)，到1990年，已达到7300篇以上.

其次从论文涉及面来看，可以说模糊数学的应用触角已涉及到自然科学、社会科学的各个领域，尤其在冶金、气象学、生物学、心理学、电子学、计算机科学、控制论、物理学、信息论等学科领域中，模糊数学显示出强大的渗透力.过去不能应用数学的学科，应用了模糊数学后，取得了显著的成果. 不仅如此，目前还出现了利用模糊逻辑的原理制造的全自动洗衣机、全自动烤炉等“模糊产品”.

我国的模糊数学研究工作开始于70年代，虽然起步较晚，但发展十分迅速，并已取得了许多可喜成果.在二十几年的时间里，研究队伍从无到有，从小到大，成立了专业学会，编辑学术杂志，举办学术研讨会，研究成果不断出现. 我国已在几十所高校的研究生和大学生中开设了模糊数学及其应用的选修课，有的高校还列为必修课，已培养出硕士研究生和博士研究生. 目前公开出版的模糊数学书籍已有40多种.

在本学科中，我国与国外差距较小，在一些方面甚至处于国际领先地位. 我国是世界公认的模糊数学研究四大主力之一.

模糊数学开辟了一个新的研究领域，成为研究当代科学技术的有力工具. 有学者预测：90年代将是“模糊”的时代，让我们努力学习和掌握这门学科的知识，为我国的四化建设作出贡献.

第一章　模糊集合的基本概念

本章包括两部分内容，第一部分是复习普通集合论的一些基本内容．以便为我们引入模糊集的概念奠定基础．第二部分将给出模糊集合的定义、运算、性质以及它与普通集合的联系．

§1.1　普通集合简介

模糊集合是普通集合的推广和扩充，因此普通集合的理论是学习模糊集合的必备知识，考虑到读者对普通集合的知识已有一定基础，这里仅对基本内容做一简要回顾．

一、集合的概念

集合是一个不能精确定义的基本概念．一般地说，具有某种共同特点，彼此可以相互区别的个体构成的整体，就形成一个集合，而构成集合的个体称为集合的*元*或*元素*．比如，“桌子上的物品”，“全体自然数”……都是集合，而该桌上的台灯、词典就是“桌子上的物品”这个集合中的元素；数“1”、“5”是“全体自然数”集合中的元素．

集合通常用大写字母 A，B……来表示，而集合的元素则以小写字母 a，b……表示．当 a 是集合 A 的元素时，记 $a\in A$，读作“a 属于 A”，否则记 $a\overline{\in} A$，读作“a 不属于 A”．不含任何元素的集合称为空集，记为 Φ．

集合可分为有限集和无限集．*有限集*是指含有有限个元素的集合，*无限集*是指含无限个元素的集合．

我们在研究分析一个具体问题时，往往要先规定一个合适的范围，作为我们讨论该问题的出发点，称为*基点*．比如，要讨论“矿石的特性”，我们不必去考察一头牛或一匹布，只需先把我们的议题限制在“全体矿石”这个范围内，然后把所有矿石作为

讨论对象就行了．这个合适的范围称为论域（或全域）．论域一般用U、V……、X、Y……表示．

给定论域U，U中的某一部分元素构成的集合叫做U上的一个集合．

普通集合概念遵从二值逻辑，即给定论域U，以及U上的集合A，那么对于U上的任何元素u与A的关系只有两种可能：$u \in A$或$u \overline{\in} A$．因此要想确定U上的一个集合A，只需对U中的任一元素u，都能在

$$u \in A \text{和} u \overline{\in} A$$

二者之间作一选择就行了．

集合的表示法有三种：

（1）**列举法** 即把一个集合的元素全部列出，并用花括号括起来，如

$$A=\{a,b,c,d,e\},\quad B=\{1,3,5,7,9\};$$

（2）**定义法** 即用构成集合的定义来表示集合，也就是用集合中元素的共性来描述集合，这时采用记号

$$C=\{u\,|\cdots\cdots\},$$

花括号中竖线右方是对u的一种解释，它给出了C中元素的特征．这样通过花括号的描述，便可以明确集合的内容，比如，取$U=(0,+\infty)$，则 $C=\{u|u\in U,\ u\text{为偶数}\}$ 就表示由全体偶数构成的集合；

（3）**特征函数法** 关于如何用特征函数来描述集合，将在后面专门介绍．

设A、B是U上的两个集合，对于任意$u\in U$，若$u\in A$，则$u\in B$，便称B包含A，记作$B\supseteq A$，或称A被B包含，记作$A\subseteq B$。此时A叫做B的子集．

若$A\subseteq B$且$A\supseteq B$，则称A、B相等，记作$A=B$．

U中的任一集合A都是U的子集，即$A\subseteq U$．易知，U本身也是U的一个子集．若把“$\subseteq$”看作一种大小关系，那么U有最大子集和最小子集．最大子集即为其本身，最小子集即为空集Φ．