科学出版社

〔苏〕Г.А. 嘎尔别林　A.K. 托尔贝戈 编

第1-50届莫斯科数学奥林匹克

第1—50届
莫斯科数学奥林匹克

〔苏〕Г. А. 嘎尔别林　А. К. 托尔贝戈 编

苏 淳　葛斌华　胡大同 译

科 学 出 版 社

1 9 9 0

内 容 簡 介

本书收入了第1—50届莫斯科数学奥林匹克的全部试题，其中的大部分试题都附有答案、提示或详细解答。这些试题一般都是在著名数学家指导之下命出的，有些甚至直接出自名家之手，它们不仅具有生动活泼的形式，而且往往与现代科学有联系。试题是分不同年级给出的，其中的七、八年级试题可供我国初中学生参考，九至十一年级试题则适合于我国高中学生。

本书可供数学爱好者、中学生、中学数学教师，各类数学竞赛讲习班、培训班、数学奥林匹克学校师生阅读。

Г.А.Гальперин, А.К.Толпыго
МОСКОВСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
ОЛИМПИАДЫ
МОСКВА "ПРОСВЕЩЕНИЕ", 1986

第1—50届莫斯科数学奥林匹克
〔苏〕Г. А. 嘎尔别林　А. К. 托尔贝戈 编
苏 淳　葛斌华　胡大同 译
责任编辑　毕　颖

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1990年9月第一版　开本：787×1092　1/32
1990年9月第一次印刷　印张：12 7/8
印数：0001－10 000　字数：290 000
ISBN 7-03-001723-4/O·338

定价：4.60元

中 译 本 序

我们向读者推荐这本书，是希望它能对我国正在兴起的奥林匹克数学事业起到一定的推动作用.

苏联是世界上开展数学竞赛活动最早和最广泛的国家之一. 据文献记载，早在1886年，当时的俄罗斯帝国即已举办过数学竞赛. 当前在苏联举办的各级各类数学竞赛都称为数学奥林匹克，它起始于20世纪30年代. 最早的一次活动，是1934年在著名苏联数学家Б.Н.狄隆涅教授主持下，由列宁格勒大学出面主办的. 此后这种活动每年都在该校举办一次，一直延续至今，并带动了数学竞赛活动在全苏范围内的开展. 如今，这种竞赛活动已发展成为包括校内竞赛、地区竞赛、区域性竞赛、加盟共和国竞赛和全苏竞赛共五个层次组成的全苏范围内的数学奥林匹克活动，吸引了由小学四年级到大学二年级的广大学生的兴趣，其中尤以七至十年级学生参加的中等数学竞赛活动最为活跃.

莫斯科和列宁格勒两市的数学奥林匹克，是最富有特色和最引人注目的竞赛活动. 从这两个活动中产生出的两个城市的代表队，每年都以独立的身份参加全苏竞赛，同来自其余14个加盟共和国的代表队及俄罗斯联邦的其它地区联队角逐. 当然，以独立身份参加角逐的，还有来自各数学物理专门学校的代表队. 在1987年4月举办的第21届全苏数学奥林匹克中，就有8个专门学校的代表队参加.

莫斯科数学奥林匹克起始于1935年，其中除因第二次世界大战，即在1942至1944年间中断3年之外，每年都举办一次，到1987年2月为止，已整整举办了50届. 莫斯科数学奥林匹克一直由莫斯科大学主办，许多试题都出自名家之手，在原

书的编者的话中，曾开列了一长串命题者的名单．应当在这里向我国读者介绍的是著名数学家、苏联科学院院士、莫斯科大学教授A.H.柯尔莫戈洛夫，他一直是这种竞赛活动的热心支持者和实际指导者．他不仅原则性地指导着命题工作，而且还经常亲自审定试题甚至直接提供试题．在他深刻的数学思想的影响下，莫斯科数学奥林匹克的试题不仅形式上生动活泼，而且往往具有深刻的数学背景．柯尔莫戈洛夫教授还亲自担任了原书的编辑和学术顾问，亲自作序．他的这些关怀，使得原书，尤其是其中的问题解答，大为增辉，极大地提高了原书的阅读价值．

然而令人痛心的是，就在原书问世后不久，A.H.柯尔莫戈洛夫教授就于1987年10月20日逝世了，终年84岁．我们愿借此机会，向他表示崇高的敬意和深切的悼念．

中译本对原书作了一些调整．我们删去了冗长的原书编者的话，保留了柯尔莫戈洛夫教授的序言．我们还依据苏联《量子》杂志补译了原书未及收录的第50届试题及部分试题解答，并将原书付印后才补入的第49届试题由附录1中移入正文．这样，除了原缺的第4届第一试试题之外，前50届试题都齐了，使它能以较完整的面目展现在读者眼前．

本书第28—39届试题及解答由葛斌华同志翻译，其余部分由苏淳翻译．胡大同同志仔细斟酌了全部文字．尽管如此，错误和不确之处仍在所难免，还望读者批评指正．

译者

序　言

我们的国家需要许多能对数学本身作出发现、并能够加以富有创造性地、灵活地使用的数学研究人员．那些早在中学时代，就已开始在这样一类活动中经受过锻炼的科学工作者们，往往能够取得重大的成就．他们中的许多人早在17—19岁时，就已经开始作出这种发现．如果我们不注意将青年人吸引到艰巨的科学工作方面来，那么我们就将会无可挽回地失去他们之中的许多可能成为富于创新精神的学者的人材．

说到我们的中学生，我想对那些真心渴望成为现代数学家的同学们进上几言．同训练运动员一样，对青年数学家的训练也是要花费许多时间的．如果你们能独立地阅读所推荐的习题集，从中选择一些你们最感兴趣的类型的习题，不看答案，自己去思考它们，不惜花费许多许多小时，那么你们就会获益甚多．记得苏联著名的数学家Б.Н.狄隆涅教授说过，重大的科学发现，同解答一道好的奥林匹克试题的区别，仅仅在于解一道奥林匹克试题需要花5小时，而取得一项重大科研成果需要花费5000小时．狄隆涅教授喜欢用夸张的口吻说话，不能单从字面上去理解他的“5000小时”．但是在遇到难题时，整天整天地苦苦思索，却是数学家们的典型本领．当然，如果一个问题久攻不克，那么还是应当理智地转移到别的问题上去．不过在经过若干中断之后，最好能再次回到原来的问题上来．即使对于那些经验丰富的数学家们来说，把一些未能攻克的课题搁置一段时间，也往往是有益的．那种在中断了一段时间之后，会出人意料地从潜意识中浮现出答案来的现象并不少见．

在奥林匹克中获胜自然会感到高兴甚至自豪．但在奥林

匹克中受挫，却不需要过分悲伤，也不需要对自己的数学能力感觉失望. 为了能在奥林匹克中获胜，是需要凭借一些专门的天赋的，但是这些天赋对卓有成效的研究工作却完全不是必要的. 要求在指定的很有限的时间内答题的限制本身，就已经使许多人感到束手无策. 有一些这样的数学问题，它们只有在经过了长时间的静静思索和运用新概念表述之后才能做出. 卓越的苏联拓扑学家П.С.亚历山德罗夫就曾经解决过许多这种类型的问题. 亚历山德罗夫却不时地说，如果在他的年轻时代参加过数学奥林匹克的话，那么他很可能根本就成不了数学家了：他在数学中所取得的主要成就，并不是靠思维敏捷得到的产物，相反却是长时间精雕细琢的结果.

我期望这本试题集能够成为各数学小组和奥林匹克指导者们手中的一本无比珍贵的参考资料. 我想在这里对他们讲两点意见.

一开始，莫斯科数学奥林匹克只为九和十年级学生举办. 从1940年开始，才又邀请七和八年级的学生参加. 这种起始年龄段的变动，是出于这样一种理由，即在这个年龄段上，学生们已经开始充分显露他们对数学的兴趣和才能. 尽管也可以为更低年级的学生举办数学奥林匹克，但是却不能不注意到，那些在五、六年级时参加过解题竞赛的男孩和女孩们，到了高年级以后，其中的大多数人都会失去他们的解题本领，甚至失去对数学的兴趣.

在为这样或那样限额的参赛者组织数学奥林匹克时，有一点是极为重要的，那就是事先要对试题的难度水平有正确的估计. 应当这样来配置试题，即一方面要使得解题能力最强的学生能解出大部分试题，而另一方面，又不能使得有过多的考生连一道题也解不出来. 从杂志《中学数学》和《量子》上所发表的有关总结数学奥林匹克情况的文章中，可以查到一

些剖析试题实际难度的报道．可惜的是，莫斯科数学奥林匹克对自己的试题难度，也不总是能正确把握的．不过，它的试题一般都具有很高的水平．

莫斯科数学奥林匹克命题中的重要经验，就是它的试题总是在同莫斯科大学各数学小组的不间断的联系中产生出来的．这种由数学小组的指导者们集体结出的唯一硕果，就是现在展现在你们眼前的这本试题集．

两位编者——Г．А．嘎尔别林和А．К．托尔贝戈——的工作是出色的，应当向他们表示深切的感谢．

院士　А．Н．柯尔莫戈洛夫

本书体例和常用符号说明

一、本书的第一部分为竞赛试题，按届排列，各届中则又按年级排列，在分有一、二试及个别有加试的届中，则先按试序排列，在各试之内再按年级排列试题，并对每一届试题自1开始依次顺序往后连续编号．对少数较难的试题则在题号上加标了*号．

二、本书的第二部分为试题解答，采用各届试题接排的方式．每一题都有一个用点隔开的、由两个数字组成的编号，前一个数字表示届数，后一个数字表示该题在相应届中的编号，例如，21.11表示第21届第11题，等等．对其中的大部分试题都给出了简明的答案或附了提示，并对其中那些最有趣的问题都作了详细的解答．

三、下述数学符号在书中多次出现，现将它们的含义解释如下，以方便读者查阅：

1）$[x]$，表示实数x的整数部分，即不超过x的最大整数，例如，$[5]=5$，$[1.5]=1$，$\left[\frac{3}{4}\right]=0$，$[\pi]=3$，$[-1.5]=-2$，等等．

2）$n!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot n$，读作"$n$的阶乘"，表示前$n$个自然数的连乘积；$0!=1!=1$；$(2n)!!=2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n-2)\cdot2n$，表示自2开始到$2n$为止的所有偶数的连乘积；$(2n-1)!!=1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-3)\cdot(2n-1)$，表示自1开始到$(2n-1)$为止的所有奇数的连乘积．

3）$C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$，表示由$n$个不同元素中每次取$k$个的组合方式数目．

4）$\overline{ab\cdots c}$，表示各位数码依次为$a,b,\cdots,c$的自然数.

5）裴波拉契数列，是指具有性质$x_n=x_{n-1}+x_{n-2}$的数列$\{x_n\}$，这种数列的最常见的形式是：0，1，1，2，3，5，8，13，21，34，….

6）在所有关于棋球类比赛的试题中，如果不特别申明，则都理解为每个参赛者都与其余每个参赛者比赛一次（即单循环赛）．在棋类比赛中，赢者得1分，平局各得$\frac{1}{2}$分，败者得0分；在足球赛中，各项得分均为棋类的两倍．在篮球和网球赛中则都没有平局.

7）如果一个多边形的所有顶点全都位于另一多边形的边上（包括在顶点上），则称它内接于后一多边形.

8）在所有与光线、台球、弹子等有关的试题中，全都假定反射定律成立，即入射角等于出射角.

9）如果不加声明，则所有的多边形都理解为不自相交的和凸的多边形.

10）有穷数列中的项的数目叫做它的长度.

四、对原编者所加的大部分注释，一般按原文译出，冠以“附注”或直接加括号后插在与原文相应的位置上．对于某些难于为我国读者理解之处或原文有误之处，我们则增加了注释，尾缀“译者注”，并用括号括出，放在相应的问题之后．对于原书的附录，除了已移入正文的附录1之外，对附录2采用原文照译，并以附录的形式附于书后．我们仅删去了解答部分中的一些涉及较多其它俄文文献的关于解答的引伸性注释.

五、本说明的主要内容是我们依据原书编者的话的有关部分编译的．各部分试题或解答的排列顺序及编号原则均遵从原文．难题上的*号亦为原书编者所加.

译　者

目　　录

第一部分　莫斯科数学奥林匹克试题

第1届奥林匹克（1935年）

第　一　试

1．火车通过观察者身边需要t_1秒钟，通过l米长的桥需要t_2秒钟．火车通过桥梁的时间从车头进入桥梁算起至车尾离开桥梁为止．试求火车的长度和速度．

2．试求作一个正方形，使它的3个顶点分别位于3条已知的平行直线上．

3．正四棱锥的底面边长为a，它的顶点处的平面角等于侧棱与底面的夹角，试求其体积．

第二试 A 部

4．已知自三角形的同一顶点引出的中线、角平分线、高同该三角形外接圆的交点，试作出这个三角形．

5．试在正方体的表面上求出这样一点，使它对某条对角线的视角为最小．

第二试 B 部

6．下述方程组有多少组实数解：

$$\begin{cases} x+y=2, \\ xy-z^2=1. \end{cases}$$

7. 解方程组

$$\begin{cases} x^3-y^3=2b, \\ x^2y-xy^2=b. \end{cases}$$

8. 求和：$1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^2$.

第二试 C 部

9. 用 6 种不同的颜色来涂正方体的 6 个面，使不同的面所涂的颜色不同；有多少种不同的涂法（将正方体旋转之后仍属不同的涂法，才被算作是不同的）？

10. 有多少种方法将n表示为 3 个正整数的和？

11. 分别以$M(a,b,c,\cdots,k)$和$D(a,b,c,\cdots,k)$表示数字$a,b,c,\cdots,k$的最小公倍数和最大公约数. 证明：

a) $M(a,b)\cdot D(a,b)=ab$;

b) $\dfrac{M(a,b,c)}{D(a,b,c)}\cdot D(a,b)\cdot D(b,c)\cdot D(a,c)=abc$.

第 2 届奥林匹克（1936年）

第　一　试

1. 试求出一个四位数，它是一个完全平方数，并且它的前两位数字相同，后两位数字也相同.

2. 试构作一个等腰三角形，使任何内接于它的、有两个顶点位于它的底边上的矩形的周长为一常数.

3. 试将每一个自然数都用三个 2 和一些数学符号表示

出来(P. Dirak问题).

4. 设有一个圆及其内部一点 P，试用圆规和直尺求作该圆的一条直径，使它对 P 点所张成的视角等于预先给定的值.

5. 试求出 4 个连续的自然数，使它们的乘积等于1680.

第 二 试

6. 解方程组：

$$\begin{cases} x+y=a, \\ x^5+y^5=b^5. \end{cases}$$

7. 设有一个小于180°的角及角外一点M. 试过M作一直线，使它在该角上所截出的三角形的周长等于预先给定的值.

8. 证明，如果矩形的边及对角线之长均为整数，则它的面积是可被12整除的整数.

9. 有多少种方法将一百万表示成三个因数的乘积？因数的不同排列顺序，也视作不同的表示方法.

10. 空间中分布着 8 个平面和 1 个球. 有多少种不同的方法求作第二个球，使它与 8 个平面和第一个球都相切？

第3届奥林匹克（1937年）

第 一 试

1. 解方程组

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x^3+y^3+z^3=a^3. \end{cases}$$

2*. 设有一直线及位于该直线同侧的两点 A和 B. 试在直线上求出一点M,使得$MA+MB$等于给定的长度.

3. 在两条异面直线上各有一条可滑动的线段. 证明,以这两条线段的端点作为顶点的四面体的体积与线段所在的位置无关.

第 二 试

4. 给定不在同一直线上的 3 个点. 试过其中每两个点作 1 个圆,使得 3 个圆在它们彼此间的各个交点处都具有互相垂直的切线.

5*. 空间中有一个正十二面体. 试问,有多少种求作平面的方法,可以使平面与正十二面体相截得出正六边形的截面?

6. 如果n边形的任何 3 条对角线都不相交于 1 点,试问,这个n边形被它的对角线分成了多少部分?

第 4 届奥林匹克 (1938年)

第 二 试

1. 空间中有 3 个点O_1,O_2,O_3及另一个点A. 作A关于O_1的对称点,得到A_1;再作A_1关于O_2的对称点,得到 A_2;再作A_2关于O_3的对称点得到A_3;再对A_3依上法逐次作关于O_1,O_2,和O_3的对称点. 证明,最终可以得到一个与A重合的点.

2. n个平面最多可以将空间分成多少部分?

3. 已知底边、高以及底边上两角之差,试作出这个三角形.

4．在小于1000的自然数中，有多少个数既不能被5整除，又不能被7整除？

第5届奥林匹克（1939年）

第 一 试

1．解方程组

$$\begin{cases}3xyz-x^3-y^3-z^3=b^3,\\ x+y+z=2b,\\ x^2+y^2-z^2=b^2.\end{cases}$$

2．证明，$\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}=-\frac{1}{2}$.

3．已知3点A,B,C．试过A点作一直线，使得B点和C点到该直线的距离之和等于所给定的长度.

4．解方程$\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$.

5．证明，任何非等腰三角形的角平分线都位于自同一顶点引出的中线和高之间.

第 二 试

6．将下式分解为有理整式的乘积：

$$a^{10}+a^5+1.$$

7．设有两个关于x的整系数多项式，它们的乘积是一个偶系数多项式，但不是每个系数都可被4整除．证明，这两个整系数多项式中，有一个多项式的系数全是偶数，而另一个多项式中至少有一个系数为奇数.

8．设有两点A和B以及一个圆周．试在圆周上找出一