Fuchs型偏微分方程

戴正德 杨光俊 著

云南大学出版社

0175.2
4312

0175.2
4312

Fuchs 型偏微分方程

戴正德　杨光俊　著

云南大学出版社

滇新登字 07 号

责任编辑：李继毛
封面设计：丁群亚

Fuchs 型偏微分方程

戴正德　杨光俊　著

云南大学出版社出版发行
(云南大学校内)
云南大学印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32　印张：8.94　字数：201 千字

1992 年 1 月第 1 版　　1992 年 1 月第 1 次印刷

印数：0001-1000 册

ISBN 7-81025-081-7/O·5　定价：4.80 元

前　　言

Fuchs 型方程的研究已经有了较长的历史. 而如果把欧拉　达布方程的研究视作偏微分方程 Fuchs 理论研究的前驱, 则可以将时间推前到一百多年前. 世界上许多著名数学家, 例如欧拉、高斯、许瓦兹、哥西、库麦尔、傅克斯、黎曼、庞加莱以及毕克霍夫等在这一领域都做出了卓越的贡献, 创立和完善了二阶常微分方程的解析理论 (以指数理论为核心). 然而, 真正将常微分方程的 Fuchs 理论首先推广到偏微分方程中去的, 是 M.S.Baouendi 和 C.Goulaouic 他们于 1973 年发表了这一研究方面的第一篇论文之后. 围绕 Fuchs 偏微分方程解的函数空间、可解性以及唯一性等问题, 国内外数学工作者开展了一系列工作, 终于发现: 由于多变量或多维奇流形式算子系数的出现, Fuchs 常微分方程的指数概念已经消失. 现代数学工具: 拟微分算子、Fourier 积分算子的应用, 使其局部可解性研究也取得了进展. 可以说, 偏微分方程的 Fuchs 理论正在形成, 但还有大量的问题需要人们去探讨. 鉴于此, 有必要较系统地总结十多年来这一领域的研究成果. 本书便是这方面工作的大胆尝试. 但愿它的出版能推动 Fuchs 理论的研究.

本书紧紧围绕解的存在性、解的函数空间以及唯一性安排内容. 全书共五章, 第一章是 Fuchs 常微分方程解析理论的简单回顾和补充. 第二章介绍了 Fuchs 偏微分方程的解析理论, 读者会发现, 在解析函数 Banach 空间阶梯, 运用

不同的逼近技巧，会得到不同深度的结果，还会发现指数概念已消失．值得一提的是，齐民友教授首先注意到了这一点，并进而开展了一系列卓有成效的工作．第三章研究了特殊 Fuchs 偏微分方程——奇型带 Bessel 算子方程在 C^∞ 空间的局部可解性．第四章介绍了 Fuchs 偏微分方程 C^∞ 可解性的初步结果，这一领域尚有大量问题待人们去探讨．最后一章，引入平坦解 $j-$ 平坦解概念（它与一般线性偏微分方程的解有明显区别），并运用拟微分算子工具研究了相应唯一性问题，这一领域的研究工作尚在深入之中．

本书只要求读者具有常微分方程、偏微分方程、复变函数、线性代数、泛函分析、逼近论以及拟微分算子和 Fourier 积分算子方面的基本知识．本书曾作为研究生专业课教材讲授过两次，这次修改略去了一些较深的内容，其中包括奇性传播方面的内容．书后参考文献仅就最主要的列出．

由于作者水平有限，书中错误和不妥之处在所难免，恳请赐教．

戴正德　杨光俊

一九八九年九月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

第四章　全特征和 Fuchs 算子的 C^{∞} 理论

第五章　Fuchs 方程解的唯一性

第一章　Fuchs 型常微分方程

本章介绍 Fuchs 型常微分方程的基本内容、基本方法和基本结果．如无特别说明，本章所述函数均为复变量函数，z、ω、t、… 都表示复变量．

§1　优 函 数

设 $f(z, t, \omega)$ 在 $|z| < r$, $|t| < \rho$, $|\omega| < s$ 内全纯，于是有展开式:

$$f(z, t, \omega) = \sum_{k, l, m} a_{k, l, m} z^k t^l \omega^m \tag{1}$$

如果 r_1、ρ_1、s_1 满足: $0 < r_1 < r$, $0 < \rho_1 < \rho$, $0 < s_1 < s$, 则当

$$|z| \leqslant r_1, \quad |t| \leqslant \rho_1, \quad |\omega| \leqslant s_1 \tag{2}$$

时，函数 $f(z, t, \omega)$ 全纯．因此，存在常数 $M < +\infty$，使得当 (2) 成立时，有

$$|f(z, t, \omega)| < M \tag{3}$$

取极坐标，令 $z = r_1 e^{i\varphi}$, $t = \rho_1 e^{i\psi}$, $\omega = s_1 e^{i\theta}$，则 (1) 变为

$$f = \sum_{k, l, m} a_{k, l, m} r_1^k \rho_1^l s_1^m e^{i(k\varphi + l\psi + m\theta)} \tag{4}$$

对 (4) 两端取共轭，得到

$$\bar{f} = \sum_{k, l, m} \bar{a}_{k, l, m} r_1^k \rho_1^l s_1^m e^{-i(k\varphi + l\psi + m\theta)} \tag{5}$$

将 (4) 乘以 (5)，并对 φ、ψ、θ 从 0 到 2π 积分，得到

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{2\pi} f\bar{f}\, d\theta$$

$$= \sum_{k, l, m, k_1, l_1, m_1} a_{k, l, m} \bar{a}_{k_1, l_1, m_1} r_1^{k+k_1} \rho_1^{l+l_1} s_1^{m+m_1}$$

$$\cdot \int_0^{2\pi} e^{i(k-k_1)\varphi} d\varphi \int_0^{2\pi} e^{i(l-l_1)\psi}\, d\psi \int_0^{2\pi} e^{i(m-m_1)\theta}\, d\theta \quad (6)$$

利用三角函数在周期区间积分的直交性和(3)，有

$$\sum_{k, l, m} |a_{k, l, m}|^2 r_1^{2k} \rho_1^{2l} s_1^{2m}$$

$$= (2\pi)^{-3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{2\pi} |f|^2\, d\theta < M^2 \qquad (7)$$

注意(7)式左端各项均为正，于是有

$$|a_{k, l, m}| < M r_1^{-k} \rho_1^{-l} s_1^{-m} \qquad (8)$$

(7) 和 (8) 可以推广到有 n 个复自变量的情形.

定义 设有 n 个自变量的函数 f 展成级数

$$f(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{k_1, \cdots, k_n} a_{k_1, \cdots, k_n} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdots z_n^{k_n} \qquad (9)$$

又设有另一个同样多变量的函数 F

$$F(z_1, \cdots, z_n) = \sum_{k_1, \cdots, k_n} A_{k_1, k_2, \cdots, k_n} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdots z_n^{k_n} \qquad (10)$$

$$0 \leqslant |z_j| \leqslant r_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n \qquad (11)$$

设函数 F 的级数收敛，且所有系数 $A_{k_1, \cdots, k_n}$ 全为正实数，若有

$$|a_{k_1, \cdots, k_n}| \leqslant A_{k_1, \cdots, k_n}, \quad \forall k_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n \qquad (12)$$

则函数 F 称做 f 的强函数或者优函数，记为

$$F \gg f. \qquad (13)$$

由上述定义立刻推得如下性质:

1. 如果 $F \gg f$，则 $F^2 \gg f^2$ (14)

事实上，设 $P(a_{0,\cdots,0},\ \cdots,\ a_{k_1,k_2,\cdots,k_n})$ 是级数(9)的系数的多项式，此多项式本身的系数都是正的实数，则由(12)，有

$$\begin{aligned}\left|P(a_{0\cdots 0},\ \cdots,\ a_{k_1\cdots k_n})\right| &\leqslant P(|a_{0\cdots 0}|,\ \cdots,\ |a_{k_1\cdots k_n}|)\\ &\leqslant P(A_{0\cdots 0},\ \cdots,\ A_{k_1\cdots k_n}).\end{aligned}$$

两边平方，立得结论.

2. 级数(9)的收敛区域不小于(10)的收敛区域.

利用 Cauchy 不等式(8)，我们很容易作出 f 的优函数. 事实上，由(8)，我们令 $A_{k,l,m}=Mr_1^{-k}\rho_1^{-l}s_1^{-m}$，则就得到 f 的一个优函数 F:

$$\begin{aligned}F &= \sum_{k,l,m} Mr_1^{-k}\rho_1^{-l}s_1^{-m}z^k t^l \omega^m\\ &= \sum_{k,l,m} M\left(\frac{z}{r_1}\right)^k\left(\frac{t}{\rho_1}\right)^l\left(\frac{\omega}{s_1}\right)^m \qquad (15)\end{aligned}$$

但是另一方面，

$$\begin{aligned}&\sum_{k,l,m} M\left(\frac{z}{r_1}\right)^k\left(\frac{t}{\rho_1}\right)^l\left(\frac{\omega}{s_1}\right)^m\\ &= M\left\{1+\left(\frac{z}{r_1}\right)+\left(\frac{z}{r_1}\right)^2+\cdots\right\}\\ &\quad\cdot\left\{1+\left(\frac{t}{\rho_1}\right)+\left(\frac{t}{\rho_1}\right)^2+\cdots\right\}\\ &\quad\cdot\left\{1+\left(\frac{\omega}{s_1}\right)+\left(\frac{\omega}{s_1}\right)^2+\cdots\right\}\\ &= \frac{M}{\left(1-\dfrac{z}{r_1}\right)\left(1-\dfrac{t}{\rho_1}\right)\left(1-\dfrac{\omega}{s_1}\right)}\end{aligned}$$

所以

$$\frac{M}{\left(1-\frac{z}{r_1}\right)\left(1-\frac{t}{\rho_1}\right)\left(1-\frac{\omega}{s_1}\right)} \gg f \tag{16}$$

以后，我们将经常引用这样的优函数.

有时，下面的优函数也经常被引用. 注意，对于正整数 n，

$$\left(\frac{t}{\rho_1}+\frac{\omega}{s_1}\right)^n=\sum C_n^r\left(\frac{t}{\rho_1}\right)^r\left(\frac{\omega}{s_1}\right)^{n-r}$$

而其系数全为正数，所以有

$$\frac{1}{1-\left(\frac{t}{\rho_1}+\frac{\omega}{s_1}\right)} \gg \frac{1}{\left(1-\frac{t}{\rho_1}\right)\left(1-\frac{\omega}{s_1}\right)}$$

由此得到

$$\frac{M}{\left(1-\frac{z}{r_1}\right)\left[1-\left(\frac{t}{\rho_1}+\frac{\omega}{s_1}\right)\right]} \gg f(z,\ t,\ \omega)$$

同样，有

$$\frac{M}{1-\left(\frac{z}{r_1}+\frac{t}{\rho_1}+\frac{\omega}{s_1}\right)} \gg f(z,\ t,\ \omega)$$

以上结果不难推广到有 n 个自变量的函数.

§ 2　Cauchy 定理

研究一个最简单的微分方程初值问题:

$$\begin{cases} \omega'=f(\omega,\ z) \\ \omega(z_0)=\omega_0 \end{cases} \tag{1}$$

令 $z-z_0=z_1$，$\omega-\omega_0=\omega_1$，则 (1) 变为

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\begin{cases} \omega_1' = f_1(\omega_1, z_1) \\ \omega_1(0) = 0 \end{cases} \tag{1$'$}$$

于是，不失一般性，我们考虑 $z_0 = 0$，$\omega_0 = 0$.

设 f 在 $|z| = r$，$|\omega| = \rho$ 的内部全纯，于是在其内部可将 f 展为级数

$$f = \sum_{k,l} a_{k,l}\, \omega^k z^l \tag{2}$$

我们寻求

$$\omega = \sum_m A_m z^m \tag{3}$$

形式的问题 (1) 的解．显然，该问题的关键是如何确定 A_m．实际上，如果 (3) 在某圆盘 $|z| \leqslant R$ 内部收敛，则 (3) 就是 Taylor 级数，从而

$$A_m = \frac{\omega^{(m)}(0)}{m!} \tag{4}$$

而 $\omega^{(m)}(0)$ 可以从方程 (1) 求得．实际上，当 $z = 0$ 时，我们有

$$\omega'(0) = f(0, 0) = a_{00} \tag{5}$$

然后将 (1) 对 z 微分，有

$$\begin{cases} \omega'' = \dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{\partial f}{\partial \omega}\omega' \\ \omega''' = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial \omega}\omega' + \dfrac{\partial^2 f}{\partial \omega^2}(\omega')^2 + \dfrac{\partial f}{\partial \omega}\omega'' \end{cases} \tag{6}$$

$$\cdots\cdots$$

将 (2) 代入 (6)，在 (6) 中令 $\omega = 0$，$z = 0$，而

$$\frac{\partial^n f(0, 0)}{\partial \omega^k \partial z^l} = k!\, l!\, a_{k,l}$$

我们就能写出所有系数A_m的表达式:

$$\begin{cases}\omega''(0)=a_{01}+a_{10}a_{00}\\ \omega'''(0)=2a_{02}+2a_{11}a_{00}+2a_{20}a_{00}^2+a_{10}(a_{01}+a_{10}a_{00})\end{cases}\tag{7}$$

$\cdots\cdots$

将这些值代入(4), 得到A_m, 它们是a_{00}, a_{01}, $\cdots$, $a_{m-1,0}$的正系数多项式, 也就是

$$A_m=P(a_{00},\ a_{01},\ \cdots,\ a_{m-1,0})\tag{8}$$

因而, 所有A_m被唯一确定.

借助优函数, 可以证明(3)在半径$R>0$的圆内收敛, 因而确定出某一解析函数f_1.

从建立f的优函数入手, 取ρ_1与r_1, 使得$0<\rho_1<\rho$, $0<r_1<r$, 函数f在C_1: $|\omega|=\rho_1$与C_2: $|z|=r_1$的内部及周界上是全纯的. 从而, 存在常数M, 使在圆C_1与C_2内部及周界上, $|f(\omega,\ z)|<M$, 于是由§1有结果

$$\frac{M}{\left(1-\dfrac{z}{r_1}\right)\left(1-\dfrac{\omega}{\rho_1}\right)}\gg f(\omega,\ z)\tag{9}$$

考察辅助微分方程

$$\omega'=\frac{M}{\left(1-\dfrac{z}{r_1}\right)\left(1-\dfrac{\omega}{\rho_1}\right)}\tag{10}$$

与(1)相仿, 可以找出级数

$$\omega=\sum B_m z^m\tag{11}$$

并将其作为(10)的满足$z_0=0$, $\omega_0=0$的积分的形式展开, 此级数的系数可通过函数展式:

$$\frac{M}{\left(1-\frac{z}{r_1}\right)\left(1-\frac{\omega}{\rho_1}\right)}=\sum_{k,l} b_{k,l}\,\omega^k z^l \tag{12}$$

的系数，借助与(8)形相同的公式

$$B_m=P(b_{00},\ \cdots,\ b_{m-1,0}) \tag{13}$$

来加以确定，且根据优函数性质：

$$|P(a_{00},\ \cdots,\ a_{m-1,0})|<P(b_{00},\ \cdots,\ b_{m-1,0})$$

也就是

$$|A_m|<B_m \tag{14}$$

因此，如果能证明(11)在某一半径不等于零的圆内收敛，则(1)的解就存在收敛区域．实际上，对(10)很容易积分．分离变量，得到 $\left(1-\frac{\omega}{\rho_1}\right)d\omega=M\left(1-\frac{z}{r_1}\right)^{-1}dz$，

从而

$$\left(1-\frac{\omega}{\rho_1}\right)^2=2Mr_1\rho_1^{-1}\ln\left(1-\frac{z}{r_1}\right)+k \tag{15}$$

将 $z=0$，$\omega=0$ 代入，得 $k=1$. 改写(15)

$$\frac{\omega^2}{\rho_1^2}-2\frac{\omega}{\rho_1}-\frac{2Mr_1}{\rho_1}\ln\left(1-\frac{z}{r_1}\right)=0$$

解此方程，舍去 $z=0$ 时 $\omega\neq 0$ 的根，得到

$$\omega=\rho_1\left\{1-\sqrt{1+\frac{2Mr_1}{\rho_1}\ln\left(1-\frac{z}{r_1}\right)}\right\} \tag{16}$$

为寻找 ω 全纯域，我们发现 ω 有两个奇异点，一个是

$$z_1=r_1 \tag{17}$$

另一个是使(16)的根号下表达式为0的点：

$$z_2=r_1\left(1-e^{-\frac{\rho_1}{2Mr_1}}\right) \tag{18}$$

易见 $0<z_2<r_1$，由此得到级数(11)在 $|z|=z_2$ 的圆 L 内全纯，而能展为在圆 L 内收敛的级数，于是对于任一 $|z|<z_2$，(1)的解绝对收敛，再由幂级数性质，级数(3)在 L 的内部一致收敛，且定义了在 L 内全纯的解析函数．由此得．

定理 1(Cauchy) 如果方程 $\omega'=f(\omega,z)$ 的右端是在 ω_0 与 z_0 邻域中的全纯函数，那么这个方程具有这样的积分：当 $z=z_0$ 时取值 ω_0，且在

$$|z|=r_1(1-e^{-\frac{\rho_1}{2Mr_1}}) \tag{19}$$

所确定的圆内全纯.

关于问题(1)解的唯一性，包含两方面内容．其一，是否存在(1)的两个解析解；其二，是否有以点 z_0 为奇异点的解析函数 $\omega(z)$ 存在．当 z 沿某一曲线 l 逼近 z_0 时，ω 趋于 ω_0，且其导数趋于值 $\omega'=f(\omega_0, z_0)$，这样方程 $\omega'=f(\omega, z)$ 在 l 上点 z_0 处也被满足．

第一个问题，由于表示积分的幂级数系数是唯一确定的，从而不可能存在(1)的两个解析解．为解决第二个问题，首先必须规定当 z 沿着 l 趋于点 z_0 的含义．当 l 是有限长路径时，易于说明，当 l 为无限长路径时，我们约定，若对任意给定的 $\varepsilon>0$，总可找到路径 l 上的一点 a，使得对于 l 上所有在 a 后面的点 z，不等式 $|z-z_0|<\varepsilon$ 成立，并且 z_0 可以是 l 的渐近点，则说点 z 沿着路径 l 趋近于 z_0，在上面约定之下，班勒卫证明了如下定理:

定理 2 如方程 $\omega'=f(\omega, z)$ 的右端当 $\omega=\omega_0$ 与 $z=z_0$ 时全纯，则除掉当 $z=z_0$ 时取值 ω_0 的全纯积分外，

就不再有任何其他的积分存在，使得这个积分也是 z 的解析函数，且当 z 趋于 z_0 时它趋于 ω_0.

这里，我们所要解决的是另一个问题：当 $f(\omega, z)$ 在 $z=z_0$ 处不解析时会出现什么情形？当路径 l 不满足上面所述条件时，又会出现什么情形？Fuchs 给出了一个例子

$$\omega' = -\frac{\omega^2}{z} \tag{20}$$

显然，当 $z=0$ 时，$-\frac{\omega^2}{z}$ 不解析，而

$$\begin{cases} \omega' = -\dfrac{\omega^2}{z} \\ \omega(0) = \omega_0 \end{cases}$$

的解是不存在的($\omega_0 \neq 0$). 容易验证，当 $z_0 \neq 0$ 时，如果下面问题有解

$$\begin{cases} \omega' = -\dfrac{\omega^2}{z} \\ \omega(z_0) = \omega_0 \end{cases} \tag{21}$$

那么，其解由 $\omega(z) = \dfrac{1}{\ln z + c}$ 给出. 其中 $c = \dfrac{1}{\omega_0} - \ln z_0$，特别当 $\omega_0 = 0$ 时，$\omega(z) \equiv 0$ 就是(21) 的解.

设 l 是绕坐标原点 n 次且每次都通过 z_0 点的路径，则令 z 沿 l 变动 n 次，于是，$\omega = (\ln z + 2\pi ni + c)^{-1}$，令 $n \to +\infty$，则 ω 在 z_0 点趋于0，这表明，如路径 l 不满足上面所约定的条件，则可能有异于 Cauchy 定理所给的积分存在. 正是上面这两种奇异现象的出现，导致了一个重要的独特分支——常微分方程的 Fuchs 理论. 到了本世纪

七十年代，又产生了偏微分方程的Fuchs 理论.

§ 3 系数具有极点的二阶方程

考察二阶线性方程:

$$\omega'' + p(z)\omega' + q(z)\omega = f(z) \tag{1}$$

其中 $P(z)$，$q(z)$ 是有理函数. 由常微分方程一般理论知，如找到了齐次方程

$$\omega'' + P(z)\omega' + q(z)\omega = 0 \tag{2}$$

的解，则利用参数变异法，就能由(2) 的解导出(1) 的解. 且若找到(2) 的两个线性无关解 ω_1，ω_2，则

$$\omega = c_1\omega_1 + c_2\omega_2 \tag{3}$$

就是(2) 的通解. 由于(2) 可以化为一阶方程组进行处理，从而由前两节理论知，积分的奇异点只可能是函数 $P(z)$ 与 $q(z)$ 的奇异点. 我们仅考虑奇点是 $P(z)$，$q(z)$ 极点的情形.

设 $\omega_1(z)$，$\omega_2(z)$ 是(2) 的两个线性无关解，由于绕奇点环形后，值发生改变，设改变后的值为 ω_1^*，ω_2^*，它们可表为

$$\omega_1^* = a\omega_1 + b\omega_2, \qquad \omega_2^* = c\omega_1 + d\omega_2$$

特别我们希望如下形式的解

$$\tau(z) = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \tag{4}$$

能使绕奇点环形后的值 $\bar{\tau}(z)$ 可表为

$$\bar{\tau}(z) = \lambda\tau(z) \tag{5}$$

我们寻找 α，β；由设

$$\bar{\tau}(z) = \alpha\omega_1^* + \beta\omega_2^*$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com