新突破

奥林匹克专题讲座

新突破

小学六年级

数学

海洋出版社

图书在版编目(CIP)数据

奥林匹克专题讲座新突破.小学六年级数学/齐振东,薛遒主编.—北京:海洋出版社,2002.9

ISBN 7-5027-1103-1

Ⅰ.奥… Ⅱ.①齐…②薛… Ⅲ.数学课-小学-教学参考资料 Ⅳ.G624

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 064996 号

责任编辑:郑 军
责任校对:张丽萍
责任印制:严国吉

海洋出版社 出版发行

http://www.oceanpress.com.cn

(100081 北京市海淀区大慧寺路 8 号)

北京蓝空印刷厂印刷

2002 年 9 月第 1 版 2002 年 9 月北京第 1 次印刷

开本:880×1230 1/32 印张:12.875

字数:253 千字 印数:1~10000 册

定价:15.00 元

海洋版图书印、装错误可随时退换

编 委 会

主　　编　齐振东　薛　遒

本册主编　孙　敏

编　　委　李　萍　周玉凤　孙　敏　王　奕　赵寿祺　吴　雷　王爱丽　张　婉　孟凡英　任海岩　黄沛涵　王晴侠　张云秀

前　言

数学是一门重要的基础学科，要打好数学的基础，应从小学阶段抓起，注意基础知识的掌握和应用。而对部分学习优秀并且对数学有浓厚兴趣的学生，则应提出较高的要求，进行一些特殊的培养。

当前，我国教育改革的方向是推进素质教育，培养创新能力。本着这个目的，我们编写了这套《奥林匹克专题讲座新突破》丛书（小学数学）部分。它在最新课程标准内容的基础上加宽、加深，扩大了知识内容。在编写过程中，我们运用了现代数学，尤其是奥林匹克数学教学理论中的最新观点，力求做到以下几点：1. 按年级分册，针对不同年龄学生的已有知识和接受能力，因材施教；2. 内容全面、准确，源于课本，紧扣考题，相应提高，难易适中；3. 以训练思维方法为最终目的，从根本上提高学生的数学水平，授之以渔；4. 所选知识简洁实用，从提高学生学习数学的兴趣入手，寓教于乐；5. 编排上力求务实、高效，使学生能够在最短的时间内取得最好的成绩。

本丛书供小学3~6年级学生使用。本书是该教材的第四册，供小学六年级使用，本丛书既可以作为小学数学奥林匹克的赛前辅导用书，也可作为学有余力同学的练习参考书；可以供辅导教师授课用，也可供学生自学使用。

为了使本丛书内容更加完善，我们真诚希望使用本书的教师和学生提出宝贵意见。

编者

2002年8月

目　次

第 一 学 期

第一讲 抽屉原理

我们来试一下，把 4 个苹果放在 3 个抽屉中，会有什么情况出现呢？我们把这几种情况分别表示出来：

$4=4+0+0$ $\qquad$ $4=3+1+0$

$4=2+2+0$ $\qquad$ $4=2+1+1$

观察上面放苹果的方式，我们发现，不管怎样放，总有一个抽屉里放 2 个或多于 2 个苹果。也就是说，无论怎样把 4 个苹果放在 3 个抽屉里，总有一个抽屉至少放了 2 个苹果。

生活中这样的例子很多：

(1) 把 5 块糖分给 4 个小朋友，可以肯定不论怎么分，总有一个小朋友至少分到 2 块糖。

(2) 7 只鸽子飞进 6 个鸽笼，那么一定有一个鸽笼至少飞进两只鸽子。

由上面的实例，我们可以得到抽屉原则。

抽屉原理 1：

把 $n+1$ 个苹果放入 n 个抽屉中，则必须有一个抽屉中至少放了两个苹果。

抽屉原理的用处很广。如果能灵活运用，可以解决一些

看上去相当复杂,觉得无从下手,然而却是相当有趣的数学问题。

例1. 任意13名同学中,必有2名同学出生在同一个月份,为什么?

解:把13名同学当作13个苹果,把一年的12个月份看作12个抽屉,13 = 12 + 1,根据抽屉原理,至少有2个苹果在同一个抽屉里,即必有2名同学出生在同一个月份里。

例2. 全班有53个同学,老师至少拿几本书,随意分给大家,才能保证至少有一个同学有得到两本书?

解:把53人看成53个抽屉,多少本书看成多少个苹果。要满足题意,根据抽屉原理苹果的个数必须多于抽屉的个数,即书的本数必须大于53,而大于53的最小整数是54,所以,至少要拿54本书才能保证至少有一个同学能得到两本书。

例3. 任意取几个自然数,才能保证至少两个数的差是7的倍数?

解:通过实验不难发现:如果两个自然数除以7所得余数相同,那么这两个自然数的差是7的倍数。而任何一个自然数被7除的余数只可能是0、1、2、3、4、5、6中的一个数。根据这7种情况,把自然数按照它们被7除所得的余数分为7类,我们把这7类看作7个抽屉,把所有自然数看作苹果,要想至少有一个抽屉放2个苹果,那么就至少需要8个苹果。也就是说,至少取以8个自然数,才能保证有两个余数相同。所以,任意取8个自然数,才能保证至少两个数的差是7的倍数。

利用抽屉原理解题的基本是思路和步骤:

(1) 确定把什么当作“抽屉”

(2) 确定把什么当作“苹果”

(3) 说明理由,得出结论。

合理、正确地构造“抽屉”是解题的关键。

例 4. 用红、黄两种颜色将一个 2×5 的矩形中的小方格随意涂色,每个方格涂一种颜色,证明:必有两列,它们的小方格中涂的颜色完全相同。

证明:2×5 的矩形有 5 列,每列有两个小方格,如图 1－1 所示。

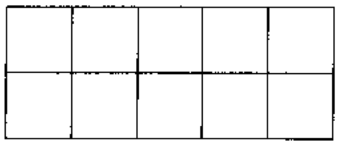


图 1－1

用红、黄两种颜色给每列中的两个小方格随意图涂色,只有下面 4 种情况,如图 1－2 所示,

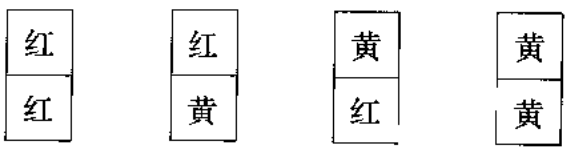


图 1－2

将这 4 种涂色方式看成 4 个抽屉,5 列看作 5 个“苹果”由抽屉原理 1,得知必有一个抽屉至少有两个苹果,即必有两列涂色方式完全相同。

例 5. 在长度是 10 厘米的线段上任意取 11 点,是否至少有两个点,它们之间的距离不大于 1 厘米?

解:把长度 10 厘米的线段 10 等分,那么每段线段的长度是 1 厘米(见下图)。

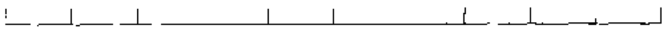


图 1-3

将每段线段看成一个抽屉,一共有 10 个抽屉。现将这 11 个点放到这 10 个抽屉中去。根据抽屉原理,至少有一个抽屉里有两个或两个以上的点(包括这些线段的端点)。由于这两个点在同一个抽屉里,它们之间的距离当然不会大于 1 厘米。

在例 1 中我们知道了:在 13 个同学中,至少有 2 人是同一个月出生的。如果有 49 名同学,那么他们当中至少有几位是同一个月出生的呢?

要问 49 名同学中至少有几位出生月份相同,可以把 49 名同学看作 49 个苹果,一年 12 个月看成 12 个抽屉,因为 $49=4\times12+1$,若每个抽屉放 4 个苹果,还剩 1 个,那么,至少有一个抽屉要放 $4+1=5$ 个苹果。因此,当中至少有 5 位是同一个月出生的。

由此,得到更一般结论。

抽屉原理 2:

如果把 $m\times n+R(R\geqslant1)$ 个苹果放入 n 个抽屉,那么,必定有一个抽屉里有 $m+1$ 个苹果。

例 6. 某旅游团一行 50 人,随意游览甲、乙、丙三地。至少有多少人游览的地方完全相同?

解:设某人去某地记作 1,否则记作 0,则某人游览甲、乙、丙三地的方式只可能有 $2\times2\times2=8$(种),即(0,0,0,),(0,0,

1),(0,1,0),(1,0,0),(1,1,0)(1,0,1),(0,1,1)及(1,1,1)。

以上8种情况为8个抽屉。

苹果根据原理2,因为50=6×8+2,若每个抽屉放6个苹果,还剩2个物体,那么,至少有一个抽屉要放6+1=7个苹果,即至少有7人游览的地方完全相同。

例7. 在一副扑克牌中取牌,至少多少张,才能保证其中必有3张牌的点数相同?

解: 一副扑克牌共54张,去掉大王和小王,还有52张,在剩下的52张牌里,共有13种点数,每种点数各有4张。把去掉大王、小王后的52张牌,按点数分成13个抽屉每个抽屉有4张牌,我们先按照最不利的情况取牌,每个抽屉分别取2张,共取2×13=26张,然后取出大王和小王,共28张,这时只要再任意取1张牌,即有一个抽屉里取了3张牌,这样就保证有3张牌点数相同。

例8. 五年级一班有学生57个,每位同学中有《新华字典》、《成语词典》、《作文词典》三种工具书中的一种、两种或三种。全班学生中有书情况相同的至少有几人?

解: 只有一种工具书的分别有:《新华字典》、《成语词典》、《作文词典》三种情况;

有两种工具书的分别有:《新华字典》、《成语词典》;《新华字典》、《作文词典》;《成语词典》、《作文词典》。三种情况。

有三种工具书的只有一种情况。

在此有书各不相同的情况共有3+3+1=7种,把这7种情况看作7个抽屉,把57人放入各个抽屉里,因为57=8×7+1,所以全班中有书情况相同的至少有8+1=9人。

注:对抽屉原理的应用也可以从平均的角度去理解,如本题的解答可以这样处理,把 57 人按 7 种情况平均分配得 $57 \div 7 = 8 \cdots\cdots 1$,多余的 1 人任意分配在 7 种中的任 1 种,可知全班中有书相同的至少有 $8+1=9$ 人,这种处理方法可以说成"从总和经平均到单独",也有人称为平均原则,它与抽屉原理是一回事。

例 9. 在 23×23 的方格纸中,将 1~9 这九个数填入每个小方格,并对所有形如"十字"的图形中的五个数字求和,对于小方格中的数字的任意一种填法,其和数相等的"十字"图形至少有多少个?

解:在十字图形中的每个小方格中,都填数字 1,和为 5(最小);每个小方格中填 9,和是 45(最大)。从 5 到 45,共有不同的和 41 个(抽屉数)。

在 23×23 方格之中,十字图形的个数一共有 $21\times21=441$(个)(苹果数)运用抽屉原理 2,$441\div41=10\cdots\cdots31$,所以,其中和相等的十字图形至少有 11 个。

练习一

一、填空题

1. 某小学学生的年龄最大为 13 岁,最小为 6 岁,至少要从中挑选________个同学,就一定能使挑出的同学中有两位同学的岁数相同。

2. 一个联欢会有 100 人参加,每个人在这个会上至少有一个朋友。那么这 100 人中至少中________个人的朋友数目相同。

3. 从 1,2,3,…,10 这 10 数中,任取________个数,可以保证在这些数中一定能找到两个数,使其中一个数是另一个数的倍数。

4. 从 1,2,3,…,12 这 12 个数中,任意取出 7 个数,其中差等于 6 的数至少________对。

5. 学校买来历史、文艺、科普图书若干本,每个同学从中任意借两本,那么,至少________个学生中一定有两人所借图书的种数相同。

6. 给正方体的 6 个方面涂上红色或白色,每面只涂一种颜色,则至少有________个面涂的颜色相同。

7. 五个同学一起练习投篮,共投进了 41 个球,那么至少有一个人投进了________个球。

8. 在一个口袋中有 10 个黑球,6 个白球,4 个红球至少从中取出________个球,才能保证其中有白球?

9. 在一行九个方格的图中,把每个小方格涂上黑、白两种颜色中的一种,那么涂色相同的小方格至少有________个。

10. 某班同学的语文考试成绩都是整数,其中最高分为 95 分,最低分为 82 分。已知全班至少有 4 个的成绩相同,这个班至少有________名学生。

二、解答题

11. 任给 7 个不同的整数,求证其中有两个整数,它们的和或差是 10 的倍数。

12. 在边长为 1 的正方形内任取 51 个点,求证一定可以从中找出 3 点,以它们为顶点的三角形面积不大于$\frac{1}{50}$。

13. 在一只箱子里放着红、白、黑三种颜色的手套各 6

副，如果想闭着眼睛从中取出两副颜色不同的手套，问至少要取多少只才能达到要求。

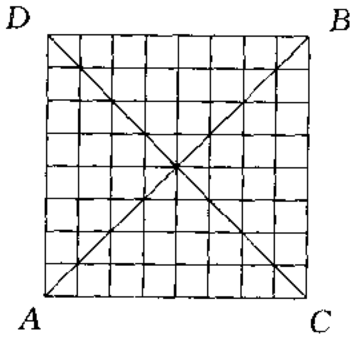
14．口袋中有三种颜色的筷子各 10 根，问：

(1)至少取多少根才能保证三种颜色都取到？

(2)至少取多少根才能保证有两双颜色不同的筷子？

(3)至少取多少根才能保证有两双颜色相同的筷子？

15．能否在下图 8 行 8 列的方格中的每个空格里分别填上 1、2、3 这三个数字中的任一个，使得每行、每列及对角线 AB、CD 上的 8 个空格内的数字和互不相同？



第二讲　单位分数

我们把分子是 1，分母是自然数的分数叫做单位分数。人类对分数的认识是从单位分数开始的。大约在公元前 2000 年，古代埃及人就是把分子大于 1 的分数表示成单位分数的和，例如$\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$。也有人把单位分数，叫做埃及分数。

如何把一个分数分拆成若干个不同的单位分数的和或两个单位分数的差，如何利用单位分数的概念解决一类分数问题都是饶有趣味的数学题，现将这类问题的解法简单地分述如下：

1. 把一个单位分数$\frac{1}{n}$拆成不同的单位分数的和

方法 1：利用等式$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$

例如：$\frac{1}{8}=\frac{1}{9}+\frac{1}{8\times 9}=\frac{1}{9}+\frac{1}{72}$

$\frac{1}{10}=\frac{1}{11}+\frac{1}{10\times 11}=\frac{1}{11}+\frac{1}{110}$

例 1. $\frac{1}{2}=\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}$括号里应填几？

解：因为$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$

而　$\frac{1}{6}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$

所以$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$

依此类推，$\frac{1}{2}$可以写成任意多个单位分数的和。

方法 2：利用 1 的分拆式

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$$

例 2．把$\frac{1}{9}$拆成 5 个不同分数单位的和。

$$\begin{aligned}\frac{1}{9}\times 1&=\frac{1}{9}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}\right)\\&=\frac{1}{18}+\frac{1}{27}+\frac{1}{108}+\frac{1}{180}+\frac{1}{270}\end{aligned}$$

其实，1 可以表示成任意多个分数单位的和。

$$\begin{aligned}1&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\\&=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n}\end{aligned}$$

例 3．找出 8 个小于 60 的偶数，使它们的倒数和等于 1。

解：
$$\begin{aligned}1&=\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{5\times 6}+\frac{1}{6\times 7}\\&\quad+\frac{1}{7\times 8}+\frac{1}{8}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{8}\end{aligned}$$

2．把$\frac{n}{m}$分拆成不同分数单位的和

方法 1：把分数的分子表示成分母的几个不同约数的和，然后把分数分拆成 n 个不同单位分数的和。