# 我們的工作目標

文明的進度，因素很多，而科學居其首。科學知識與技術的傳播，是提高工業生產、改善生活環境的主動力。在整個社會長期發展上，乃對人類未來世代的投資。從事科學研究與科學教育者，自應各就專長，竭智盡力，發揮偉大功能，共使科學飛躍進展，同將人類的生活，帶進更幸福、更完善之境界。

近三十年來，科學急遽發展之收穫，已超越以往多年累積之成果。昔之認爲若幻想者，今多已成爲事實。人類一再親履月球，是各種科學綜合建樹與科學家精誠合作的貢獻，誠令人無限興奮！時代日新又新，如何推動科學教育，有效造就科學人才，促進科學研究與發展，尤爲社會、國家的基本使命。培養人才，起自中學階段，此時學生對基礎科學，如物理、數學、生物、化學，已有接觸。及至大專院校專科教育開始後，則有賴於師資與圖書的指導啓發，始能爲蔚爲大器。而從事科學研究與科學教育的學者，志在貢獻研究成果與啓導後學，旨趣崇高，彌足欽佩！

本基金會係由徐銘信氏捐資創辦；旨在協助國家發展科學知識與技術，促進民生樂利，民國四十五年四月成立於美國紐約。初由旅美學人胡適博士、程其保博士等，甄選國內大學理工科優秀畢業生出國深造，前後達四十人，惜學成返國服務者十不得一。另曾贈送國內數所大學儀器設備，輔助教學，尚有微效；然審情度理，仍嫌未能普及，遂再邀請國內外權威學者，設置科學圖書編譯委員會，主持「科學圖書大庫」編譯事宜。以主任委員徐銘信氏爲監修人，編譯委員林碧鏗氏爲編輯人，各編譯委員擔任分組審查及校閱工作。「科學圖書大庫」首期擬定二千種，凡四億言。門分類別，細大不捐；分爲叢書，合則大庫。爲欲達成此一目標，除編譯委員外，本會另聘從事

翻譯之學者五百餘位，於英、德、法、日文出版物中精選最近出版之基本或實用科技名著，譯成中文，供給各級學校在校學生及社會大衆閱讀，內容嚴求深入淺出，圖文並茂。幸賴各學科之專家學者，於公私兩忙中，慨然撥冗贊助，譯著圖書，感人至深。其旅居國外者，亦有感於爲國人譯著，助益青年求知，遠勝於短期返國講學，遂不計稿酬多寡，費時又多，迢迢乎千萬里，書稿郵航交遞，其報國熱忱，思源固本，至足欽仰！

今科學圖書大庫已出版一千餘種，都二億八千餘萬言；尙在排印中者，約數百種，本會自當依照原訂目標，賡續進行，以達成科學報國之宏願。

本會出版之書籍，除質量並重外，並致力於時效之爭取，舉凡國外科學名著，初版發行半年之內，本會卽擬參酌國內需要，選擇一部份譯成中文本發行，惟欲實現此目標，端賴各方面之大力贊助，始克有濟。

茲特掬誠呼籲：

**自由中國大專院校之教授，研究機構之專家、學者，與從事工業建設之工程師；**

**旅居海外從事教育與研究之學人、留學生；**

**大專院校及研究機構退休之教授、專家、學者**

主動地精選最新、最佳外文科學名著，或個別參與譯校，或就多年研究成果，分科撰著成書，公之於世。本基金會自當運用基金，並藉優良出版系統，善任傳播科學種子之媒介。尙祈各界專家學人，共襄盛舉是禱！

**徐氏基金會　敬啓**

**中華民國六十四年九月**

# 譯者絮語

雖然，這是一本薄薄的小册子，但是它的趣味性之濃，啓發性之强，創造性之高，卻大大地出於我們的意料之外。它給我們帶來了一種新鮮的感覺，一種美妙的意境和一種深遠的啓示。

這本小册子，就是當今歐洲鼎鼎大名的數學家 I. M. Gelfand教授所主編的函授教材之一。1964 年，他在「未來科學家培養計劃」下，創辦了一所別開生面的數學函授學校，入學對象是初中三年級稟賦優異的少年學生，但必須通過極爲嚴格的考試和極爲劇烈的競爭。例如 1968 年在數十萬優秀的報考者當中，只錄取了八千名。函授學校給學生的訓練，不過是課外科學活動之一，並不影響正常課業。天才學生在二年內便可完成函授教育，他們的數學程度，不但媲美大學水準．並且對數學已有深入的了解，也有領悟新觀念新方法的能力，進而養成獨立研究的習慣。

芝加哥大學數學系有一個特別組織，稱爲「歐洲最近數學著作調查小組」。他們認爲這套函授教材，除了給初中高年級學生閱讀之外，對於數學教師，大專高中

學生都有極大的參考價值。函授教材之一的這本小册子，就是該小組接受美國國家科學基金會的資助，由 Thomas Walsh 和 Randell Magee 兩位先生編譯成英文的。

歐美各國教育家，認爲科學教育如同藝術教育一樣，要特別重視幼苗的發掘和培養，譯者頗有同感；而優良的少年課外讀物，尤應大力提倡。所以不自量力的把這本小册子從英譯本轉譯過來。爲了引起少年讀者的閱讀興趣，譯文力求避免一般教科書嚴肅沉悶的氣氛，盡量使用淺顯通俗的文字，甚至有些數學名詞和用語，也大膽地把它們口語化了，希望讀起來比較輕鬆些，生動些，也親切些。

蒙徐氏基金會不棄，約譯這本小册子，並迅速出版，謹向出版部的先生們致謝。譯者並以十二萬分的誠意，歡迎各界人士以及青少年讀者朋友們的批評和指教！

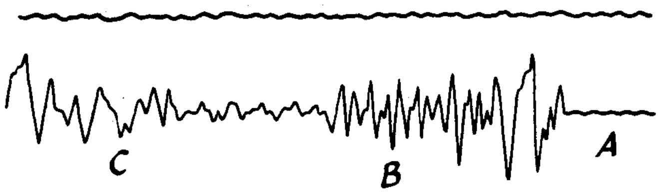
59 年 6 月 3 日

於若谷齋

# 目　錄

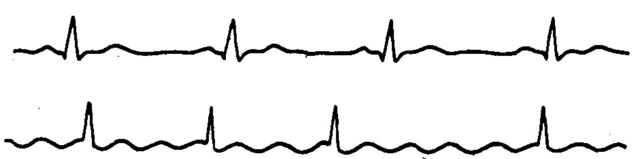

譯者絮語　III
開宗明義　1
第一章　一些例子　9
第二章　線性函數　22
第三章　函數 $y=|x|$　26
第四章　二次三項式　39
第五章　線性分式函數　55
第六章　冪函數　66
第七章　有理函數　80
第八章　一些獨立解答的問題　89
答案及提示　103
（附有符號⊕的問題和練習）

# 開宗明義




第1圖

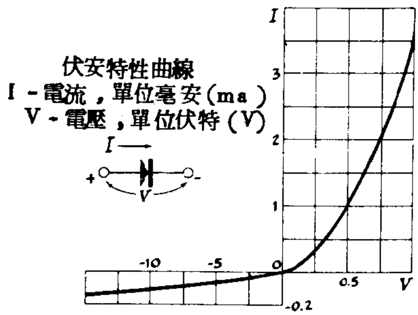
在第 1 圖裡面，讀者瞧見的兩根曲線，是由地震計描繪下來的痕跡；地震計是一種記錄地殼變動的儀器。頂上一根，記錄時剛好大地一片靜寂，安然無恙；底下一根，是一次地震發生的訊號。



第 2 圖

第 2 圖是兩張心電圖。上面一張表示正常的心跳；下面一張是從一個心臟病人那兒記錄下來的。

第3圖表示一種半導元素的所謂特性曲線，也就是說，它把電流强度和電壓之間的關係顯露了出來。




第 3 圖

地震學家分析一張地震圖，便能找出什麼時候什麼地點發生地震了，並且可以確定震動的强度和震動的情況。醫生用心電圖來檢查病人，能夠判斷心臟活動的毛病出在那裡；做了心電圖的判讀，對於病情的正確診斷，大有幫助。一根半導元素的特性曲線，可使無線電工程師在裝置設計上選擇最有利的條件。

所有這些各行各業的人，他們研究某些函數時，都要用上諸如此類的函數圖形。

**可是，函數是什麼東西呢？函數圖形又是什麼玩意兒？**

在沒有說到函數的嚴密定義之前，讓我們先談一點函數的概念吧。用描述性的說法，一個函數的

成立是這樣的：有某一種數量，數學家管它叫變數，常用字母 $x$ 代表它，當我們給 $x$ 每一個值時，便有另外一種數量 $y$ 的一個值來對應它，這種數量 $y$ 就管它叫函數。

舉例來說，一次地震發生時，地球表面位移的大小，在每一片刻時間都有一定的值，也就是位移的多少是時間的函數。在半導元素中的電流强度是電壓的函數，因為對於每一個電壓值，都有一個一定的電流强度值來對應。

可以做這種說法的例子很多：球的體積是半徑的函數；垂直向上拋擲的石塊，它上昇的高度是初速的函數；例子之多，眞是不勝枚舉。

現在我們言歸正傳，回到嚴密的定義上面來。說到數量 $y$ 是數量 $x$ 的函數，首先要指出可以取用的 $x$ 值。在變數 $x$ 裡面，這些「許可的」值，管它叫**可取值**( admisible values )；由數量 $x$ 或變數 $x$ 中全部可取值構成的集合，管它叫函數 $y$ 的**定義域**( domain of definition )。

譬如我們說球的體積 $V$ 是半徑 $R$ 的函數，那麼 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ 這個函數的定義域，就是所有大於零的數；因為球半徑 $R$ 的值，只許用正數的緣故。

不管什麽時候，只要一提到函數，就必須指出它的定義域。

**定義(一)**

如果：(1) 可取的 $x$ 值已經指定，就是函數的定義域已經知道；(2) 對於 $x$ 的每一個可取值，恰好有變數 $y$ 的一個值來對應；那麼我們說 $y$ 是變數 $x$ 的**函數**( function )。

有人把「變數 $y$ 是變數 $x$ 的函數」這句話換個樣子，寫做

$$y=f(x).$$

（讀法：「$y$ 等於 $x$ 的 $f$ .」）

當 $x$ 等於 $a$ 時，用 $f(a)$ 的記法表示函數 $f(x)$ 的數值。舉個例子來看，如果

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1},$$

那麼

$$f(2)=\frac{1}{2^2+1}=\frac{1}{5},$$

$$f(1)=\frac{1}{1^2+1}=\frac{1}{2},$$

$$f(0)=\frac{1}{0^2+1}=1, \quad \text{等等。}$$

對於 $x$ 的每一個值，要找出 $y$ 的對應值，應該有一個法則才行；法則的表達可用各種不同的方式，並不是一成不變，墨守成規，非要比着葫蘆畫個瓢不可。如果告訴讀者 $y$ 是 $x$ 的函數，那麼只消查對下面兩件事就行了：(1) 已經說出定義域，就是可以假定的 $x$ 值都已經指明；(2) 已經說出一個法則，根據這一法則，對於 $x$ 的每一個可取值，都有一個 $y$ 的唯一值來相配

什麼樣兒的法則才能夠如此呢？

且讓我們舉幾個例子來談一談吧。

1.、假定有人對我們說 $x$ 是任何一個實數，$y$ 可用

$$y=x^2$$

求出來。這便是用一個公式 $y=x^2$ 來表達函數的方式。

一個法則也可以寫成條文的樣子。

2.下面是表達函數 $y$ 的一種方式：如果 $x$ 是一個正數，那麼 $y$ 等於1；如果 $x$ 是一個負數，那麼 $y$ 等於-1;

如果 $x$ 等於零，那麼 $y$ 等於零。

我們用條文式的法則，另外再舉一個函數的例子。

3. 每個數 $x$，都可寫做 $x=y+\alpha$ 這樣一個式子，式子裡面的 $\alpha$，是小於一而不是負的數，$y$ 是整數。既然每個數 $x$ 都有一個唯一的數 $y$ 來對應，顯然 $y$ 是 $x$ 的函數了。這一函數，它的定義域是整個實數軸；它有一個名稱，叫做「$x$ 的整數部分」，用這樣的式子來表示它：

$$y=[x].$$

例如：

$$[3.53]=3,\ [4]=4,\ [0.3]=0,\ [-0.3]=-1.$$

在以後的練習裡面，我們將要用上這一函數。

4. 有一個函數 $y=f(x)$，是用公式

$$y=\frac{\sqrt{x+3}}{x-5}$$

來給它規範的（下定義）。讓我們研究一下，什麼定義域才算合理？

如果用公式來表達一個函數，通常我們要考慮的，是它的**自然定義域**(Natural domain of definition)。所謂自然定義域，就是凡能使公式中所規定的運算發生效果的那些數，統統把它們取出來所構成的一個集合。這樣說來，我們這個函數的定義域是不含5這個數的（因爲 $x=5$ 時，分式的分母便要「化爲烏有」了），同時也不含小於 $-3$ 的 $x$ 值（因爲 $x<-3$ 時，根號下面的式子是負的）。因此，函數

$$y=\frac{\sqrt{x+3}}{x-5}$$

的定義域，全部所包括的數都滿足下面二項關係：

$$x \geq -3\ ,\quad x \neq 5.$$

一個函數可以借圖形的幫助，用幾何方式來代表它。構作某一函數的圖形時，我們要考慮 $x$ 的某一可取值跟 $y$ 的對應值。例如，假定 $x$ 的值是一個數 $a$ ，$y$ 的對應值便是一個數 $b=f(a)$ . $a$ 跟 $b$ 這一「數對」，我們用平面中的一點來代表，坐標是 $(a, b)$ . 對於 $x$ 的所有可取值，都有這種點可讓我們標繪出來。用這種方法所得到的點集合，便是函數的圖形（graph）。

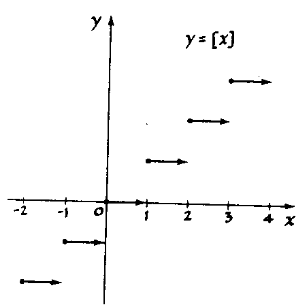
**定義(二)**

**函數圖形**就是點集合，這些點的橫標是變數 $x$ 的可取值，縱標是函數 $y$ 的對應值。

例如，第 4 圖描繪出來的就是函數

$$y=[x]$$

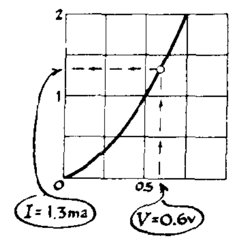
的圖形。




**第 4 圖**

這個圖形構成了一個直線線段的無限集合。箭頭表示這些線段右邊的端點不屬於這個圖形(但是左邊的端點都屬於這個圖形，所以畫上黑圈圈)。

圖形可以當做規範函數的法則，例如，從某一種半導元素的特性曲線




第5圖

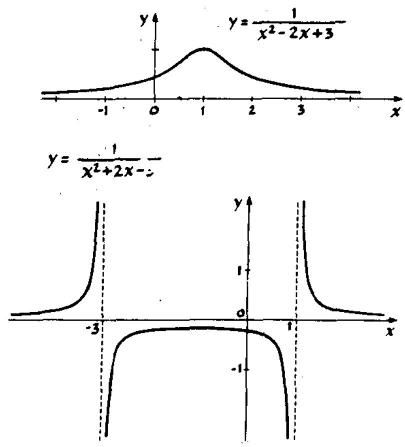
來決定函數是可能的：請看第5圖，如果變數$V$等於0.6伏特，那麼函數I便等於1.3毫安。

用圖形來代表函數的確方便，因爲只要仔細瞧一瞧圖形，馬上可以區別兩個函數彼此有什麼不同。

請讀者再看一下第1圖底下那根曲線。憑這一圖形，就算是最外行的人，也會認出地震的訊號($B$和$C$兩部分)。更仔細地察看一下，當然又可發現$B$和$C$這兩部分的波動，各有不同的特性(地震學家必會指出$B$的部分代表所謂$P$型波動，這種波動的進行，是深入地殼的；而$C$的部分，代表一種只在地球表層進行的$S$型波動)。

把$B$和$C$兩部分的一些值，並排寫成兩個表，試由這兩個表，區別兩段曲線的不同。(我們不能列出一個長表，把整根曲線的值都包括進去，因爲這樣做法，可能要寫滿整整的一頁。在這一頁邊上，讀者所看到的兩個表，只是$B$和$C$兩段曲線的一小部分。)

| $P$型波動(時間間隔：0.2秒) | $S$型波動(時間間隔：0.4秒) |
|---|---|
| 0.1 | 0.2 |
| 0.1 | 0.5 |
| −1.6 | 2.5 |
| −1.7 | 4.9 |
| −2.4 | 7.1 |
| −3.0 | 6.1 |
| −4.5 | 3.8 |
| −3.8 | 0.4 |
| −2.9 | 0.2 |
| −1.1 | 0.7 |
| 0.8 | 1.5 |
| 3.3 | 2.5 |
| 5.1 | 3.2 |
| 3.7 | 2.8 |
| 0.0 | 0.4 |
| −2.0 | −2.2 |
| −4.4 | −3.3 |
| −5.8 | −4.5 |
| −3.8 | −4.8 |
| −1.6 | −4.8 |
| | −4.8 |
| | −3.7 |
| | −3.5 |
| | −4.4 |
| | −6.6 |



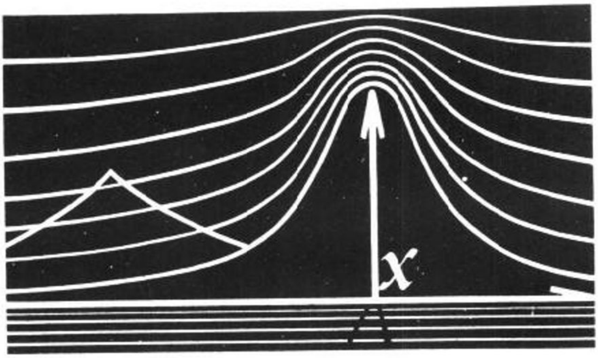

第6圖

第6圖表示由非常相像的公式來規範的兩個函數圖形，這兩個公式是

$$y=\frac{1}{x^2-2x+3} \quad 及 \quad y=\frac{1}{x^2+2x-3}.$$

這兩個函數本質上的差別，當然也可以從公式觀察出來。但是，如果瞧一瞧它們的圖形，這種差別便立刻原形畢露了。

不管什麼時候，要說明一個函數的一般性質，以及要找出一個函數的顯著特徵，正是「人心不同，各如其面」，應該端詳一番它的外表，一個圖形便少不了啦。所以，一位工程師或科學家一旦找到他所傾心的函數，不管是寫成公式也好，描成圖表也好，他都要抓起一支鉛筆，把這個函數的圖形勾畫出來，看看它到底是怎樣的「德行」，什麼樣兒的「長相」。




# 第一章

# 一些例子

**❶**

函數圖形的定義，如果照字義解釋，那麼要構作某一函數的圖形，必須把變數跟函數的對應値，毫無遺漏地全部配成對兒，然後用它們的坐標把所有的點一一描繪出來。但是，在極大多數的情形，這個辦法實際上是行不通的，因爲這種點太多了，多得無窮無盡，你畫一輩子也畫不完。所以，只好用一根光滑曲線把屬於圖形的少數幾點連起來，這是一種退而求其次的辦法。

$y=\frac{1}{1+x^2}$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | $\frac{1}{2}$ |
| 2 | $\frac{1}{5}$ |
| 3 | $\frac{1}{10}$ |

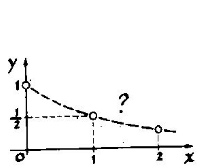
**第 1 表**

現在我們用這個辦法，來試作函數

$$y=\frac{1}{1+x^2} \tag{1}$$

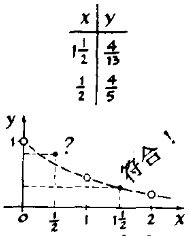
的圖形。

先選擇變數的一些値，求出函數的對應値，把它們寫下來列成一個表（請看第 1 表）。我們再用計算所得的坐標，把代表它們的點描好，暫時用虛線連一連（第 1 圖）。




**第 1 圖**

現在我們來查證一下，在圖形上兩點之間的那一段曲線，看看畫得對不對。

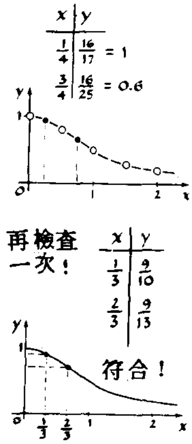


檢查一次！

第 2 圖

爲了達到查證的目的，我們在變數裡面取一個中間值，比方說，取 $x=1\frac{1}{2}$ ，再計算函數的對應值，得 $y=\frac{4}{13}$ . 這一點 $(1\frac{1}{2}, \frac{4}{13})$ 正好不偏不倚地落在我們的曲線上（第 2 圖），所以這一段曲線我們畫得十分正確。

現在用 $x=\frac{1}{2}$ 試試看。求得 $y=\frac{4}{5}$ ，對應點跑到我們所畫曲線之外的上方去了（第2圖）。意思是說，在 $x=0$ 和 $x=1$ 之間，函數圖形並不如我們想像那樣地走法。在這段可疑部分，再取 $x=\frac{1}{4}$ 和 $x=\frac{3}{4}$ 兩個值。把這些點統統連起來，我們得到一根比較正確的曲線，用第 3 圖來代表它。取 $(\frac{1}{3}, \frac{9}{10})$ 和 $(\frac{2}{3}, \frac{9}{13})$ 兩點再做一次檢查，這兩點剛好在曲線上。



第 3 圖

❷

構作圖形左邊的一半，必須對變數的負值另外塡一個表，這是輕而易舉的事。例如，

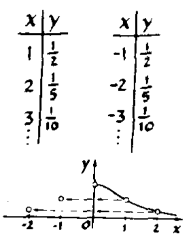
在 $x=2$時， 我們得 $y=\dfrac{1}{2^2+1}=\dfrac{1}{5}$ ,

在 $x=-2$時，我們得 $y=\dfrac{1}{(-2)^2+1}=\dfrac{1}{5}$ .

意思是說這個圖形同時包含 $(2, \frac{1}{5})$ 和 $(-2, \frac{1}{5})$ 兩點，以 $y$ 軸來說，後一點跟前一點對稱。

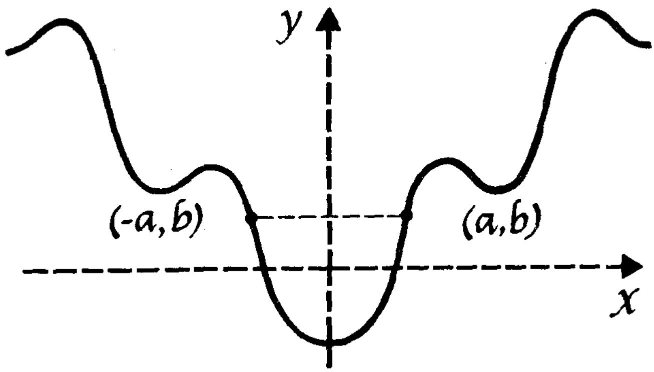
在一般情形，如果 $(a, b)$ 點在圖形的右半邊，那麼它的左半邊便有一點 $(-a, b)$， 跟 $(a, b)$ 點以 $y$ 軸成對稱。所以，對於 $x$ 的負值，要獲得函數(1)對應圖形的左邊部分，必須以 $y$ 軸當做鏡面，把圖形的右半邊反射進去。

第 5 圖表示這個圖形的全貌。



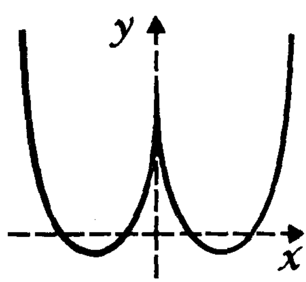
第 4 圖

如果我們性子太急，忽忽忙忙地用最初的略圖（第 1 圖和第 2 圖），來構作對於負 $x$ 值的圖形部分，那麼所得的結果，在 $x=0$ 的地方便有一個「尖角」（Kink）。正確的圖形是沒有這種尖角

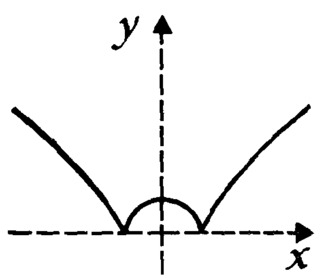



$$f(-a)=f(a)$$

某一函數對於變數中絕對值相等而符號相反的任何兩個值（就是 $a$ 和 $-a$ 二值），如果函數的對應值相等，那麽這一函數便管它叫**偶函數**（even function）。任何偶函數，都有一個對 $y$ 軸成對稱的圖形。




$$y=x^2-3|x|+2$$




$$y=\sqrt{|x^2-1|}$$