

最优控制的理论与方法

最优控制的理论与方法

吴 沧 浦 编著

国防工业出版社

0223
C24

最优控制的理论与方法

吴 沧 浦 编著

国防工业出版社

内 容 简 介

本书阐述集中参量系统的最优控制的理论和方法,重点阐述确定性系统的最优控制,其中包括时间离散系统与时间连续系统,最后用一章的篇幅介绍随机最优控制的基本概念和基本原理。本书理论与算法并重,大体上采取理论与算法分开阐述的方式,也有少量联系紧密的采取结合起来阐述的方式。理论部分包括与最优控制联系紧密的数学规划与泛函分析,最大值原理,动态规划;方法部分包括主要用于时间离散系统的数学规划算法、动态规划算法和用于时间连续系统的函数空间中的基本迭代算法,其中包括直接法与基于最大值原理和基于动态规划的间接法。本书力图引用此领域中的较新成果,并将有实用价值的算法置于重要地位,给出详细程序。本书的读者对象是有关专业研究生及科技人员。

最优控制的理论与方法

吴 沧 浦 编著

国防工业出版社出版

(北京市车公庄西路老馆宅旁)

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印刷

787×1092 1/16 印张12³/₄ 290千字

1989年5月第一版 1989年5月第一次印刷 印数: 6,001 1,480册

ISBN 7-118-00480-4/O·34 定价: 2.55元

出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作分工的规定，我部承担了全国高等学校工科电子类专业课教材的编审、出版的组织工作。从一九七七年底到一九八二年初，由于各有关院校、特别是参与编审工作的广大教师的努力和有关出版社的紧密配合，共编审出版了教材 159 种。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应社会主义现代化建设培养人才的需要，反映国内外电子科学技术水平，达到“打好基础、精选内容、逐步更新、利于教学”的要求，在总结第一轮教材编审出版工作经验的基础上，电子工业部于一九八二年先后成立了高等学校《无线电技术与信息系统》、《电磁场与微波技术》、《电子材料与固体器件》、《电子物理与器件》、《电子机械》、《计算机与自动控制》、中等专业学校《电子类专业》、《电子机械类专业》共八个教材编审委员会，作为教材工作方面的一个经常性的业务指导机构，并制定了一九八二至一九八五年教材编审出版规划。列入规划的教材、教学参考书、实验指导书等共 217 种选题。在努力提高教材质量，适当增加教材品种的思想指导下，这一批教材的编审工作由编审委员会直接组织进行。

这一批教材的书稿，主要是从通过教学实践、师生反映较好的讲义中评选择优和从第一轮较好的教材中修编产生出来的。广大编审者，各编审委员会和有关出版社都为保证和提高教材质量作出了努力。

这一批教材，分别由电子工业出版社、国防工业出版社、上海科学技术出版社、西北电讯工程学院出版社、湖南科学技术出版社、江苏科学技术出版社、黑龙江科学技术出版社和天津科学技术出版社承担出版工作。

限于水平和经验，这一批教材的编审出版工作肯定还会有许多缺点和不足之处，希望使用教材的单位、广大教师和同学积极提出批评建议，共同为提高工科电子类专业教材的质量而努力。

电子工业部教材办公室

前 言

由于计算机技术的发展,在自动控制、系统工程等专业领域内,数值方法具有越来越重要的地位。在这些学科的研究领域中,诸如数学规划、动态规划的数值方法在最优控制的专门问题上的技巧发展已成为引起广泛兴趣的课题,并在工程实践中起着日益重要的作用。本书的目的是要在研究生课程的深度上阐述最优控制的基本理论的同时,针对实际应用的需要,用较多的篇幅介绍在最优控制的应用中较成熟、较有成效的算法。

在理论方面,结合算法上的需要,除最大值原理与动态规划理论外,在第二章专门介绍了数学规划的基本理论。在理论阐述的方法上,按控制对象的特征,从不同角度区分,对时间离散与时间连续系统,确定性与随机性系统,分别介绍其有关理论。在所有这些不同对象的最优控制理论的阐述中,贯穿始终的中心线索是动态规划理论。这是由于作者认为,在最优控制的领域内,对于目前越来越广泛的对象,能够将其理论贯通起来的最有力的工具,莫过于动态规划,这在以随机动态系统作为对象的最优控制问题上,显得格外清楚。因此,本书不仅采用以动态规划基本思想证明最大值原理的论述方法,使读者能更深刻地掌握最大值原理与动态规划理论的内在联系;以动态规划的理论和方法统一处理确定性与随机性控制问题,使读者能更深刻理解随机控制问题的基本特征及其与确定性控制问题的联系与区别;而且还以较多的篇幅介绍动态规划的数值方法,这是本书的特点所在。

最优化算法已发展了种类极其繁多的算法,其中适用于最优控制问题的也如此。因之本书不采用罗列各种算法的阐述方式,而着重介绍算法的基本概念、基本理论和具有根基作用的一些基本算法。读者在掌握了这些内容后,就有可能在算法的汪洋大海中航行自如。

本书力求在一般专业的研究生数学水平基础上展开论述,只在少数章节用到泛函分析的工具,不熟悉此工具的读者可将这部分略去。本书还力图在上述深度的基础上引用较新成果,特别是八十年代以后的成果。在注意给出严密理论基础的同时,也尽量避免由于引用复杂的数学工具而掩盖了基本的概念。但写作过程中深感力不从心,不时有顾此失彼之感。由于写作时间匆促,且限于作者水平,书中不免存在缺点和错误,衷心盼望读者批评指正。

目 录

第一章 问题的提法与数学模型	1
§ 1 时间离散系统的最优控制问题	1
§ 2 数学规划模型	3
§ 3 时间连续系统的最优控制问题	6
• § 4 泛函极值模型	10
第二章 数学规划基本理论	13
§ 1 无约束极值及等式约束极值理论	13
§ 2 库恩-塔克 (Kuhn-Tucker) 理论	15
§ 3 拉格朗日对偶性与鞍点最优性	22
§ 4 算法的基本性质	26
第三章 最大值原理基本理论	33
§ 1 时间连续系统最大值原理的若干形式	33
§ 2 最大值原理的证明	39
• § 3 最大值原理的证明 (泛函分析方法)	51
§ 4 登月艇的软着陆推力控制问题	58
§ 5 时间离散系统的最大值原理	62
第四章 动态规划基本理论	72
§ 1 时间离散系统的动态规划理论	72
§ 2 具有二次型指标函数的线性系统最优控制问题 (时间离散系统)	79
§ 3 时间连续系统的动态规划理论	83
§ 4 最速控制与二次型指标线性系统最优控制问题 (时间连续系统)	92
§ 5 动态规划常规算法	97
§ 6 动态规划与最大值原理的关系	102
第五章 时间离散系统最优控制问题的数值方法	108
§ 1 无约束算法, 最速下降法与牛顿法	108
§ 2 无约束算法, 共轭梯度法与拟牛顿法	119
§ 3 有约束算法	127
§ 4 时间离散系统动态规划的特殊算法	140
§ 5 时间离散系统的微分动态规划	146

第六章 时间连续系统最优控制问题的数值方法	154
§ 1 函数空间中梯度的求法	154
§ 2 函数空间中的最速下降法与共轭梯度法	161
§ 3 函数空间中的牛顿法	164
§ 4 时间连续系统的微分动态规划	169
第七章 随机最优控制简论	174
§ 1 问题的提法	174
§ 2 时间离散系统的随机动态规划	178
§ 3 状态信息不完整的随机控制问题	181
§ 4 次优控制技术	189
参考文献	195

第一章 问题的提法与数学模型

本章讨论确定性动态系统在数量指标情况下的最优控制问题的一般模型, 以及与之密切相关的两种数学理论模型, 即数学规划模型与泛函极值模型。随机系统的情况及与之有关的数学理论模型将在第七章讨论, 与确定性及随机性两种动态系统均有密切关系的另一种重要数学理论模型即动态规划模型, 将在第四、七两章中讨论。在所讨论的问题范围内, 我们将从应用的观点出发尽可能将问题提得具有广泛的普遍性, 而在后面的章节中根据问题处理的方便将模型适当地特殊化。

从事应用科学的工作的人们都知道, 一个实际问题, 可以抽象成不同的理论模型, 而且, 一个理论模型, 可以经过适当的变换用不同的形式表示出来。一个实际问题是否便于进行理论处理与是否便于实现数值解算, 在很大程度上取决于它是否被提成一个合适的理论模型的形式。本章将结合典型实例, 对上述的建模灵活性问题及模型的形式转换问题, 进行具有一般启发意义的讨论。

§ 1 时间离散系统的最优控制问题

实际的时间离散控制系统可能有两种情况: 一种是控制只能在离散的时刻进行, 问题按其物理背景自然形成以差分方程表示其动态演变; 另一种是问题按其物理背景应以微分方程表示其动态演变, 控制可以在连续的时间上进行, 但出于技术上的需要, 将控制规定在离散的时刻按一定方式进行, 许多采样系统即属于这种类型。下面举几个前一种类型的例子, 后一种类型情况较复杂, 我们以后再讨论。

例1.1 某气体须在等熵状态下由初压 p^0 压缩到具有终压 p^N 。加压过程分成 N 段, 在每一段, 气体先在绝热状态下压缩, 后在等压状态下冷却到其终温与初温相同, 每段所耗的能量可以由下式表示

$$E_k = mRT\gamma / (\gamma - 1)^{k+1} [(x/x^k)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1]$$

其中 m 为气体的摩尔数, R 为气体常数, T 为气体初温, γ 为气体在定压下与定容下的比热之比, x^{k+1} 为气体在第 k 段的终压。要求确定除终段外各段的气体终压, 使总能耗达到最小。如果定义第 k 段的控制变量 u^k 为

$$u^k = x^{k+1}/x^k$$

则问题成为要在

$$x^0 = p^0, \quad x^{k+1} = x^k u^k, \quad x^N = p^N, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

这些约束条件下求
$$\text{Min}_{u^0, \dots, u^{N-1}} \left[\sum_{k=0}^{N-1} (u^k)^{(\gamma-1)/\gamma} \right]$$

例1.2 锌的提纯装置由 5 个反应槽串联而成。进入第一个反应槽的原料是含锌百分比为 w^0 的硫化锌, 在反应槽内与稀硫酸反应后锌被提纯而降低了含锌量, 在流出第一个反应槽进入第二个反应槽前, 其含锌百分比变成 w^1 , 类似地有 w^2, w^3, w^4, w^5 是

流出最后反应槽硫化锌的含锌百分比。设通过各反应槽的硫化锌的流量为 Q ，则提纯装置在单位时间内提取纯锌量为 $M = Q(w^0 - w^5)$ 。在各反应槽内装有搅拌器和加热器，搅拌和加热时要消耗电能，当第 k 个反应槽的搅拌速度为 v^k ，反应温度为 T^k 时，消耗电能为 $S_k(v^k, T^k)$ 。如果进入第 k 个反应槽的硫化锌反锌量为 w^{k-1} ，则当 Q 和各槽反应容积一定时， w^k 与 w^{k-1} 有关系

$$w^k = f_k(v^k, T^k)w^{k-1}$$

给定 w^0 ，要控制 v^k 和 T^k ， $k = 1, 2, \dots, 5$ ，使产量一定时整个流程的耗电最小。问题可提成在 $x^0 = w^0$ ， $x^{k+1} = f_{k+1}(u_1^k, u_2^k)x^k$ ， $k = 0, \dots, 4$ ， $x^5 = w^0 - M/Q$ 等约束条件下求

$$\text{Min}_{u_1^0, u_2^0, \dots, u_1^4, u_2^4} \left[\sum_{k=1}^5 S_k(u_1^{k-1}, u_2^{k-1}) \right], \text{ 其中 } u_1^k, u_2^k \text{ 分别代表 } v^{k+1}, T^{k+1}.$$

例1.3 某化工产品由某原料经一反应器生成，设生产分阶段进行，在第 k 段进入反应器的原料的总流量 F^k 由两部分组成，一部分是新加原料的流量 M^k ，另一部分是回收原料 $F^k - M^k$ ，而且 $M^k = (a_1 T^k - a_2 F^k - a_3 S^k) F^k$ ，其中 T^k 为反应器在第 k 段时的

的出口温度， $S^k = \sum_{j=1}^{k+1} F_j$ ， a_1, a_2, a_3 为给定常数。这时，反应器在此段所需输入热量

为 $Q^k = hM^k + C_p(T^k - T^0)F^k$ ，其中 h, C_p, T^0 为给定常数。设 $C^k = a_1 T^k - a_2 F^k - a_3 S^{k-1}$ ，则 C^k, T^k, F^k 受到如下限制： $\underline{C} \leq C^k \leq \bar{C}$ ， $\underline{T} \leq T^k \leq \bar{T}$ ， $\underline{F} \leq F^k \leq \bar{F}$ ，在第 k 段的生产盈利为

$$\gamma_k = C^k F^k v_1 - M^k v_2 - Q^k v_3 - (1 - C^k) F^k v_4 - v_5$$

要求控制温度 T^k 和流量 F^k 与段数 N ，使 N 段过程的总盈利达到最大。如果令 $x^k = S^{k-1}$ ， $u_1^k = T^{k+1}$ ， $u_2^k = F^{k+1}$ ，则问题可提成在 $x^0 = 0$ ， $x^{k+1} = x^k + u_2^k$ ， $\underline{C} \leq a_1 u_1^k - a_2 u_2^k - a_3 x^k - a_3 u_2^k \leq \bar{C}$ ，

$I \leq u_1^k \leq \bar{T}$ ， $\underline{F} \leq u_2^k \leq \bar{F}$ 等约束条件下求

$$\text{Max}_{N, u^0, u^2, \dots, u^{N-1}} \sum_{k=0}^{N-1} [(a_1 u_1^k - a_2 u_2^k - a_3 x^{k+1}) u_2^k (v_1 - v_2 - h v_3 + v_4) - C_p \cdot u_2^k (u_1^k - T^0) v_3 - u_2^k v_4].$$

现在给出一般提法下的时间离散系统最优控制问题的数学模型。此模型可大致分为两种类型，一类是问题中的初始时刻 t_0 与终端时刻 t_N 给定，于是控制过程的历程 $T = t_N - t_0$ 也给定；另一类是问题中的初始时刻 t_0 给定，但历程不定或无限。在前一类问题中，所有控制时刻连同终端时刻形成时间轴上的离散点集 $ST \triangleq \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ ，控制过程可分成 N 个时段： $[t_0, t_1]$ ， $[t_1, t_2]$ ， $\dots$ ， $[t_{N-1}, t_N]$ ，它们可以第 k 时段（ $k = 0, 1, \dots, N-1$ ）表示。这类问题的数学模型可以下列模型DOCP表示。此模型包含下列四个组成部分：

I 系统动态方程

$$x^{k+1} = f^k(x^k, u^k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.1)$$

其中 $x^k \in R^n$ 是时段 $[t_k, t_{k+1}]$ 的状态， $u^k \in R^m$ 是在该段作用的控制， x^N 是终端状态。

II 控制约束 一般， u^k 所受的约束可表示为 $u^k \in U_k(x^k)$ ，此处 $U_k(x^k) \subset R^m$ 为依赖于作为参量的状态 x^k 的约束集。

III 时间边界条件 表示初始状态 x^0 与终端状态 x^N 所受约束，分别以约束集 X_0 与 X_N 表示，即 $x^0 \in X_0 \subset R^n$ ， $x^N \in X_N \subset R^n$ 。

IV 指标函数 一般为各段状态与控制的函数 $J(x^0, x^1, \dots, x^N, u^0, u^1, \dots, u^{N-1})$, 考虑到 (1.1), 它可表为 x^0 与序列 $\{u^k\}$ 的函数 $J(x^0, \{u^k\})$ 。本模型中, 它取如下形式

$$J(x^0, \{u^k\}) = \sum_{k=0}^{N-1} L_k(x^k, u^k) + K(x^N) \quad (1.2)$$

对于给定的 $x^0 \in X_0$, 设与 x^0 相应的 $\{u^k\}$ 满足 $\forall k, u^k \in U_k(x^k)$, 与之相应的 x^N 满足 $x^N \in X_N$, 则此 $\{u^k\}$ 称为可行控制。问题是要在可行控制集中求使函数 (1.2) 达到最小的控制。此最小值依赖于 x^0 , 以 $V(x^0)$ 记之。问题可进一步求 x^{0*} 使 $V(x^0)$ 在 X_0 上达到最小。所得的 $\{u^{k*}\}$ 和 x^{0*} 分别称为最优控制与最优初态。

注记 1.1 本模型中 $i_1, i_2, \dots, i_{N-1}$ 可以是给定的, 也可以是可变的。在后一种情况下, 动态方程中的函数 f^k 可能包含变量 i_k , 控制约束集 U_k 也可能包含参变量 i_k , 此外, 最小化是对所有控制变量及这些时刻变量取的。

注记 1.2 本模型可以包含状态变量受到约束的情况。实际上, 设 x^k 所受的约束为 $X_k, k=0, 2, \dots, N-1$, 则 x^{k+1} 所受的约束可用 u^k 受到附加的约束 $U'(x^k) = \{u^k | f_k(x^k, u^k) \in X_{k+1}\}$ 表示, 并把它吸收进 u^k 所受的约束中。

历程不定的情况, 可以是 N 给定而 i_N 不定, 也可以是 N 本身不定。在这种情况下, 时间边界条件中的终端集 $TX_N \subset R^{n+1}$ 为点 (i_N, x_N) 或点 (N, x_N) 形成的集, 它确定控制过程的终止时刻, 因之亦称终止集。

在历程无限的情况中, 显然, 指标函数 (1.2) 的第一项成为无限和而第二项失去其存在的意义。这时, 为了使该模型有意义, 必须存在使第一项无限和收敛的可行控制序列 (即满足动态方程、控制约束及时间边界条件的控制序列)。

§ 2 数学规划模型

因为线性规划模型可以视作非线性规划模型的特殊情况, 我们将以下列的非线性规划模型 NLP 作为包括线性规划在内的数学规划模型:

求满足约束条件

$$\begin{aligned} g(x) &\geq 0 \\ h(x) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

并使目标函数 $f(x)$ 达到最小即 $\text{Min} f(x)$ 的解。此处函数 g, h, f 的定义域为 R^n 中某一子集 D , g 与 h 的值域分别为 R^m 与 R^p 中的子集, f 则为实值函数。如果定义可行解集 X 如下:

$$X \triangleq \{x | g(x) \geq 0, h(x) = 0\} \quad (1.4)$$

则模型 NLP 可表为

$$\text{Min}_{x \in X} f(x) \quad (1.5)$$

模型 NLP 是纯粹的数学模型, 不象模型 DOCP 那样具有物理内容。一个时间离散系统的最优控制问题, 从反映其物理内容考虑, 自然宜于建立 DOCP 模型, 但在一定条件下, 也可建立其 NLP 模型, 这样有时反而便于处理, 下面举一例说明之。

例 1.4 某飞行器的最小能耗控制问题可以如下的 DCOP 模型表示。动态方程为

$x^{k+1} - x^k = A_k x^k + b_k u^k$, $x^k \in R^n$, $u^k \in R$; 控制约束集为 $\underline{u} \leq u^k \leq \bar{u}$, $k = 0, 1, \dots$,

$N-1$; 时间边界条件为 x^0 给定为 $\bar{x}^0$, $x^N = 0$, 指标函数为 $\text{Min} \sum_{k=0}^{N-1} |u^k|$ 。

不难将此问题以模型 NLP 表示, 只须在该模型中, 令 $x^T \triangleq (x^{0T}, x^{1T}, \dots, x^{NT}, u^{0T}, u^{1T}, \dots, u^{N-1T})$, $g^T \triangleq (u^0 - \underline{u}, u^1 - \underline{u}, \dots, u^{N-1} - \underline{u}, \bar{u} - u^0, \bar{u} - u^1, \dots, \bar{u} - u^{N-1})$, $h^T \triangleq (x^1 - x^0 = A_0 x^0 + b_0 u^0, x^2 - x^1 = A_1 x^1 + b_1 u^1, \dots, x^N - x^{N-1} = A_{N-1} x^{N-1} + b_{N-1} u^{N-1}, x^0 - \bar{x}^0, x^N)$,

$f \triangleq \sum_{k=0}^{N-1} |u^k|$ 。由此不难看出, 对于固定历程的 DOCP 模型, 只要其中的控制约束集与

时间边界条件可以用函数不等式与/或函数等式表示, 则此模型可以化成 NLP 模型。

上述例题改用 NLP 模型表示的优点是它可进一步化成 LP (线性规划) 模型, 因而易于求其数值解。事实上, 利用动态方程是线性方程的特点并注意指标函数与不等式约束中不含状态变量, 可以把动态方程与时间边界条件所表示的等式约束的总体简化成

一等式约束 $G \bar{x}^0 + \sum_{k=0}^{N-1} d_k u^k = 0$, 这时模型 NLP 的变量 x 只含控制变量, 即 $x \triangleq (u^0,$

$u^1, \dots, u^{N-1})$ 。如果进一步引入代换变元 $u^k = v^k - w^k$, 使之满足 $|u^k| = v^k + w^k$, $v^k \geq 0$, $w^k \geq 0$, 则在将上述 NLP 模型中的变量 $\{u^k\}$ 以 $\{v^k, w^k\}$ 代换后, 我们将得出一 LP 模型, 并可通过解此 LP 模型得出原问题的解。下面我们将给出与此模型转换有关的一个一般性定理, 作为上述解法的理论根据。在这之前, 我们先讨论有关建模的一个相反情况, 即, 一个实际问题, 从反映其物理内容考虑, 自然形成 NLP 模型, 但在一定条件下, 也可以建立 DOCP 模型。

例 1.5 有某种产品由 n 个产地须运往 N 个销地。第 i 个产地的产量为 w_i , $i = 1, 2, \dots, n$; 第 j 个销地的销量为 d_j , $j = 1, 2, \dots, N$ 。设 r_{ij} 为由第 i 产地运往第 j 销地的产品运量, 则所耗运费为 $C_{ij}(r_{ij})$, 设总产量 $\sum_{i=1}^n w_i$ 大于总销量 $\sum_{j=1}^N d_j$, 求使总运费最省且满足销地需求的运输方案。按此问题的实际内容, 它自然形成如下的 NLP 模型。

约束条件包括: $r_{ij} \geq 0$, $\sum_{i=1}^n r_{ij} \geq d_j$, $\sum_{j=1}^N r_{ij} \leq w_i$ 。指标函数为 $\text{Min}_{\{r_{ij}\}} \sum_{i,j} C_{ij}(r_{ij})$ 。

当费用函数 C_{ij} 为非线性函数, n 与 N 数较大时, 此 NLP 模型的求解较困难, 为此, 我们将此问题形成一 DOCP 模型如下:

令 x_i^j 为由第 i 产地运往第 1 销地至第 j 销地的运量总和, 定义 $x_i^0 = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 0, 1, \dots, N$ 。以 x^j 记分量为 x_i^j 之向量, $x^j \in R^n$ 为状态向量。以 u_i^j 替换上述变量 $r_{i,j+1}$, u^j 记分量为 u_i^j 的向量, $u^j \in R^n$ 为控制向量。以 w 记分量为 w_i 的向量, $w \in R^n$ 。这时, 可得模型的各组成部分如下。系统的动态方程为

$$x^{k+1} = x^k + u^k \quad k = 0, 1, \dots, N-1。$$

控制约束由下列等式与不等式确定

$$0 \leq u^k \leq w - x^k$$

$$\sum_{i=1}^n u_i^k \geq d_{k+1}$$

时间边界条件为 $x^0=0$, 指标函数为 $\text{Min} \sum_{k=0}^{N-1} C_k(u^k)$, 此处 $C_k(u^k) = \sum_{i=1}^n C_{i,k+1}(u_i^k)$ 。

例 1.4 中, 问题所形成的 NLP 模型的非线性性质在于目标函数包含变量的绝对值, 这种类型的 NLP 模型可以通过模型转换化成线性规划求解。由于这样形成的目标函数在工程问题中是常见的, 所以下面我们给出这类模型的一个一般性的模型转换定理。

给出 NLP 模型如下, 记之为模型 AN。

约束集为

$$X = \{x | Gx - a \geq 0, Hx - b = 0\}$$

$$\text{目标函数为 } \text{Min} f(x) = \sum_{l=1}^s |c^l{}^T x + d_l| \quad (\text{AN})$$

其中 $x, c^l \in R^n, a \in R^m, b \in R^p, d_l \in R, G, H$ 分别为 $m \times n$ 与 $p \times n$ 矩阵。给出与 AN 相应的线性规划模型 BL 如下:

变量为 $\xi \triangleq (x^T, y^T, z^T)^T$

其中 $y, z \in R^s$ 。约束集为

$$\Xi = \left\{ \xi \left| \begin{array}{l} Gx - a \geq 0, \quad y \geq 0, \\ z \geq 0, \quad Hx - b = 0, \\ y_l - z_l = c^l{}^T x + d_l, \quad l = 1, \dots, s \end{array} \right. \right\} \quad (\text{BL})$$

$$\text{目标函数为 } \text{Min } \phi(\xi) = \sum_{l=1}^s (y_l + z_l)$$

为建立上述两模型的关系, 定义 $R^n \rightarrow R^s$ 的函数 $y(x), z(x)$ 如下

$$y_l(x) = \begin{cases} c^l{}^T x + d_l & \text{当 } c^l{}^T x + d_l > 0 \\ 0 & \text{当 } c^l{}^T x + d_l \leq 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

$$z_l(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } c^l{}^T x + d_l \geq 0 \\ -c^l{}^T x - d_l & \text{当 } c^l{}^T x + d_l < 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

$l = 1, \dots, s$ 。

注意这样定义的 $y(x), z(x)$ 满足 $y(x) \geq 0, z(x) \geq 0$, 与此同时也定义了 $R^n \rightarrow R^{n+2s}$ 的函数 $\xi(x) \triangleq (x^T, y(x)^T, z(x)^T)^T$ 。这时我们有如下定理:

定理 1.1 设 x^* 是模型 AN 的最优解, 则 $\xi(x^*)$ 是模型 BL 的最优解。反之, 设 ξ^* 是模型 BL 的最优解, 则其分量 x^* 是模型 AN 的最优解。

证 任取 $x \in X$, 由函数 $y(x), z(x)$ 的定义公式 (1.6), (1.7) 可见 $y(x), z(x)$ 满足 $y(x) \geq 0, z(x) \geq 0, y_l(x) - z_l(x) = c^l{}^T x + d_l, l = 1, \dots, s$; 故相应的 $\xi(x) \in \Xi$ 。反之, 任取 $\xi \in \Xi$, 显然可见相应的 $x \in X$ 。由函数 $\xi(x)$ 的定义还可见它的分量 $x, y(x), z(x)$ 满足 $y_l(x) + z_l(x) = |c^l{}^T x + d_l|, l = 1,$

..., s ; 故有 $\phi[\xi(x)] = f(x)$ 。于是, 对于任取的 $\xi \in \Xi$, 将它的分量 x 代入函数 $\xi(x)$ 的自变量中, 可得 $\phi[\xi(x)] = f(x) = \sum_{l=1}^s |c^{lT}x + d_l|$, 另一方面, 此 ξ 的分量 x, y, z 还满足

$$\begin{aligned} -y_l - z_l &= -2y_l + (y_l - z_l) \leq y_l - z_l \\ &= c^{lT}x + d_l = y_l - z_l \leq (y_l - z_l) + 2z_l \\ &= y_l + z_l \end{aligned}$$

即 $|c^{lT}x + d_l| \leq y_l + z_l, \quad l = 1, \dots, s;$

上式两端对 l 由 1 至 s 求和, 就得到

$$\phi[\xi(x)] \leq \phi(\xi).$$

现在设 x^* 是 AN 的最优解, 这时 $\forall x \in X$ 有 $f(x) \geq f(x^*) = \phi[\xi(x^*)]$ 。任取 $\xi \in \Xi$, 将其分量 x 代入函数 $\xi(x)$ 的自变量中, 可得

$$f(x) = \phi[\xi(x)] \leq \phi(\xi)$$

将此分量 x 代入函数 f 中也应有

$$f(x) \geq f(x^*) = \phi[\xi(x^*)]$$

于是得 $\phi(\xi) \geq \phi[\xi(x^*)]$, 定理的正命题已证。为证逆命题, 设 ξ^* 为 BL 的最优解。任取 $x \in X$, 代入函数 $\xi(x)$ 的自变量中, 所得 $\xi(x) \in \Xi$, 因之有

$$f(x) = \phi[\xi(x)] \geq \phi(\xi^*)$$

另一方面, 因 $\xi^* \in \Xi$, 由前面论证可知此 ξ^* 的分量 x^*, y^*, z^* 应满足 $\phi(\xi^*) \geq \phi[\xi(x^*)] = f(x^*)$, 而且 $x^* \in X$ 。由此得 $f(x) \geq f(x^*)$, 即 x^* 是 AN 的最优解。

§3 时间连续系统的最优控制问题

时间连续系统的最优控制问题的特征是系统所受的控制连续的时间上进行, 系统的动态演变按其物理背景须以常微分方程而非差分方程表示。在少数情况下, 这类问题可以变换成 §1. 所述的时间离散系统的最优控制问题, 并利用模型 DOCP 去处理它。

例1.6 有关文献曾讨论如何将一人造卫星的会合问题化成一时间离散系统的最优控制问题。作为质点, 卫星的动力学方程是三个二阶的微分方程组, 也就是六个一阶的微分方程组, 它们是非线性的。在适当地选取坐标系之后, 在轨道变动的适当范围内, 可以把此组方程线性化, 且使线性化方程的解与原方程的解具有足够精确的近似程度, 由此可得描述卫星运动的下列常参量动态方程

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

控制的历程 T 是固定的, 把 T 分成 N 个等长的时段 $\Delta t = T/N$, 规定控制变量 (火箭推力) 在各时段内只取常量。取各时段交界时刻的状态变量 $x(t)$ 的值作为这些离散时刻的状态变量, 就可由上述微分方程推出表示各离散时刻状态关系的差分方程如下

$$x^{k+1} = e^{A\Delta t} \left[x^k + \left(\int_{t_k}^{t_k + \Delta t} e^{A(t_k - \tau)} B d\tau \right) u^k \right]$$

式中 x^k 为上述微分方程的解 $x(t)$ 在时刻 t_k 所取之值。由于只对控制变量有约束, 以过程的总能耗作为指标函数只与控制变量有关, 因此, 整个问题不难化成模型 DOCP

表达的形式。

有许多时间连续动态系统的最优控制问题是不能像上述例子那样化成时间离散系统的最优控制问题的模型的，下面举几个例子。

例1.7 一磁场控制式直流电机的动态方程可由下列常微分方程表示

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\left(\frac{B}{J}\right)x_2 + \left(\frac{K}{J}\right)x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\left(\frac{R}{L}\right)x_3 + \frac{u}{L}\end{aligned}$$

其中 x_1 为电机转角， x_2 为角速， x_3 为激磁电流， B ， K ， J ， R ， L 为由电机物理特性确定的常数， u 为场压，是控制变量。现要控制电机使之在由给定的 t_0 到 t_f 时段内转过 10 弧度，为了同时限制消耗的能量，指标可以提为使下列积分及终端函数达到最小

$$J = \int_{t_0}^{t_f} [(x_1 - 10)^2 + Ru^2] dt + F_1(x_{1f} - 10)^2 + F_2x_{2f}^2 + F_3x_{3f}^2$$

式中 x_{1f} ， x_{2f} ， x_{3f} 分别为 $x_1(t)$ ， $x_2(t)$ ， $x_3(t)$ 在终端时刻 t_f 所取之值。 R ， F_1 ， F_2 ， F_3 为适当选择的权系数。此例是一般的时间连续确定性 LQ 控制问题的特例，其一般提法下的问题的求解，我们将在以后讨论。

例1.8 登月艇以最小能耗在月球表面进行软着陆的推力控制问题，可以用下列的经过简化的问题表示。将登月艇视为一质点，它在月球表面的着陆过程应由下列的质点变质量动力学方程描述

$$\begin{aligned}\dot{h} &= v \\ \dot{v} &= -g + m^{-1}u \\ \dot{m} &= -ku\end{aligned}\tag{1.8}$$

其中 m 代表艇的质量， h 代表艇离开月球表面的高度，以离月面的方向为正向， v 代表艇的速度， u 代表艇上火箭的推力， g 代表月球的重力加速度， k 为一给定的常数。作为时间连续集上的函数的推力 $u(t)$ 是控制变量，假定此函数规定在逐段连续且定义于区间上 $[t_0, t_f]$ 的函数族中选取，并须满足

$$0 \leq u(t) \leq \alpha\tag{1.9}$$

此处 α 为艇的火箭所能达到的最大推力。控制过程的起始时刻 t_0 自然可取为 0，终端时刻 t_f 自然是艇到达月球表面的时刻，艇在此两时刻所须满足的时间边界条件为

$$\begin{cases} h(0) = h_0, & v(0) = v_0, \\ M(0) - M - F = 0 \\ h(t_f) = 0, & v(t_f) = 0 \end{cases}\tag{1.10}$$

式中 h_0 与 v_0 分别代表艇在初始时刻的高度与速度， M 代表艇在不装燃料时的质量， F 代表燃料的初始质量，最后两式表示了艇在到达月球表面时满足软着陆条件。问题是要求选择这样的控制函数，使着陆过程的燃料耗费达到最小，即最小化 $-m(t_f)$ 。

例1.9 在经济学中，下述情况称为部门经济中的 Ramsey 模型。部门经济的产出率 $y(t)$ 与资金 $K(t)$ 通过如此的生产函数 $y(t) = F(K(t))$ 联系起来，消耗率 $c(t)$ 是由一确定的比数 $u(t)$ 乘以资金的某一确定函数 $G(K(t))$ 所得的乘积

$$c(t) = u(t)G(K(t))\tag{1.11}$$

此处

$$0 \leq u(t) \leq 1 \quad (1.12)$$

于是资金的变化率由下列微分方程确定

$$\dot{K}(t) = F(K(t)) - u(t)G(K(t)) \quad (1.13)$$

设 $H(c)$ 代表效用函数, 它表示系统在消耗率为 c 时的效用度量。于是, 系统的经济状况的指标可由以下的效用函数的积分表示

$$\int_{t_0}^{t_f} H(u(t)G(K(t)))dt \quad (1.14)$$

问题在于, 要找出消耗比数 $u(t)$, 使得资金 $K(t)$ 在满足初始与终端条件 $K(t_0) = K_0$ 与 $K(t_f) = K_f$ 下, 使经济状况指标达到最大。

下面我们转入时间连续系统最优控制问题的一般模型。这类模型从其普遍性的不同而言可以有各种不同的提法, 我们这里不准备提出很普遍的提法, 而是根据通常实际问题的背景需要与理论处理的方便提出具有适中普遍性的提法。设控制历程 $[t_0, t_f]$ 中, 初始时刻 t_0 给定。在不作特殊声明的情况下, 本书所讨论的时间连续系统的最优控制问题以如下的模型 COCP 表示。此模型可用如下的四个组成部分描述。

I 系统的动态方程

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)) \quad (1.15)$$

其中 $\forall t \in [t_0, t_f]$, $x(t) \in R^n$ 为状态变量, $u(t) \in R^m$ 为控制变量, f 为 $R \times R^n \times R^m \rightarrow R^n$ 的函数, 它满足一定的解析条件使方程 (1.15) 在给定边界条件 $x(t_0) = x_0$ 与控制函数 $u(t)$ 下存在区间 $[t_0, t_f]$ 上的解 $x(t)$ 。下文将称此 $x(t)$ 为与初始状态 x_0 及控制 $u(t)$ 相应的轨迹, 而称 $x(t)$ 为系统在时刻 t 的状态, 如果 t 取确定的值的话。为了避免上述两种情况相混淆, 下文有时在必要时将以 $x(\cdot)$ 表示流动时间下的状态, $x[t_1, t_2]$ 表示在时间区间 $[t_1, t_2]$ 上的轨迹, 对 $u(t)$ 也有类似的记号。在没有必要作特别声明时, $x(t)$ 或 $x[t_0, t_f]$ 总理解为与某一 x_0 与 $u[t_0, t_f]$ 相应的轨迹。

I 控制约束 由于控制是时间轴上的函数, 关于控制所受的约束, 首先必须规定函数 $u(\cdot)$ 的函数类, 例如, 可测函数, 逐段连续函数, 连续函数, 绝对连续函数等。下文在不作特别声明时, 将取逐段连续函数作为控制函数类。其次, $\forall t \in [t_0, t_f]$, $u(t)$ 的值必须处于控制值的约束集 U 之中, 下文将以 $\mathcal{U}$ 表示其函数在规定的控制函数类内且其值 $u(t)$ 满足 $u(t) \in U$ 的所有 $u[t_0, t_f]$ 的集。这里应注意, 在本模型中, 终端时刻 t_f 没给定, 因此对于集 $\mathcal{U}$ 中的不同的元, 其对应的 t_f 可能不同。

II 时间边界条件 初始时刻 t_0 是给定的, 初始状态 $x(t_0) = x^0$ 在给定的初始状态集 X_0 中取值, $X_0 \subset R^n$ 。终端时刻 t_f 与终端状态 $x(t_f)$ 一起满足终端约束 $TX_f \subset R^{n+1}$, 即 $(t_f, x^T(t_f))^T \in TX_f$, 此处 TX_f 为 R^{n+1} 中之点 $(t, x^T)^T$ 所形成之集, 它亦称终止集。下文在不作特别声明情况下, 总假定控制过程是有限的, 这时意味着存在这样的控制 $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, 使得相应的首次进入集 TX_f 之点的 t_f 分量为有限的。

IV 指标函数 对于给定的 $x^0 \in X_0$, 指标函数为 $\mathcal{U} \rightarrow R$ 的函数, 即定义于 $\mathcal{U}$ 上的泛函。本模型只考虑如下形式

$$J[u(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), u(t))dt + K(t_f, x(t_f)) \quad (1.16)$$

对于给定的 $x^0 \in X_0$, 设与 x^0 相应的 $u[t_0, t_f] \in \mathcal{U}$, 且与之相应的 $t_f, x(t_f)$ 满足 $(t_f, x(t_f)) \in TX_f$, 则此 $u[t_0, t_f]$ 称为可行控制。于是问题成为在可行控制集内求这样的控制 $u^*[t_0, t_f]$, 使得泛函 (1.16) 达到最小, 显然, 此最小值依赖于 x^0 , 以 $V(x^0)$ 记之。问题可进一步求 x^{0*} 使 $V(x^0)$ 在 X_0 上达到最小。所得的 $u^*[t_0, t_f]$ 和 x^{0*} 分别称为最优控制与最优初态。

注记1.3 当约束控制的函数类规定为逐段连续函数时, 集 $\mathcal{U}$ 显然具有如下性质。设 $u[t_0, t_f] \in \mathcal{U}$, 对于 $i = 1, 2, \dots, m, v_i \in U$, 又设 $\tau_i - \Delta_i < t \leq \tau_i$ 为区间 $[t_0, t_f]$ 上的不相重叠的子区间, 则如下定义的 $\tilde{u}[t_0, t_f] \in \mathcal{U}$

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} v_i & \text{当 } \tau_i - \Delta_i < t \leq \tau_i \\ u(t) & \text{其他的 } t \in [t_0, t_f] \end{cases}$$

注记1.4 当终端时刻给定, 终端状态自由时, 显然有 $TX_f = \bar{t}_f \times R^n$ 。当终端时刻与终端状态均给定时, 则 $TX_f = (\bar{t}_f, \bar{x}_f)^T$, 此处 $\bar{t}_f, \bar{x}_f$ 为相应的给定值。在一般情况下,

$$TX_f = \left\{ (t, x^T)^T \left| \begin{array}{l} g_1(t, x) = 0, g_2(t, x) = 0, \dots, \\ g_r(t, x) = 0, g_{r+1}(t, x) \geq 0 \\ g_{r+2}(t, x) \geq 0, \dots, g_{r+s}(t, x) \geq 0 \end{array} \right. \right\} \quad (1.17)$$

注记1.5 动态方程 (1.15) 中的函数 f 及指标泛函 (1.16) 中的函数 L 均显含 t 。这种形式的动态方程所确定的系统称非自治系统。但自治与非自治系统之分仅有物理意义, 在数学模型上, 显然, 只要把状态空间扩大一维使之包含时间变量作为第 $n+1$ 个状态分量, 则非自治系统可化成自治系统。

注记1.6 使用古典变分学中相似问题的术语, 以 (1.16) 表示的指标函数情况下的模型 COCP 称为波尔查 (Bolza) 问题, 如果其中 $L \equiv 0$, 即指标只含终端函数 K , 相应的模型称为梅尔 (Mayer) 问题, 如果其中 $K \equiv 0$, 即指标只含积分表达式, 相应的模型称为拉格朗日问题。这三种形式的模型可以互相变换, 因而, 同一实际问题, 可以用这三种模型的任何一种表示, 这时, 采用何种表示, 取决于处理问题的方便。当然, 如果终端时刻 t_f 为无限, 这时终端函数 K 无意义, 问题只能提成拉格朗日问题。

上面给出的模型 COCP 的三种形式将分别简记为 COCB, COCM, COCL。这三种不同提法的问题在下述意义下是等价的, 即它们可以通过数学变换从一种问题化成任何另一种问题。首先注意 COCM 与 COCL 显然是 COCB 的特殊形成, 即 COCB 问题中的函数 L 与函数 K 取零函数的情况。其次, 如果可以将 COCM 化成 COCL, 则对于 COCB, 将其中终端函数化成一积分表达式, 并与原有的积分表达式合并, 就成为 COCL。同样道理, 如 COCL 可化成 COCM, 则 COCB 也就可化成 COCM。因之, 三种问题在上述意义下的等价性归结为 COCL 与 COCM 的互相变换。

设给出一 COCL 问题, 扩大其状态空间成 $n+1$ 维, 引入新的状态变量 x_{n+1} 使之满足

$$\dot{x}_{n+1} = L(t, x(t), u(t)) \quad (1.18)$$

$$x_{n+1}(t_0) = 0 \quad (1.19)$$

则此问题的指标函数中的积分表达式可化成

$$J(\cdot) = \int_{t_0}^{t_f} L(\cdot \cdot \cdot) dt = \int_{t_0}^{t_f} \dot{x}_{n+1} dt = x_{n+1}(t_f) \quad (1.20)$$

在扩大的状态空间内, 原指标函数已化成终端函数的形式, 因而, 只要将 (1.18) 并入系统动态方程 (1.15), (1.19) 并入时间边界条件, 原问题就化成 COCM 问题。

设给出一 COCM 问题, 引入新的状态变量 x_{n+1} 使之满足

$$\dot{x}_{n+1} = 0 \quad (1.21)$$

这时应有

$$x_{n+1}(t) = C \quad (1.22)$$

此处 C 为常数且应等于 $x_{n+1}(t_f)$ 。增加以 (1.17) 形式表达的终端时刻边界条件如下

$$g(t, \hat{x}) = x_{n+1} \cdot (t - t_0) - K(t, x) = 0 \quad (1.23)$$

其中 $\hat{x}$ 为扩大了的状态向量 $(x^T, x_{n+1})^T$ 。于是原问题的终端指标函数 $K(t_f, x(t_f))$ 化成

$$K(t_f, x(t_f)) = \int_{t_0}^{t_f} x_{n+1}(t) dt \quad (1.24)$$

问题已化成 COCL 问题。

由上面的讨论可见, 一个实际问题, 在形成 COCP 模型时, 可以表示成 COCB, COCM, COCL 三种问题的任一种。对于 DOCP 模型, 类似地也有相应的三种问题。究竟表为何种问题, 取决于理论处理与数值解算的方便。对于最优控制问题的一般性的理论方面与数值解算方面的讨论, 采用上述三种中的不同模型, 也将各有其不同的表达形式与内在特征, 但这些区别不是实质性的。在下面章节的有关讨论中, 我们采用三种中的何种模型, 将取决于本书的系统、取材、论述方便等各方面的需要。

* §4 泛函极值模型

上节讨论时间连续最优控制问题模型时, 已经指出过, 指标函数是定义于 $\mathcal{U}$ 上的泛函; 但是在那里, 我们并没有在严格数学的基础上建立这个问题的泛函极值模型。这是由于, 本书下面将主要应用一般数学分析的工具去处理此问题, 这样, 上节已经建立的模型是够用的。本节提出的泛函极值模型, 目的是供下面部分较深入的理论讨论之用。我们将假定读者已掌握基本的泛函分析的知识, 缺乏这方面知识的读者, 可以参阅文献 [15] [20]。

要用泛函分析作为工具去建立最优控制问题的模型, 关键是选择合适的空间, 以之表示在该问题中作为变元的状态函数 $x[t_0, t_f]$ 与控制函数 $u[t_0, t_f]$ 组成的集。在泛函分析可供选择的种类空间繁多, 各有不同的普遍性和特殊适用性。例如, 线性空间, 拓扑空间, 度量空间, 拓扑线性空间, 赋范线性空间, 巴拿赫空间, 希尔伯特空间等。一般说来, 在比较普遍的空间上建立问题的模型, 能够得到的有关我们感兴趣的问题的分析性质也就较弱或较少; 另一方面, 如果在过于特殊的空间上建立问题的模型, 又必须对问题加上一些原来并非必要的额外限制, 这样将限制了问题模型的可应用的范围。因此, 在选择作为所研究的问题的模型框架的基本空间时, 应根据问题的提法与要求, 就上述两方面的考虑进行权衡。举例说, 赋范线性空间是具有元素的代数运算和空间的拓扑结构的比较普遍的空间, 但它不一定具有完备性, 因之有些实数集上分析运算的重要