

G 11

432.2
X85

结构矩阵分析及可视化

袁耀明 编著



A0979058

北京工业大学出版社

内 容 简 介

本书包括七章和一个附录,主要讲述了杆系结构的矩阵分析理论,及其用计算机程序实现的方法。计算的力学原理均采用位移法。计算机程序是用 NDP-Fortran 语言编写的。对编程技术本书进行了较系统和较深入的论述。附录介绍了可视化技术与结构计算相结合的问题,以及可资引用的实现视算一体化的平台 VCIP。VCIP 有 DOS 上的 NDP-Fortran 与 Windows 上的 Powerstation-Fortran 两种版本。

本书可作为高等院校土建结构类专业本科生教材,也可供相关专业的科技人员和研究生参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

结构矩阵分析及可视化/袁耀明编. —北京:北京工业大学出版社, 1999. 3
ISBN 7-5639-0761-0

I. 结… II. 袁… III. 计算机应用-建筑结构-杆件-结构分析 IV. TU320.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (1999) 第 03882 号

结构矩阵分析及可视化

袁耀明 编著

*

北京工业大学出版社出版发行

各地新华书店经销

徐水宏远印刷厂印刷

*

1999 年 3 月第 1 版 1999 年 3 月第 1 次印刷

787×1092 毫米 16 开本 15.875 印张 390 千字

ISBN7-5639-0761-0/G·415 印数: 1~1000 册

定价: 19.00 元

前 言

近 20 年来的实践证明,使用计算机及相应的理论和方法是解决结构计算的唯一正确途径。作为一名结构工程专业的毕业生,除了应掌握一般结构力学的知识外,在工作实践中还应能了解和使用计算机去解决实际问题,并具有一定的编程能力。作者多年来从事这方面的教学和研究工作,现将有关成果编写成本书,其内容主要是介绍使用矩阵方法分析结构的基本原理,着重于计算机的实现方法。

作者从 70 年代初期就与有关设计单位协作编制各种结构计算程序,之后又进一步开发计算机辅助设计(CAD)软件,至 90 年代初又对结构分析可视化技术进行探索,深知作为一本教科书在内容的取舍方面颇为重要:一方面要按理论的系统性及认识规律循序渐进地安排,另一方面则应尽量引入社会上实际使用软件中的先进方法,摒弃繁琐、陈旧的东西,做到少而精,既讲清关键,又能解决实际问题。经过数十年的磨炼,矩阵位移法在实用上几乎取得了一统天下的局面,因此本书仅叙述这种方法,而且围绕着一结构一个程序紧密结合起来进行展开,而在力学原理及数学方法上则由浅入深地引入。

此外本书还包括了变带宽分块存贮的求解线性方程组的方法和用同时迭代法计算特征值问题。至于近年来颇受关注的可视化技术在结构计算中的应用,在本书则作为附录,除介绍了实现可视化的必要性及可能性外,还讲述了图像显示的原理,基本绘图函数,以及以此为基础开发的一系列子程序,如界面及表格的制作、各种绘图模块及屏幕操作等;由此组成了一个视算一体化平台(VCIP),使编程者能轻轻松松地进入图形处理领域,在自己的专业程序中实现可视化。

由于本书的篇幅所限,有些内容如空间框架的源程序、结构稳定性、影响线绘制等未能列入。尤其是可视化的实际应用,因其牵涉面甚广,只能割爱,读者如有兴趣,可参阅作者主持开发的“钢筋混凝土框架及框剪结构 CAD 软件系统”,其中包括图形建模、三维有限元分析和施工图绘制三部分。

本书由北京建筑工程学院罗健老师校阅,书中难免有不足之处,恳请指正。

编 者

1998 年 10 月

目 录

第一章 概述	1
1.1 方法的提出及求解途径	1
1.2 结构的计算机分析	2
第二章 连续梁的计算	5
2.1 计算原理	5
2.2 连续梁计算的矩阵方法	8
2.3 连续梁计算程序的设计.....	12
2.4 用计算机绘制弯矩图和剪力图.....	22
第三章 平面杆系结构的计算	30
3.1 杆件坐标系中的杆端力与杆端位移的关系.....	30
3.2 向量的坐标变换.....	33
3.3 结构坐标系的杆端力与杆端位移关系.....	34
3.4 平面杆系结构位移法方程式的建立.....	36
3.5 用平方根法求解线性方程组.....	44
3.6 按变带宽存贮的平方根法.....	48
3.7 平面杆件体系结构计算程序的设计.....	54
3.8 支座约束的其它情况	84
第四章 交叉梁系的计算	89
4.1 概述.....	89
4.2 交叉梁系的计算原理.....	89
4.3 交叉梁系计算程序的设计.....	94
第五章 空间桁架的计算	130
5.1 概述	130
5.2 空间桁架的计算原理	131
5.3 总刚分块存贮时线性方程组的解法	134
5.4 空间桁架计算的程序设计	137
第六章 空间框架的计算	168
6.1 空间杆系在杆件坐标系中杆端力和杆端位移的关系	168
6.2 固端内力的计算	170
6.3 空间杆件的坐标变换	172
6.4 空间框架位移法方程式的建立及程序设计要点	178
第七章 结构自由振动的计算	181
7.1 有限自由度体系自由振动的理论基础	181
7.2 求实对称矩阵特征值及特征向量的雅可比法	182

7.3	同时迭代法的原理	185
7.4	同时迭代法的程序设计	189
附录	实现可视化的图形显示系统.....	213
1	计算机图形显示的基本原理	213
2	Fortran 编译程序的基本绘图函数与子程序	217
3	鼠标器及其它增强图形处理功能的函数及子程序	222
4	科学计算中实现视算一体化的必要性与可能性	224
5	视算一体化平台的总体架构	226
6	进行二次开发后的基本绘图子程序	230
7	菜单界面及表格制作子程序	233
8	图形编辑子程序	239
9	具有特定需要的子程序	243
参考文献		247

第一章 概 述

1.1 方法的提出及求解途径

结构力学作为分析工程结构力学性能的一门科学,其发展历史应追溯到 19 世纪中叶,从那时起,它从一般力学中分离出来,成为一门独立的学科。在 19 世纪末,钢结构被广泛采用,而工程结构又大都是超静定的,为了安全与经济,结构计算成为结构设计中必不可少的一步,因而科学家们提出了用力法计算超静定结构的方法。之后,到了 20 世纪初,随着钢筋混凝土结构的大量使用,为计算复杂框架,又提出了位移法。从计算理论的角度看,超静定结构的计算方法已经解决。但是,由于实际结构的复杂性,所要计算的未知数很多,步骤多而繁,最后均归结为求解包含大量未知数的代数联立方程组,工作量很大,用手算难以实现。因此,在 30 年代便有人提出了与位移法一脉相承的一种渐近法——力矩分配法,这样才能计算一些较为复杂的结构。

就数学上表达计算公式及计算过程的一种方式而言,使用矩阵作为一种工具是合乎情理的,因为矩阵形式上简洁明了,运算有规律性。可是,由于求解大量未知数的简捷方法还没有研究出来,使用矩阵仅仅是一种表达形式而已,并没有解决计算中的关键问题,结构力学的发展十分缓慢,工程技术人员作结构计算时经常不得不借助近似计算方法求解。

这一状况延续到本世纪 40 年代中期,出现了电子计算机后,状况开始有转机。电子计算机擅长于作大量的有规律的重复计算,而结构计算中的力法和位移法如用矩阵来表述,正合乎这一特点,如能用它作计算,无疑地会大大加快结构计算的速度,摆脱冗繁的手工计算,提高精度。从而以此为契机,逐步研究出一套适合于计算机的以矩阵形式表达并参与运算的结构分析方法,这就是结构矩阵分析。

这一方法随着 50 年代出现的有限元法而得到了长足发展。有限元法一开始是对连续体作力学分析提出的一种新颖有效的方法。这种方法将连续体假想地分割成为有限的单元组合,并在有限个节点上联接起来,这样一来就将一个必须用解析函数表达的复杂的连续体,变成一个个由简单的单元组成的集合体。如所周知,一般物体的几何形状比较复杂,用解析函数描述十分困难,而在有限元法中,物体剖分的单元可以作得比较简单,虽然个数很多,但各个单元的性质是相同的或基本相同的,分析计算繁而不难。另外,物体离散化后从解析解法变成数值解法,用矩阵表达顺理成章,这些正适合于用计算机进行计算。因此,这种用有限元将连续体剖分或离散化后进行处理的方法,不失为一种近似求解的极佳途径。

此外,我们还可以通过位移函数对单元的变形强迫作一些合乎实际的规定,使单元之间的边界弥合,并推导出相应的节点力与节点位移关系以供分析计算所用,这样随着剖分单元的增加,剖分后的集合体就能十分近似地描述原来的连续体。因此,有限元法一提出并付之实践后,对结构分析产生了深远的影响,取得了很好的效果,被普遍公认为是计算力学发展的新阶段。

对于杆系结构,每一根杆件本身就是一种天然的有限元,划分单元为一根根杆件是理所当然的。同时单元本身的节点力与节点位移的关系十分简单明确,不需作过多的假设,随后的问题便是用矩阵表达和用计算机计算。因此,杆系结构的这种矩阵分析方法也可归作有限元法的一个组成部分。

近 20 年来,有限元法发展很快,在各个专业领域中都得到了广泛应用,并取得了实效,成为计算数学方法论中的一个极具生命力的学科分支。鉴于有限元法涵意较宽,学术界仍把连续体力学分析中的有限元法称为有限元法,而把杆系结构的有限元法分出单独称作结构矩阵分析。

正如前述,在作结构矩阵分析时,矩阵只是用于表达和运算的一种手段,就其物理概念而言,仍与一般结构力学中的相同。根据所取基本未知数的不同,它可分成两类。

一类是矩阵力法。其原理是首先去掉多余约束,使结构成为几何不变的基本体系,去掉的多余约束对结构的作用用多余未知力代替,根据外力及多余未知力所产生的在去掉多余约束处的位移和原结构一致的条件,确定多余未知力的大小,从而求解超静定结构。如计算用矩阵表达,它即为矩阵力法。由于计算过程中主要涉及了对位移的计算,而位移表示了柔度,所以也称柔度法。

另一类是矩阵位移法。位移法的原理是先将结构分解成一根根杆件,根据杆端力与杆端位移的关系方程(或称转角位移方程),可写出杆端力以杆端位移、杆件的几何物理量及荷载为参变数的函数表达式。杆端位移即是节点位移。不管有多少根杆件,有多少个杆端位移,它们不外乎是所有节点位移的另一种表达。以平面杆系结构为例,一个有 n 个节点的结构有 $3n$ 个位移,这些位移是未知的,也是我们所要求的。因为一旦求出所有节点的位移,也就知道了每一杆的杆端位移,所以根据杆端力与杆端位移的关系方程就可求出杆端力,进而求出其它截面的内力及应力等也就不难了。

由此可见,问题的关键是求出所有节点的位移。那么怎样求出所有的节点位移呢?从另一个角度看,杆端力是节点对杆端作用的力,其反作用力就是对节点作用的力。作用在节点上的所有力应该是平衡的,在平面杆系结构中一个节点可列出 3 个平衡方程式, n 个节点就可列出 $3n$ 个平衡方程式。我们将所有杆端力的表达式代入这些方程式中,便可得到联系 $3n$ 个未知位移的 $3n$ 个联立方程式,求解后不难得出这 $3n$ 个未知位移的值。

由于矩阵力法在表达方式上远不如矩阵位移法简单明了,因此绝大部分结构计算均采用矩阵位移法。由于计算过程中主要涉及了对杆端力的计算,而杆端力表示了刚度的大小,所以它也称刚度法。

1.2 结构的计算机分析

结构分析是一件复杂繁重的数字计算工作。在计算机出现以前,科技界研究出了各种各样的方法,除了计算理论外,其中一个重要的方面是怎样使计算既方便而精度又符合要求。但是历经多年的努力,收效甚小。

随着电子数字计算机(即通常所说的计算机)登上历史舞台,数字计算工作变得不那么困难了。将它应用于结构计算后,就可以进行大量复杂的计算,速度快,精度也高。

因为计算机本身只能做简单的算术运算和逻辑判别,故必须将结构的计算数值化,即

把连续的以解析形式表达的函数用各分点的量值来代替。举例来说,原来连续的板弯曲的弹性曲面,就应用各点的位移来描述,此时用矩阵来表示各点的位移是最好不过的了。可见,矩阵表达的简单明了及运算的规律化,正适合于这样一种计算工具,它是结构计算和计算机之间必不可少的媒介。

既然问题的描述已数值化,那么很自然地在数学方法上均应采用数值方法。一个典型的例子就是把积分用求和代替。使用计算机必须编制程序,程序是用来指挥计算机工作的机器能接受的一系列指令。最初的程序是用机器代码来编写的,称为机器语言程序或代码语言程序,这种程序既抽象,又繁复,代码指令极不易记忆,编制起来也就十分困难。为了便于人们使用,计算机工作者研制出了一种类似于人的语言的所谓高级程序语言。人们用它编出的程序概念清楚,简单方便。当高级语言程序输入计算机后,必须将它翻译成机器能懂的语言才能执行,这种翻译工作,就由计算机软件人员专门研究出来的所谓编译程序来完成。

科学计算大都使用高级语言编制程序。适合于科学计算的高级语言有多种,如 Basic、Fortran 及 Pascal 等。Fortran 是世界上推行最早的一种高级语言,它具有可分块编译的模块化程序结构的性质,并已编出大量的各个专业的现成程序,因而目前仍是科学计算中的主流语言。

模块化结构是编制程序的良好方式,应尽量采用。所谓模块是指在整个程序中完成一定功能并且相对独立的程序单元。通过一定的数据传送格式,将整个程序(通常称为主程序)中的原料数据输入这一计算模块(也称子程序),经过加工后将成品数据返回给主程序。子程序可以单独编译成目标文件(*.OBJ),通过与主程序的目标文件联接,形成运行文件。显然,模块化结构正适合于科学计算中分阶段逐步完成所要进行工作的流程。

本书所使用的是 Fortran 语言。

要计算就需将数据存入计算机。除原始数据外,主要是求解线性方程组时的系数矩阵,应将它们存入内存才好计算。可是计算机的内存容量有限,计算结构特别是复杂结构所需的内存一般较大,因此研究出一种既能节省内存用量又能快速准确计算出结果的数学方法显得特别重要。

在结构矩阵分析中求解线性方程组的计算工作量占相当比重。解法通常有两类:直接法和迭代法。由于直接法速度快,内存用量虽大但可用一些数学方法(如矩阵变带宽存贮和分块存贮的方法)缩小,基本上可以解决,所以在结构计算中通常使用直接法。

结构计算离不开图形,如计算简图、内力图、包络图、变形图及影响线等。对这些图使用者总是希望在计算过程中能由计算机画出来,因此要求程序语言及编译程序能具有图形功能。现在的 Fortran 语言已带有图形支撑,编程时可直接调用。作者还将其所带的绘图函数及子程序加以扩展,开发了可以直接调用的子程序,用它可方便地画出图形。

根据计算机图形显示的理论,图与数是一致的,此即是所谓的图象数字化。因此,当我们在屏幕上用适当的方式和方法(如用鼠标器)画出图来时,就可得出描绘图形的相应数据。基于这一原理,作结构计算时就可通过在屏幕上画计算简图,得出以后计算所需的原始数据,这就是当前流行的利用图形建模获取计算数据的方法。

人们不仅要求结构计算能用图形显示出来,并且还希望能通过屏幕操作干预和引导计算,例如通过改变图形来改变数据,用以影响计算。再如结构上作用的移动荷载,操作若

能通过鼠标器或键盘拖动它,借此观察它对结构的影响,画出影响线,这就增加了计算的形象化。这一技术称为结构计算可视化。

实现以上功能的关键是计算与绘图的紧密结合,也就是在编程时做到视算一体化。作者根据 Fortran 语言中已有的基本绘图函数及子程序,开发出一系列用于图形处理的子程序模块,形成一个叫作视算一体化平台(Visual-Computing Integration Platform)的图形支撑软件,使用者只要在自己的程序中调用它们即可。本书附录中将系统地介绍这一高新技术。

现在微型机的发展很快,硬件软件日新月异,此种机型价格又便宜,使用方便,适合于一般的科学计算。本书将主要介绍适用于微型机的编程方法和计算方法。

第二章 连续梁的计算

2.1 计算原理

用矩阵位移法计算连续梁时,位移法方程式是根据支座节点的力矩平衡条件建立的。如图 2.1.1 所示的三跨连续梁,左右两端固定,则其位移未知数仅为 1、2 两个节点的转角 θ_1 、 θ_2 ,规定顺时针为正。按叠加原理,杆端弯矩由位移(此处为转角)弯矩及固端弯矩两部分组成,以对杆端顺时针作用为正。杆端剪力可待杆端弯矩求得后再算出。

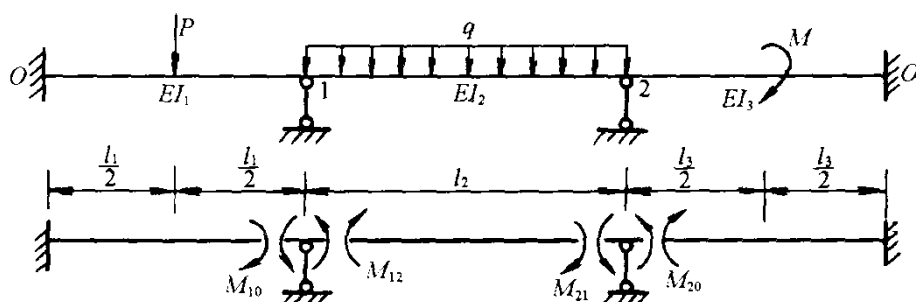


图 2.1.1

今列出节点 1、2 的力矩平衡方程式为

$$\left. \begin{aligned} M_{10} + M_{12} &= 0 \\ M_{21} + M_{20} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1.1)$$

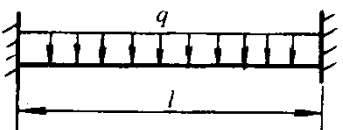
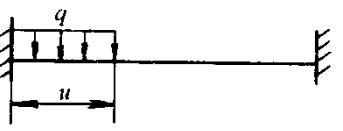
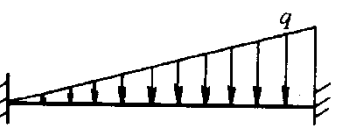
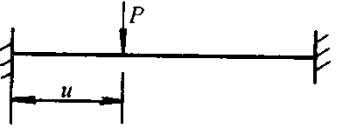
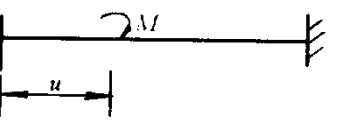
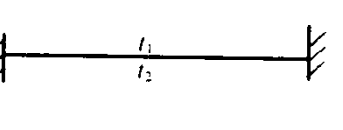
杆端弯矩的表达式为

$$\left. \begin{aligned} M_{01} &= \frac{2EI_1}{l_1}\theta_1 - \frac{1}{8}Pl_1 \\ M_{10} &= \frac{4EI_1}{l_1}\theta_1 + \frac{1}{8}Pl_1 \\ M_{12} &= \frac{4EI_2}{l_2}\theta_1 + \frac{2EI_2}{l_2}\theta_2 - \frac{1}{12}ql_2^2 \\ M_{21} &= \frac{2EI_2}{l_2}\theta_1 + \frac{4EI_2}{l_2}\theta_2 + \frac{1}{12}ql_2^2 \\ M_{20} &= \frac{4EI_3}{l_3}\theta_2 + \frac{1}{4}M \\ M_{02} &= \frac{2EI_3}{l_3}\theta_2 + \frac{1}{4}M \end{aligned} \right\} \quad (2.1.2)$$

式中杆端弯矩由两部分组成。由转角产生的弯矩称为转角弯矩。由荷载作用于杆上并假定两端固定时产生的弯矩称为固端弯矩。在表 2.1.1 中列出了几种荷载作用时的固端弯矩及固端剪力的计算公式。图中左端为 a , 右端为 b 。

将(2.1.2)式中的杆端弯矩代入(2.1.1)式,整理后可得

表 2.1.1 等截面杆件的固端弯矩和剪力

计算简图	固端弯矩	固端剪力
	$M_{ab} = -\frac{ql^2}{12}$ $M_{ba} = +\frac{ql^2}{12}$	$Q_{ab} = +\frac{ql}{2}$ $Q_{ba} = -\frac{ql}{2}$
	$M_{ab} = -\frac{qu^2}{12l^2}(6l^2 - 8lu + 3u^2)$ $M_{ba} = \frac{qu^3}{12l^2}(4l - 3u)$	$Q_{ab} = -\frac{qu}{2l^3}(2l^3 - 2lu^2 + u^3)$ $Q_{ba} = -\frac{qu^3}{2l^3}(2l - u)$
	$M_{ab} = -\frac{ql^2}{30}$ $M_{ba} = +\frac{ql^2}{20}$	$Q_{ab} = +\frac{3ql}{20}$ $Q_{ba} = -\frac{7ql}{20}$
	$M_{ab} = -\frac{Pu}{l^2}(l-u)^2$ $M_{ba} = \frac{Pu^2}{l^2}(l-u)$	$Q_{ab} = \frac{P}{l^3}(l-u)^2(l+2u)$ $Q_{ba} = -\frac{P}{l^3}u^2(3l-2u)$
	$M_{ab} = \frac{M}{l^2}(l-u)(3u-l)$ $M_{ba} = \frac{M}{l^2}(2l-3u)u$	$Q_{ab} = -\frac{6Mu}{l^3}(l-u)$ $Q_{ba} = -\frac{6Mu}{l^3}(l-u)$
	$M_{ab} = \frac{EI\alpha(t_1-t_2)}{h}$ $M_{ba} = -\frac{EI\alpha(t_1-t_2)}{h}$	$Q_{ab} = 0$ $Q_{ba} = 0$

注:表中剪力正负号按一般材料力学中的规定;左面部分有向上的趋势时为正,温度一项中 α 为线膨胀系数, h 为截面高度。

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{4EI_1}{l_1} + \frac{4EI_2}{l_2} \right) \theta_1 + \frac{2EI_2}{l_2} \theta_2 &= -\frac{1}{8}Pl_1 + \frac{1}{12}ql_2^2 \\ \frac{2EI_2}{l_2} \theta_1 + \left(\frac{4EI_2}{l_2} + \frac{4EI_3}{l_3} \right) \theta_2 &= -\frac{1}{12}ql_2^2 - \frac{1}{4}M \end{aligned} \right\} \quad (2.1.3)$$

等式右端的项是等式左端的固端弯矩移过去的,当然要加负号。从物理概念上讲,它们可以看作等效节点力。今用图 2.1.2 所示的梁来说明。为保持节点 1 不旋转,应在节点上加一刚臂,相应地当然会在节点上施加一外约束力矩[图 2.1.2(a)]。现为了使其回复到实际受力情况,则应放松刚臂的约束,或可看作将这一外约束力矩反向作用于节点 1 上[图 2.1.2(b)]。根据力的独立作用原理(或称叠加原理),这一反向的力矩作用过程所达到的节点转角效果,相当于原来的杆上荷载作用效果,故称为等效节点荷载。梁的最后受力状态[图 2.1.2(c)]是固端受力状态和等效节点荷载作用的受力状态的叠加。可以想象,(2.1.3)式代表了等效节点荷载作用的状态,右端项即为等效节点荷载。

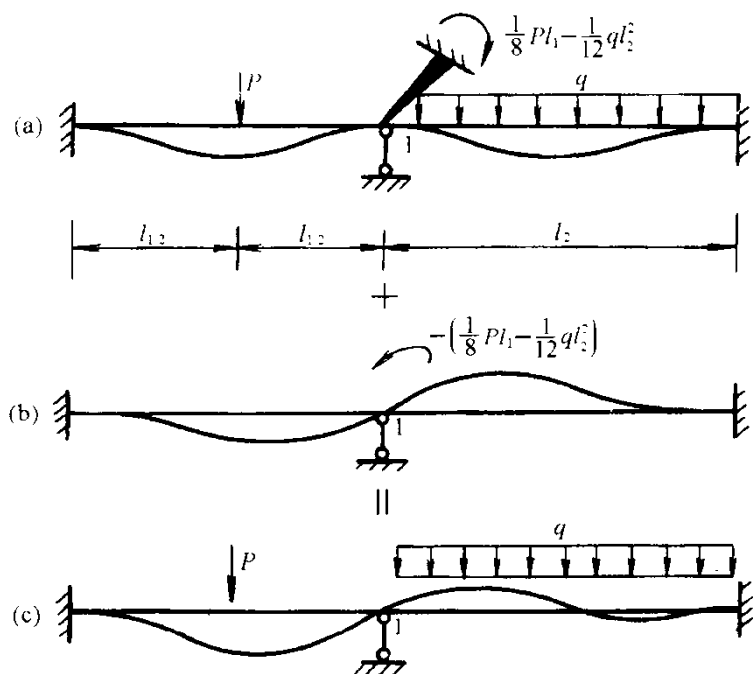


图 2.1.2

将(2.1.3)式写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \frac{4EI_1}{l_1} + \frac{4EI_2}{l_2} & \frac{2EI_2}{l_2} \\ \frac{2EI_2}{l_2} & \frac{4EI_2}{l_2} + \frac{4EI_3}{l_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{8}Pl_1 + \frac{1}{12}ql_2^2 \\ -\frac{1}{12}ql_2^2 - \frac{1}{4}M \end{Bmatrix} \quad (2.1.4)$$

等式左端的系数矩阵描述了结构的综合刚度,称为结构的总刚度矩阵。根据反力互等定理, θ_1 产生单位转角时在 θ_2 处产生的相应反力矩等于 θ_2 产生单位转角时在 θ_1 处产生的相应反力矩,均为 $\frac{2EI_2}{l_2}$,故以上总刚度矩阵是对称的。

求解以上线性方程组得出 θ_1 及 θ_2 后,代入(2.1.2)式,即可求得杆端弯矩。

对于一端或两端为铰支的连续梁(图 2.1.3),按照传统,在结构力学中习惯于不将铰支端的转角 θ_3 求出,只是列出左端(近端)弯矩表达式时考虑右端(远端)为铰,其弯矩值为 $\frac{3EI_3}{l_3}\theta_2$,相应的固端弯矩为 $\frac{1}{8}M$,即 $M_{23} = \frac{3EI_3}{l_3}\theta_2 + \frac{1}{8}M$ 。将这一 M_{23} 代替(2.1.1)、(2.1.2)式中的 M_{20} ,下面计算完全相同。

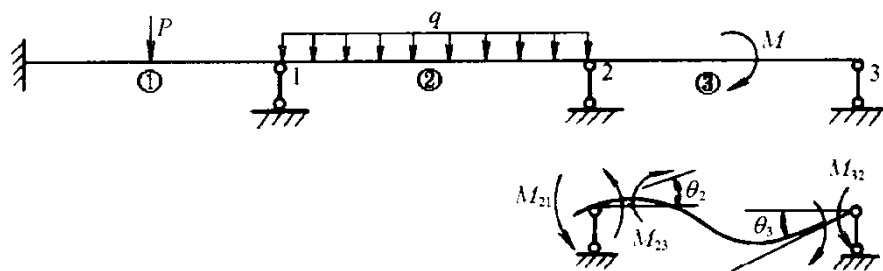


图 2.1.3

如按这一做法编制程序,将会带来诸多不便。因为要考虑梁的两端固定、左端固定右端铰支及左端铰支右端固定等 3 种情况。计算机计算的特点是不怕重复多而怕头绪多,如采用这一方案,不仅程序设计复杂,而且使用时也要多输入信息,如指定左、右端的约束情况。

一种可取的办法是将铰支端的转角 θ_3 也算作待求的未知数, 而把每一跨一视同仁地看作两端均可弹性转动的基本杆件。这样处理虽然未知数多了几个, 但对用计算机求解来讲, 多几个未知数是无足轻重的, 可是在编程时就方便多了, 因为所有杆件的约束情况均相同, 不必区别对待。

对于图 2.1.3 右端铰支的情况, 多列的一个方程式是节点 3 的平衡方程式

$$M_{32} = 0, \quad \frac{2EI_3}{l_3}\theta_2 + \frac{4EI_3}{l_3}\theta_3 + \frac{M}{4} = 0$$

当然, 在列节点的力矩平衡方程时, 杆端弯矩 M_{23} 中应加入因 θ_3 而对这一弯矩的影响 $\frac{2EI_3}{l_3}\theta_3$ 。将所有的线性方程组列出成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \frac{4EI_1}{l_1} + \frac{4EI_2}{l_2} & \frac{2EI_2}{l_2} & 0 \\ \frac{2EI_2}{l_2} & \frac{4EI_2}{l_2} + \frac{4EI_3}{l_3} & \frac{2EI_3}{l_3} \\ 0 & \frac{2EI_3}{l_3} & \frac{4EI_3}{l_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{8}Pl_1 + \frac{1}{12}ql_2^2 \\ -\frac{1}{12}ql_2^2 - \frac{1}{4}M \\ -\frac{1}{4}M \end{Bmatrix} \quad (2.1.5)$$

解出转角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 后代入杆端弯矩的表达式, 即得计算结果。显然, 求出的 M_{32} 应等于零。

对于节点荷载的处理也采用同样的指导思想。节点荷载在实际工程结构中出现很少, 在设计程序时不必为此增加一种荷载类型而加大程序量及信息输入量。我们的做法是将节点荷载也当杆上荷载处理。作用在左节点的情况, 荷载作用距离 u 取 0, 作用在右节点的情况, 荷载作用距离 u 取杆长 l 。

2.2 连续梁计算的矩阵方法

将位移法方程式列出后排成矩阵形式, 虽已涉足于结构的矩阵表达, 但还不能看作是真正的结构矩阵分析, 而只能看作是矩阵方法的初步应用。结构的矩阵分析有其深刻的内涵, 它不仅要将计算过程自始至终地用矩阵来表示, 而且矩阵的形成方法也要按照矩阵的运算规律和程序实现的方便来做。

为此, 从连续梁中取出某一段梁考虑(图 2.1.1), 将每一段梁从左到右用序号 $i=1, 2, \dots, m$ 依次编号。将每一个可动节点(即非固定端)也用节点号 $j=1, 2, \dots, n$ 依次编号。

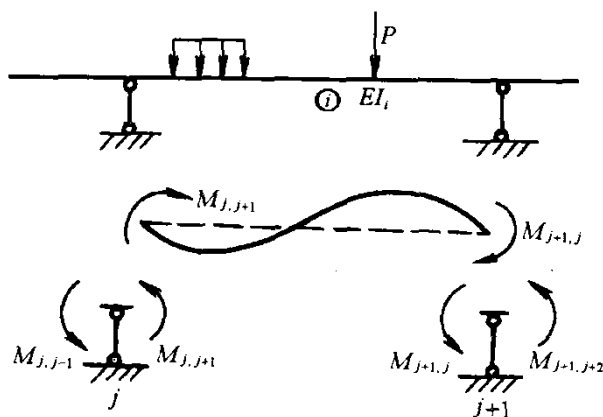


图 2.2.1

显然, 节点号也就是待求的节点转角 θ 的编号。

列出杆端弯矩与杆端转角的关系式为

$$M_{j,j+1} = \frac{4EI_i}{l_i}\theta_j + \frac{2EI_i}{l_i}\theta_{j+1} + M_{j,j+1}^f$$

$$M_{j+1,j} = \frac{2EI_i}{l_i}\theta_j + \frac{4EI_i}{l_i}\theta_{j+1} + M_{j+1,j}^f$$

式中, $M_{j,j+1}^f, M_{j+1,j}^f$ 为将梁两端假想固定时由于外荷载作用引起的固端弯矩。将上式写成矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} M_{j,j+1} \\ M_{j+1,j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4EI_i}{l_i} & \frac{2EI_i}{l_i} \\ \frac{2EI_i}{l_i} & \frac{4EI_i}{l_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_j \\ \theta_{j+1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M_{j,j+1}^f \\ M_{j+1,j}^f \end{Bmatrix} \quad (2.2.1)$$

式中转角位移前的系数矩阵

$$[K^e] = \begin{bmatrix} \frac{4EI_i}{l_i} & \frac{2EI_i}{l_i} \\ \frac{2EI_i}{l_i} & \frac{4EI_i}{l_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(i)} & K_{12}^{(i)} \\ K_{21}^{(i)} & K_{22}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (2.2.2)$$

称为杆件的单元刚度矩阵,它综合反映了一根杆件的刚度大小。显然,这一 2×2 的矩阵是对称的,即 $K_{12}^{(i)} = K_{21}^{(i)}$ 。

将以上关系式写成通式,为

$$\begin{cases} M_{j,j+1} = K_{11}^{(i)}\theta_j + K_{12}^{(i)}\theta_{j+1} + M_{j,j+1}^f \\ M_{j+1,j} = K_{21}^{(i)}\theta_j + K_{22}^{(i)}\theta_{j+1} + M_{j+1,j}^f \end{cases} \quad (2.2.3)$$

在列出整个结构的位移法方程式时,应根据节点力矩平衡条件从节点 1 开始顺次到节点 n 列出 n 个方程式。不言而喻,这 n 个力矩平衡方程式是依次排列的,它们也对应于依次排列的与力矩平衡相应的 n 个位移。对于图 2.2.1 所示的第 i 段梁,其两端的平衡方程式为

$$\begin{cases} M_{j,j-1} + M_{j,j+1} = 0 \\ M_{j+1,j} + M_{j+1,j+2} = 0 \end{cases} \quad (2.2.4)$$

实际上以上杆端力的脚标意味着对杆端力也进行了编号。其中第 1 个编号(即第 1 个脚码)表示了该杆端力[见(2.2.3)式]与哪一个位移对应,也就是参与哪一个力矩平衡条件,或者说进入哪一行的平衡方程式。在依次列出第 1 个到第 n 个($j=1,2,\dots,n$)平衡方程式时,只要查一下所有杆端力的第 1 个编号(如为 j),将它加入到这一编号的(即第 j 个或第 j 行)方程式中去就行了。

如用矩阵表示,则相当于逐行形成整个线性方程组中系数矩阵的元素及右端项中的元素(即等效节点力)。

从计算机程序设计的角度来讲,这不是一个好的办法,因为每形成一个方程式($j=1 \sim n$),必须搜索每一根杆件($i=1 \sim m$)的两端的杆端力编号,这就要进行双重循环的运算,计算工作量较大。

现有的程序均采用对杆件($i=1 \sim m$)进行一次循环就能形成系数矩阵及右端项的做法,其基础就是杆端力的编号。很明显,一个有 n 个未知数的线性方程组,其系数矩阵即总刚度矩阵是 $n \times n$ 阶的,右端项是有 n 个元素的向量。因此不妨事先将这一矩阵框架列出,包括系数矩阵、未知数向量及右端项向量三部分,其中每一行代表同一个方程式。现在我们对每一杆从 $i=1 \sim m$ 进行循环,观察当前杆两端杆端力的编号,如为 j 和 $j+1$,便把杆端力表达式中未知位移前的系数(即单刚中的元素 $K_{11}^{(i)}$ 、 $K_{12}^{(i)}$ 、 $K_{21}^{(i)}$ 、 $K_{22}^{(i)}$)充入矩阵的第 j 行和第 $j+1$ 行;至于哪个系数放到哪一列,则根据矩阵与向量相乘的法则,不难想到,第 j 个未知数前的系数 $K_{11}^{(i)}$ 和 $K_{21}^{(i)}$,应叠加到第 j 列上。第 $j+1$ 个未知数前的系数 $K_{12}^{(i)}$ 和 $K_{22}^{(i)}$,应叠加到第 $j+1$ 列上。关于固端弯矩项,因为是已知的,则加负号后充入右端项第 j 行和

$j+1$ 行中。这样对每一杆件做完,系数矩阵及右端项就形成了。此处采用叠加的做法是由于这样的考虑:节点 j 的旋转刚度应是其左、右两跨的刚度之和。

为了便于指示某杆两个杆端力去参与哪两个平衡方程式,或者说其系数应充入总刚度矩阵的哪两行,今引入一个整形数组

$$B(m, 2)$$

存放杆件两端的位移编号,也就是杆端力的编号。如第 i 根杆件的编号为 $j, j+1$, 在数组 B 中就放在第 i 行,即 $B(i, 1)=j, B(i, 2)=j+1$, 见

$$B = \begin{bmatrix} \times & \times \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ j & j+1 \\ \vdots & \vdots \\ \times & \times \end{bmatrix} \quad \text{—— 第 } i \text{ 行} \quad (2.2.5)$$

这一数组在给出连续梁两端的约束信息(固定或铰支)时可自动形成。有了这一位移编号数组 B 后,根据它的指引,就可将每一杆的单刚元素及固端力充入总刚及右端项的对应位置,即所谓对号入座。例如,第 i 杆的单刚中的 4 个元素应根据其位移号 $B(i, 1)$ 及 $B(i, 2)$, 充入总刚的第 $B(i, 1)$ 行和第 $B(i, 2)$ 行。并分别放在第 $B(i, 1)$ 列和第 $B(i, 2)$ 列。第 i 杆的固端力向量中的两个元素,就应加负号后充入到右端项的第 $B(i, 1)$ 行和第 $B(i, 2)$ 行中,其过程示意如下:

$$\begin{array}{c} \text{第 } B(i, 1) \text{ 行} \quad \text{第 } B(i, 2) \text{ 行} \\ \left[\begin{array}{cc} \vdots & \vdots \\ K_{11}^{(i)} & K_1^{(i)} \\ K_{21}^{(i)} & K_{22}^{(i)} \\ \vdots & \vdots \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_{B(i, 1)} \\ \theta_{B(i, 2)} \\ \vdots \\ \theta_n \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ -M_{B(i, 1), B(i, 2)}^{f(i)} \\ -M_{B(i, 2), B(i, 1)}^{f(i)} \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \end{array} \quad (2.2.6)$$

不同的杆进入总刚及右端项的系数可能位置相同,故应采用叠加方法。

由于单刚是对称的,其放置于总刚的位置也是对称的。从直觉就可判断出总刚也是对称的。当然总刚的对称性从反力互等定理也可由物理概念上得到证实。总刚的对角线元素称为主元素,非对角线元素称为副元素。由于连续梁某一个节点只与相邻两个节点发生关系,每一个平衡方程式只有 3 个未知数,亦即只有 3 项,故现在总刚上每一行只有 3 个元素,由此看到,总刚度矩阵的非零元素是三对角线的。当某一杆的位移编号有一个为 0 时,说明这一端是固定支座,固定端是不列节点平衡方程式的,于是与此端相应的单刚中的元素也就不进入总刚了。右端项也一样。

当求解线性方程组得出转角位移 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ (存在数组 θ 中)后,欲求第 i 跨梁的杆端弯矩,可根据这一跨梁两端的节点编号 $B(i, 1)$ 和 $B(i, 2)$, 从位移向量 θ 中取出第 $B(i, 1)$

个和第 $B(i, 2)$ 个的值

$$\theta(B(i, 1)), \theta(B(i, 2))$$

后, 乘上这一跨梁的单刚 $[K^e]^{(i)}$, 便可求出转角弯矩。再叠加上这一跨梁两端的固端弯矩, 即得所求的梁端的弯矩, 表达式为

$$\begin{Bmatrix} M_{B(i, 1), B(i, 2)} \\ M_{B(i, 2), B(i, 1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(i)} & K_{12}^{(i)} \\ K_{21}^{(i)} & K_{22}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{B(i, 1)} \\ \theta_{B(i, 2)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M_{B(i, 1), B(i, 2)}^{f(i)} \\ M_{B(i, 2), B(i, 1)}^{f(i)} \end{Bmatrix} \quad (2.2.7)$$

以下用计算实例加以说明。

例 2.2.1 计算图 2.2.2 所示连续梁, $E=10^7 \text{kN/m}^2$, $I=10^{-5} \text{m}^4$, $l_1=4\text{m}$, $l_2=8\text{m}$, $l_3=5\text{m}$, 荷载如图 2.2.2 所示。

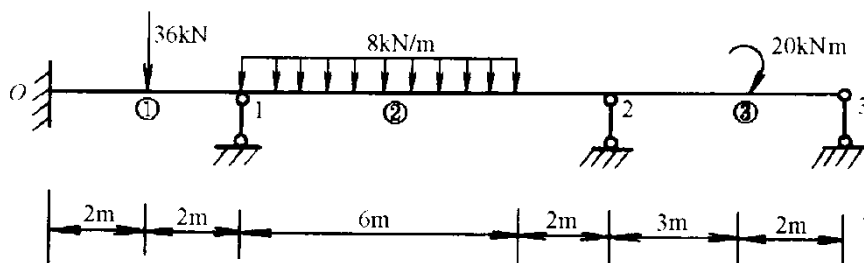


图 2.2.2

今逐跨列出单刚及固端弯矩:

$$\text{第 1 跨: } [K^e]^{(1)} = \begin{bmatrix} 100 & 50 \\ 50 & 100 \end{bmatrix}, \{M^f\}^{(1)} = \begin{Bmatrix} -18 \\ 18 \end{Bmatrix}$$

$$\text{第 2 跨: } [K^e]^{(2)} = \begin{bmatrix} 50 & 25 \\ 25 & 50 \end{bmatrix}, \{M^f\}^{(2)} = \begin{Bmatrix} -40.5 \\ 31.5 \end{Bmatrix}$$

$$\text{第 3 跨: } [K^e]^{(3)} = \begin{bmatrix} 80 & 40 \\ 40 & 80 \end{bmatrix}, \{M^f\}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 6.4 \\ 2.4 \end{Bmatrix}$$

各跨梁的位移编号数组为

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

根据单刚及固端弯矩中的元素按指示矩阵 B 向总刚及右端项叠加, 可得

$$\begin{bmatrix} 100 + 50 & 25 & 0 \\ 25 & 50 + 80 & 40 \\ 0 & 40 & 80 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -18 + 40.5 \\ -31.5 - 6.4 \\ -2.4 \end{Bmatrix}$$

求解线性方程组后得角位移

$$\{\theta\} = \begin{Bmatrix} 0.2137 \\ -0.3822 \\ 0.1611 \end{Bmatrix}$$

接着求杆端弯矩:

$$\text{第 1 跨 } \begin{Bmatrix} M_{01} \\ M_{10} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 50 \\ 50 & 100 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.2137 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -18 \\ 18 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7.31 \\ 39.37 \end{Bmatrix} \text{ kNm}$$