数学分析

（下　册）

华中师范大学数学系编

华中师范大学出版社

(鄂)新登字 11 号

图书在版编目(CIP)数据

数学分析(下册)/华中师范大学数学系编.

—武汉:华中师范大学出版社,2001.2

ISBN 7-5622-2331-9/O·131

Ⅰ. 数…

Ⅱ. 华…

Ⅲ. 数学分析-高等学校-教材

Ⅳ. O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 03708 号

数 学 分 析

(下册)

华中师范大学出版社出版发行

(武昌桂子山　邮编:430079)

新华书店湖北发行所经销　　华中科技大学印刷厂印刷

责任编辑:吴小岸　　封面设计:甘　英

责任校对:张　钟　　督　　印:方汉江

开本:850mm×1168mm　1/32　　印张:12.5　　字数:312 千字

版次:2001 年 2 月第 1 版　　2001 年 2 月第 1 次印刷

印数:1-3000　　定价:15.00 元

主　编　张喜堂
编　委　（以姓氏笔划为序）
　　　　刘敏思　何　穗　张喜堂　喻小培
顾　问　王光发

前　言

本书是为适应高等学校理科数学的教学体系和课程体系改革,根据华中师范大学数学系多年来从事数学分析教学的经验与体会编写而成的.

近些年来,随着社会对人才需求的变化,高等学校中增加了培养宽口径、厚基础、高素质,知识型培养与能力型培养并举的数学人才的办学思想,数学专业的各类选修课剧增,传统基础课无论在学时或在教学方法上都受到挑战.基于这种情况,我们编写了该套教材.

本书分上、下两册,采用板块化编写模式,把数学分析的主要内容分为"一元函数微积分","多元函数微积分","无穷级数及极限理论"三大块,使教材内容更具条理性.上册为"一元函数微积分"部分,内容有函数、极限与连续、一元函数的微分学、一元函数的积分学共四章;下册共十章,其中"多元函数微积分"部分有六章,包括多元函数的极限与连续,多元函数的微分,隐函数存在定理及应用,重积分,曲线积分与曲面积分,含参变量积分;"无穷级数及极限理论"部分有四章,包括数项级数、函数项级数、傅里叶级数、极限理论.最后是附录.

本书需三个学期约280—300个学时(含习题课)讲授,三个学期的周学时依次大体可按6、6、3安排讲授.

在本书的编写过程中,我们注意了以下几个方面:

1.本书与目前国内通用的数学分析最大不同之处是:把多元函数微积分部分提前在无穷级数部分之前讲授.这样在时间安排上便于数学专业学生对大学物理课程的学习.解决了数学专业大学物理的教学与微积分教学在时间上的冲突.

2.为了使难点分散和便于理解,本书把微积分的极限理论分

两阶段完成.第一阶段在一元函数微积分部分,我们把极限理论的六个定理不加证明而直接据此展开一系列讨论,然后以适当的例子给出它们的应用,以期解释这些定理并使读者易于理解掌握.

第二阶段在十四章的极限理论部分,集中论证了六个定理的等价性及其典型方法。以供报考研究生和以后从事数学工作的读者进一步提高极限理论。

3.由于章节顺序的变化及篇幅等原因,本书在内容处理上与国内通用教材比较有较多变化.如:导数与微分的概念同时引入,相关内容同时讨论,突出了两者的联系;考虑到计算机的应用与逐步普及,本书明显淡化了函数作图、求导数计算、求不定积分计算、Γ函数与B函数的计算、近似计算以及定积分在几何与物理方面的应用;为讨论无穷限含参变量积分,恰当地引入二元函数一致收敛的概念等.另外,书中突出并加大了重难点内容的例子,力求通过一些典型例子使读者初步掌握分析问题与解决问题的方法;各章节习题的难度有所降低,给读者和教师留下一定的空间.

编写本书过程中,虽然我们作了很大的努力,但由于知识与能力所限,深感难度很大,错误在所难免,诚请读者给予批评指正.

本书编写过程中参考了不少兄弟院校的教材和习题,在此表示深切的感谢.

本书是1995年原国家教委关于直属师范大学师范专业建设基金项目的一个课题.

本书编写组由张喜堂、刘敏思、何穗、喻小培组成,王光发担任顾问.在编写组讨论的基础上,全书由张喜堂执笔主编并在1996级试用,且随后进行了第一次修改.接着由刘敏思、何穗、喻小培在1997级、1998级、1999级中试用的基础上,进行了第二次修改.刘敏思还增写了附录部分,全书由张喜堂统稿.

编　者

2000年元月于华中师范大学数学系

目　　录

多元函数微积分篇

无穷级数及极限理论篇

多元函数微积分篇

第五章　多元函数的极限与连续

从本章开始,我们将讨论多元函数微积分的基本理论和基本方法,并且将着重讨论二元函数的情形.在掌握了二元函数的有关理论和方法后,其结果都很容易推广到一般的多元函数上.同讨论一元函数微积分的情形类似,我们先作一些准备工作.

§1　预备知识

1.1　平面点集

一元函数 $y=f(x)$的定义域一般是 x 轴上的区间,而二元函数 $z=f(x,y)$的定义域一般是平面上区域.什么是区域呢?粗略地讲,区域是由一条曲线或几条曲线所围成的平面上的一部分.如由圆周围成的圆形区域;由三条直线围成的三角形区域等.记 $\mathbf{R}^2=\{(x,y)\mid -\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty\}$称为全平面,它也是一个区域.下面我们给出区域及其有关的基本概念.

1. 设 $P=(x_1,y_1)$,$Q=(x_2,y_2)$是 $\mathbf{R}^2$ 上的两点,称

$$|P-Q|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

为 P 与 Q 间的距离,也记为 $\rho(P,Q)$.

2. 设 $P_0=(x_0,y_0)$是 $\mathbf{R}^2$ 上的一点,$\delta>0$,称集合

$$\left\{(x,y)\,\middle|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

为点 P_0 的一个 δ 圆形邻域,简称邻域,记为 $U(P_0,\delta)$,或简记为 $U(P_0)$.

称集合　$\left\{(x,y)\,\middle|\,0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$

为点 P_0 的一个 δ 空心邻域，记为 $U^0(P_0,\delta)$，或简记为 $U^0(P_0)$.

称集合 $\{(x,y) \mid |x-x_0|<\delta, |y-y_0|<\delta\}$

为点 P_0 的 δ 方形邻域，也简称邻域，记为 $U(P_0,\delta)$ 或 $U(P_0)$.

容易证明：点 P_0 的任何一个圆形邻域内必包含点 P_0 的一个方形邻域；反之亦然（证明留给读者）.

3. 设 $P_0=(x_0,y_0)$ 是平面点集 E 上的一点，

(1) 若存在 P_0 的一个 δ 邻域 $U(P_0,\delta)$，使 $U(P_0,\delta)$ 全含于集 E 内，即 $U(P_0,\delta)\subset E$，则称 P_0 为 E 的一个内点；

(2) 若集 E 中的每一点都是 E 的内点，则称集 E 为开集；

(3) 若集 E 是开集，且集 E 中任何两点 P 和 Q 都可用一条完全含于 E 的折线连接起来（此性质也称连通性），则称集 E 为开区域，简称开区域或区域.

4. 设 E 是一个平面点集，$P_0=(x_0,y_0)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上一点，

(1) 若点 P_0 的任何邻域 $U(P_0)$ 内都含有集 E 中的无穷多个点，则称点 P_0 为集 E 的一个聚点.

若集 E 的所有聚点都属于 E，则称集 E 为闭集；

(2) 若点 P_0 的任何邻域 $U(P_0)$ 内既含有集 E 中的点，又含有不属于集 E 的点，则称点 P_0 为 E 的界点. 集 E 的所有界点组成的集，称为集 E 的边界，记为 ∂E；

(3) 若集 E 是一个开区域，则 $E\cup\partial E$ 称为闭区域.

5. 设 $P_n=(x_n,y_n)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一串点列，$P_0=(x_0,y_0)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一点，若 $\forall \varepsilon>0$, $\exists N>0$, 当 $n>N$ 时，$\rho(P_n,P_0)<\varepsilon$，即 $\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}<\varepsilon$，则称 $\{P_n\}$ 以 P_0 为极限，记为

$$\lim_{n\to\infty}P_n=P_0 \text{ 或 } P_n\to P_0 \quad (n\to\infty).$$

显然，$\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P_0$ 等价于 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$.

此结果由不等式 $\left\{\begin{array}{l}|x_n-x_0| \\ |y_n-y_0|\end{array}\right. \leqslant \sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}$

和 $\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}\leqslant|x_n-x_0|+|y_n-y_0|$ 立即可得.

6. 设 E 为平面上的一个点集,若存在某个正数 R,使 $E\subset U(0,R)$或$\forall P=(x,y)\in E$,有$|x|\leqslant R$,$|y|\leqslant R$,则称 E 为有界集.否则称 E 为无界集.

以下几个定理同直线上点集的情形类似.这里不予证明,有兴趣的读者可参看其它有关数学分析的书籍.

闭区域套定理　设$\{D_n\}$是平面上一列有界的闭区域序列,且满足

$$(1)\ D_1\supset D_2\supset D_3\supset\cdots\supset D_n\supset\cdots;\ (2)\ \lim_{n\to\infty}d(D_n)=0.$$

则存在唯一的 $P_0=(x_0,y_0)$属于所有的闭区域 D_n.其中 $d(D_n)=\sup\{\rho(P,Q)\mid\forall P,Q\in D_n\}$表示 D_n 的直径.

聚点原理　设 E 是平面上有界无限点集,则 E 至少有一个聚点.

致密性定理　设$\{P_n\}=\{(x_n,y_n)\}$是平面上任一有界无限点列,则$\{P_n\}$至少存在一个收敛的子列$\{P_{n_k}\}$,即存在 $P_0=(x_0,y_0)$,使$\lim\limits_{k\to\infty}P_{n_k}=P_0$.

设 D 是平面上一个点集,$\{G_\alpha\}$是由开区域组成的集合,若对任何点 $P\in D$,$\{G_\alpha\}$中至少有一个开区域 G_0,使 $P\in G_0$,则称$\{G_\alpha\}$构成 D 的一个开覆盖.

有限覆盖定理　若 D 是有界闭区域,则对 D 的任何开覆盖$\{G_\alpha\}$,必存在$\{G_\alpha\}$中的有限个开区域构成 D 的一个有限开覆盖.

1.2　二元函数的概念

定义 1　设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个非空集合,若存在一个对应关系 f,使得对 D 中每个点$P=(x,y)$,通过 f 都有唯一的实数 $z\in\mathbf{R}$ 与之对应,则称 f 是从 D 到 $\mathbf{R}$ 的二元函数.记为 $z=f(x,y)$.

其中点集 D 称为函数 $f(x,y)$ 的定义域，全体函数值的集合称为函数 $f(x,y)$ 的值域，记为 $f(D)=\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}\subset\mathbf{R}$.

类似于一元函数的情形，使函数关系有意义的平面上的点 (x,y) 的集合，称为二元函数 f 的（自然）定义域. 三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中的点集 $G(f)=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\begin{array}{l}z=f(x,y)\\(x,y)\in D\end{array}\right\}$ 称为二元函数 $z=f(x,y)$ 的图像，它一般是空间上的一个曲面（如图 5.1）.

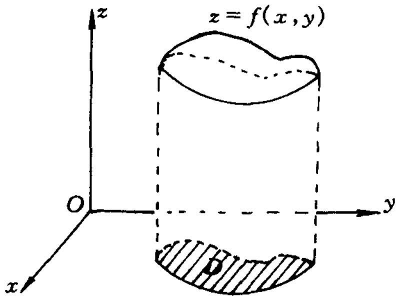

图 5.1

1.3 n 维欧氏空间

n 个有顺序的实数构成的实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为一个 n 维点，n 维点全体所成的集称为 n 维向量空间，简称为 n 维空间，记为 $\mathbf{R}^n$. $\mathbf{R}^n$ 中的点也称为 n 维向量，记为 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为 n 个分量或坐标，称 $\boldsymbol{O}=(0,0,\cdots,0)$ 为零向量或原点.

在 $\mathbf{R}^n$ 中可定义如下运算：

设 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中任意两点，α 为任意实数，

(1) 称 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$ 当且仅当 $x_i=y_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$；