根据面向21世纪最新教材《微积分》编写

高等数学

学习指导与题解

（下册）

主编 张来亮 罗雪梅
高国成 孟艳双

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导与题解/罗雪梅等主编．—济南：山东大学出版社，2001.9
ISBN 7-5607-2206-3

Ⅰ．高…
Ⅱ．罗…
Ⅲ．高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 065215 号

山东大学出版社出版发行
(山东省济南市山大南路 27 号　邮政编码：250100)
山　东　省　新　华　书　店　经　销
济南申汇印务责任有限公司印刷
850×1168 毫米　1/32　21 印张　540 千字
2001 年 9 月第 1 版　2001 年 9 月第 1 次印刷
印数：1—4500 册
定价(全二册)：38.00 元

目　录

第五章　向量代数与空间解析几何 …………………………… (1)
5.1　知识网络图 ………………………………………………… (1)
5.2　主要内容、重点、难点、知识理解与记忆方法 ………… (2)
5.3　向量代数与空间解析几何习题选解 …………………… (9)
5.4　向量代数与空间解析几何单元测试题 ……………… (27)
5.5　1992 年～2001 年历届考研真题解析及寻根溯源
…………………………………………………………… (44)
第六章　多元函数微分学 ……………………………………… (50)
6.1　知识网络图 ………………………………………………… (50)
6.2　主要内容、重点、难点、知识理解与记忆方法 ……… (51)
6.3　多元函数微分学习题选解 ……………………………… (60)
6.4　多元函数微分学单元测试题 …………………………… (84)
6.5　1992 年～2001 年历届考研真题解析及寻根溯源
…………………………………………………………… (103)
第七章　重积分 ………………………………………………… (113)
7.1　知识网络图 ……………………………………………… (113)
7.2　主要内容、重点、难点、知识理解与记忆方法
…………………………………………………………… (114)
7.3　重积分习题选解 ………………………………………… (120)
7.4　重积分单元测试题 ……………………………………… (140)
7.5　1992 年～2001 年历届考研真题解析及寻根溯源
…………………………………………………………… (159)
第八章　曲线积分与曲面积分 ………………………………… (167)

8.1 知识网络图 …………………………………………… (167)
8.2 主要内容、重点、难点、知识理解与记忆方法 …………………………………………… (168)
8.3 曲线积分与曲面积分习题选解 ………………………… (178)
8.4 曲线积分与曲面积分单元测试题 ……………………… (200)
8.5 1992年～2001年历届考研真题解析及寻根溯源 …………………………………………… (218)
第九章 无穷级数 …………………………………………… (232)
9.1 知识网络图 …………………………………………… (232)
9.2 主要内容、重点、难点、知识理解及记忆方法 …………………………………………… (233)
9.3 无穷级数习题选解 …………………………………… (244)
9.4 无穷级数单元测试题 ………………………………… (267)
9.5 1992年～2001年历届考研真题解析及寻根溯源 …………………………………………… (285)
参考书目 …………………………………………… (313)

第五章　向量代数与空间解析几何

5.1　知识网络图

向量代数与空间解析几何知识网络图见图 5-1.

- 向量代数与空间解析几何
  - 向量代数
    - 向量及其表示
    - 向量的运算
      - 加(减)法
      - 数乘
      - 数量积(点积、内积)
      - 向量积(叉积、外积)
      - 混合积
  - 平面与直线
    - 平面
      - 点法式
      - 一般式(法向量)
      - 三点式
      - 截距式
    - 直线
      - 一般式
      - 对称式(方向向量)
      - 两点式
      - 参数式
  - 空间曲面
    - 一般曲面方程
    - 旋转曲面
    - 柱面
    - 常用二次曲面
  - 空间曲线
    - 一般式
    - 参数式
    - 空间曲线在坐标轴上的投影

图 5-1

5.2 主要内容、重点、难点、知识理解与记忆方法

向量代数与空间解析几何主要内容、重点、难点知识理解与记忆方法见表 5-1 至表 5-7.

表 5－1　　向量的有关定义和性质

	定义	记号	坐标表示	注意
向量(矢量)	具有大小和方向的量	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$, $\vec{a}$	$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ $=\{a_x,a_y,a_z\}$	① $a_x\vec{i}$, $a_y\vec{j}$, $a_z\vec{k}$ 分别为 $\vec{a}$ 在 x,y,z 三个坐标轴上的分向量; ② 若 $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两个点, 则 $\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$
向量的模	向量的大小(或长度)	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$, $\lvert\vec{a}\rvert$	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$;若 $A(x_1,y_1,z_1)B(x_2,y_2,z_2)$ 则 $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$ $=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$	零向量记作 $\vec{0}$, 其模为 0
向量的方向余弦	$\vec{a}$ 与三坐标轴正向夹角的余弦	$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$	若 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, 则 $\cos\alpha=\dfrac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}=\dfrac{a_x}{\lvert\vec{a}\rvert}$ $\cos\beta=\dfrac{a_y}{\lvert\vec{a}\rvert}$, $\cos\gamma=\dfrac{a_z}{\lvert\vec{a}\rvert}$	① $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 恰为与 $\vec{a}$ 同方向的单位向量; ② $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

表 5-2　　**向量的运算**(设 $\vec{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$, $\vec{c}=\{c_x,c_y,c_z\}$)

	记号及规则	满足的运算律	注意
加(减) 数乘	$\vec{a}\pm\vec{b}=\{a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z\}$ $\lambda\vec{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}$	① 交换律: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ ②结合律: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ ③数乘分配律: $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ ④数乘结合律: $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$	$-\vec{a}$ 称为 $\vec{a}$ 的负向量,它与 $\vec{a}$ 大小相同方向相反
数量积(点积、内积)	$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$ $=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$	① 交换律:$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ ② 分配律: $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=a\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ ③ 数乘结合律: $(\lambda\vec{a})\cdot(\mu\vec{b})=\lambda\mu(\vec{a}\cdot\vec{b})$	①$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}$ $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})\in[0,\pi]$ ②$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
向量积(叉积、外积)	$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$	①$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ ②$\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$ ③$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$	①$\vec{a}/\!/\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ ② $\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert$ 表示以 $\vec{a},\vec{b}$ 为邻边的平行四边形面积
混合积	$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}\triangleq[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$	$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$	①$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面$\Leftrightarrow(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$ ②$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$的绝对值是以 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为三棱的六面体的体积

表 5-3　　　　　　　　平　面

	方程的形式	相关符号的含义	注　意
点法式	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$	$M_0(x_0, y_0, z_0)$为平面上一点，$\vec{n}=\{A, B, C\}$为平面的一个法向量	若A, B, C中有一个或两个为0，则$\vec{n}=\{A, B, C\}$垂直于相对应的一个或两个坐标轴(即平面平行于相应的一个或两个坐标轴所确定的平面)
一般式	$Ax+By+Cz+D=0$	$\vec{n}=\{A, B, C\}$为平面的一个法向量	①同上 ②当$D=0$时，平面过原点 ③平面外点$P(x_0, y_0, z_0)$到平面的距离为$d=\dfrac{\lvert Ax_0+By_0-Cz_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
三点式	$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$	$M_i(x_i, y_i, z_i)$为平面上不在同一直线上的点$(i=1,2,3)$	$\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}$为平面的一个法向量
截距式	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$	a, b, c分别为平面在x, y, z轴上的截距	由于要a, b, c非零，故并不是所有平面都能写成截距式

表 5-4　　　　　　**直　线**

	方程的形式	相关符号的含义	注　　意
一般式	$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$	两平面的交线	$\vec{s}=\{A_1,B_1,C_1\}\times\{A_2,B_2,C_2\}$ 为直线的一个方向向量
标准式（对称式，点向式）	$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$	$M_0(x_0,y_0,z_0)$为直线上一点；$\vec{s}=\{m,n,p\}$为直线的一个方向向量	当 m,n,p 中有一个或两个为 0 时，对应的分子为 0 如 $m=0$ 时，直线方程为 $\begin{cases}x-x_0=0\\\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}\end{cases}$
参数式	$\begin{cases}x=x_0+tm\\y=y_0+tn\\z=z_0+tp\end{cases}$ （t 为参数）	$M_0,\vec{s}$含义同上	
两点式	$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$	$M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$为直线上两点	$\vec{s}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$为直线的一个方向向量

表 5-5　　平面、直线之间的关系

	关 系 及 充 要 条 件
两平面 π_1 与 π_2 其法向量分别为： $\overrightarrow{n_1}=\{A_1,B_1,C_1\}$ $\overrightarrow{n_2}=\{A_2,B_2,C_2\}$	$\pi_1\perp\pi_2\Leftrightarrow\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}\Leftrightarrow\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$ $\pi_1/\!/\pi_2\Leftrightarrow\overrightarrow{n_1}/\!/\overrightarrow{n_2}\Leftrightarrow\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_1}$ π_1 与 π_2 夹角 θ 满足 $\cos\theta=\frac{\lvert\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\rvert}{\lvert\overrightarrow{n_1}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{n_2}\rvert}$ $(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$
两直线 L_1 与 L_2 其方向向量分别为： $\overrightarrow{s_1}=\{m_1,n_1,p_1\}$ $\overrightarrow{s_2}=\{m_2,n_2,p_2\}$	$L_1\perp L_2\Leftrightarrow\overrightarrow{s_1}\perp\overrightarrow{s_2}\Leftrightarrow\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_2}=0\Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$ $L_1/\!/L_2\Leftrightarrow\overrightarrow{s_1}/\!/\overrightarrow{s_2}\Leftrightarrow\overrightarrow{s_1}\times\overrightarrow{s_2}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{P_1}{P_2}$ L_1 与 L_2 夹角 θ 满足 $\cos\theta=\frac{\lvert\overrightarrow{s_1}\cdot\overrightarrow{s_2}\rvert}{\lvert\overrightarrow{s_1}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{s_2}\rvert}$ $(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$
直线 L，方向向量为： $\vec{s}=\{m,n,p\}$ 平面 π，法向量为： $\vec{n}=\{A,B,C\}$	$L\perp\pi\Leftrightarrow\vec{s}/\!/\vec{n}\Leftrightarrow\vec{s}\times\vec{n}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$ $L/\!/\pi\Leftrightarrow\vec{s}\perp\vec{n}\Leftrightarrow\vec{s}\cdot\vec{n}=0\Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0$ L 与 π 夹角 θ 满足 $\sin\theta=\frac{\lvert\vec{s}\cdot\vec{n}\rvert}{\lvert\vec{s}\rvert\cdot\lvert\vec{n}\rvert}$ $(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$

表 5-6　　**空间曲面**

	方　程　的　形　式　及　特　点
一般空间曲面	一般式 $F(x,y,z)=0$；　参数式 $\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(u,v)\end{cases}$　$(u,v)\in D$，D 为 uv 平面上某区域
旋转曲面	yOz 平面上的曲线 $C: f(y,z)=0$ 绕 y 轴旋转得旋转曲面：$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$ 绕 z 轴旋转得旋转曲面：$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$ xOy 平面上的曲线 $C: f(x,y)=0$ 绕 x 轴旋转得旋转曲面：$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$ 绕 y 轴旋转得旋转曲面：$f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$ xOz 平面上的曲线 $C: f(x,z)=0$ 绕 x 轴旋转得旋转曲面：$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$ 绕 z 轴旋转得旋转曲面：$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$
柱面	只含 x,y 而缺 z 的方程 $F(x,y)=0$ 表示母线平行于 z 轴的柱面， 只含 x,z 而缺 y 的方程 $F(x,z)=0$ 表示母线平行于 y 轴的柱面， 只含 y,z 而缺 x 的方程 $F(y,z)=0$ 表示母线平行于 x 轴的柱面. 常见二次柱面方程：(其中 a,b,c,R 均为正数，$p\geqslant 0$) ①圆柱面：$x^2+y^2=R^2$ 或 $y^2+z^2=R^2$ 或 $x^2+z^2=R^2$ ②椭圆柱面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 或 $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 或 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ③抛物柱面：$x^2=2py$ 或 $y^2=2px$；$x^2=2pz$ 或 $z^2=2px$；$y^2=2pz$ 或 $z^2=2py$ ④双曲柱面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 或 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 或 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

表 5-6 （续表）

	方 程 的 形 式 及 特 点
常用二次曲面	①球面：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ （球心(x_0,y_0,z_0)，半径 R） ②椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ③抛物面： 椭圆抛物面： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\pm z$ 或 $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\pm x$ 或 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=\pm y$ 双曲抛物面（马鞍面）： $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm z$ 或 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm x$ 或 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm y$ ④双曲面： 单叶双曲面（特点：左边两正一负，右边正 1）： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 或 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 或 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 双叶双曲面（特点：左边两正一负，右边 -1）： $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ 或 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ 或 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ （其中 a,b,c 均为正数）

表 5-7 **空间曲线**

一般式	$\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$
参数式	$\Gamma:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$ （其中 t 为参数）
常用曲线	螺旋线 $\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=a\sin\theta\\z=b\theta\end{cases}$ （其中 θ 为参数）

5.3　向量代数与空间解析几何习题选解

一、向量代数

1. 向量的基本运算

向量的模，方向余弦，夹角；向量的加减法，向量的数乘，向量的数量积，向量积，混合积.

例1　已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$，和 $M_2(3,0,2)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解：由题意知 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{3-4,0-\sqrt{2},2-1\}=\{-1,-\sqrt{2},1\}$，

$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=2$，

故所求的方向余弦为：$\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$，$\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\gamma=\dfrac{1}{2}$；

方向角分别为：$\alpha=\dfrac{2\pi}{3}$，$\beta=\dfrac{3\pi}{4}$，$\gamma=\dfrac{\pi}{3}$.

例2　设 $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$，$\vec{c}=-2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ 试用单位向量 $\vec{e_a}$，$\vec{e_b}$，$\vec{e_c}$ 表示向量 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$.

解：
$$\vec{e_a}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k},\qquad ①$$

$$\vec{e_b}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{i}-\frac{2}{\sqrt{6}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{k},\qquad ②$$

$$\vec{e_c}=\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=-\frac{2}{3}\vec{i}+\frac{1}{3}\vec{j}+\frac{2}{3}\vec{k},\qquad ③$$

①式 $\times 2-$ ③式 $\times\sqrt{3}$，得：

$$2\vec{e_a}-3\vec{e_c}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{j}.\qquad ④$$

①式－②式$\times\sqrt{2}$，得：

$$\vec{e_a}-\sqrt{2}\,\vec{e_b}=\sqrt{3}\,\vec{j}. \qquad ⑤$$

由④，⑤两式解得：$\vec{i}=\dfrac{5\sqrt{3}}{12}\vec{e_a}+\dfrac{\sqrt{6}}{12}\vec{e_b}-\dfrac{3}{4}\vec{e_c}$.

同理可得： $\vec{j}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\vec{e_a}-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\vec{e_b}$,

$$\vec{k}=\frac{\sqrt{3}}{4}\vec{e_a}+\frac{\sqrt{6}}{4}\vec{e_b}+\frac{3}{4}\vec{e_c}.$$

例3 设向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，证明：

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-\dfrac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2)$；

(2) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$.

解：(1) 因 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$，故 $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$，

从而 $\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{c}\cdot(\vec{b}+\vec{a})$

$$=\vec{c}\cdot(-\vec{c})=-|\vec{c}|^2,$$

同理可得：$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}=-|\vec{b}|^2$,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-|\vec{a}|^2.$$

于是 $2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})$

$$=-(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2),$$

从而 $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-\dfrac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2)$得证.

(2) 由 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ 知 $\vec{c}=-(\vec{a}+\vec{b})$，

故 $\vec{b}\times\vec{c}=\vec{b}\times(-\vec{a}-\vec{b})=-(\vec{b}\times\vec{a})-(\vec{b}\times\vec{b})$

$$=-(\vec{b}\times\vec{a})=\vec{a}\times\vec{b},$$

$$\vec{c}\times\vec{a}=-(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{a}=-(\vec{a}\times\vec{a})-(\vec{b}\times\vec{a})$$

$$=-(\vec{b}\times\vec{a})=\vec{a}\times\vec{b},$$

从而 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$.

2.证明恒等式或简化算式

主要方法：①利用向量运算的定义；

②利用向量的运算性质；

③利用向量运算的坐标表达式.

例4　证明如下的平行四边形法则：$2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)=|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2$，说明这一法则的几何意义.

证明：由向量数量积的分配律以及加法交换律得到：

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2 &= (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) \\
&= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{a} \\
&\quad +\vec{b}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{b} \\
&= 2(\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}) \\
&= 2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2).
\end{aligned}
$$

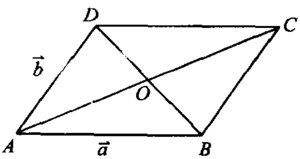

图 5-2

当 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线时，以 $\vec{a},\vec{b}$ 为两个邻边作平行四边形 $ABCD$（如图 5-2 所示）.

则 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{DB}=\vec{a}-\vec{b}$，于是题中等式的几何意义为：

$|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2=2(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2)$ 即“平行四边形两对角线的平方和等于它的四条边的平方和”，而这是我们熟悉的一个平面几何的命题.

例5　证明三个向量共面的充要条件是其中一个向量可以表示为另两个向量的线性组合.

证明：设向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 分别为：$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$.

必要性：设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 三个向量共面，即

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0.$$

由行列式的性质知 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$线性相关，即存在不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使 $\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c}=0$，不妨设 $\lambda_1\neq 0$，则 $\vec{a}=-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{b}-\dfrac{\lambda_3}{\lambda_1}\vec{c}$，即向量 $\vec{a}$可以表示为其余两个向量 $\vec{b},\vec{c}$的线性组合.

充分性：不妨设向量 $\vec{c}$可以表示为其余两个向量 $\vec{a},\vec{b}$的线性组合，即存在不全为零的数 λ,μ，使 $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$，则：

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ \lambda a_x+\mu b_x & \lambda a_y+\mu b_y & \lambda a_z+\mu b_z \end{vmatrix}=0.$$

故 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面.

例 6 证明： $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=\begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{a}\cdot\vec{d} & \vec{b}\cdot\vec{d} \end{vmatrix}$.

解：左边展开计算得：

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})&=\vec{d}\cdot[(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}]=-\vec{d}\cdot[\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})]\\&=-\vec{d}\cdot[(\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a}-(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}]\\&=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})\\&=\begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{a}\cdot\vec{d} & \vec{b}\cdot\vec{d} \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

注：本题第 2 步用到了教材《微积分》下册 P51 第 12 题(1)的结论

3. 利用向量方法求解几何问题

①计算面积、体积、角度；

②证明直线之间的平行或垂直关系；

③证明点共线、共面，线共点等问题；

④确定线段之间的度量关系.

例7　证明：三点 $A(1,0,-1)$, $B(3,4,5)$, $C(0,-2,-4)$共线.

解：$\overrightarrow{AB}=\{3-1,4-0,5-(-1)\}=\{2,4,6\}$,

$\overrightarrow{AC}=\{0-1,-2-0,-4-(-1)\}=\{-1,-2,-3\}$,

即 $\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AC}$. 故$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{AC}$，即 A,B,C 三点共线.

例8　已知 $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$, $C(1,3,-1)$，求：

(1)同时与$\overrightarrow{AB}$及$\overrightarrow{AC}$垂直的单位向量；

(2)$\triangle ABC$ 的面积；

(3)从顶点 B 到边AC 的高的长度.

解：$\overrightarrow{AB}=\{5-1,-6-(-1),2-2\}=\{4,-5,0\}$,

$\overrightarrow{AC}=\{1-1,3-(-1),-1-2\}=\{0,4,-3\}$,

$$(1)\ \vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -5 & 0\\ 0 & 4 & -3\end{vmatrix}=15\vec{i}+12\vec{j}+16\vec{k},$$

故$$\vec{n}^{\circ}=\pm\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\pm\frac{1}{25}(15\vec{i}+12\vec{j}+16\vec{k})=\pm\left(\frac{3}{5}\vec{i}+\frac{12}{25}\vec{j}+\frac{16}{25}\vec{k}\right),$$

即为同时与$\overrightarrow{AB}$及$\overrightarrow{AC}$垂直的单位向量.

$$(2)\ S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}|15\vec{i}+12\vec{j}+16\vec{k}|$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{15^2+12^2+16^2}=\frac{25}{2}.$$