江苏省中小学教师自学考试小学教育专业专升本教材

大学数学

Da xue Shu xue

叶惟寅 周兴和 主编

苏州大学出版社

江苏省中小学教师自学考试小学教育专业专升本教材

大学数学

叶惟寅　周兴和　主编

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学数学/叶惟寅,周兴和主编. —苏州:苏州大学出版社,2000.10
江苏省中小学教师自学考试小学教育专业专升本教材
ISBN 7-81037-730-2

Ⅰ.大… Ⅱ.①叶…②周… Ⅲ.高等数学-教材
Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 50652 号

大学数学

叶惟寅　周兴和　主编

责任编辑　董张维

苏州大学出版社出版发行
(地址:苏州市十梓街 1 号　邮编:215006)
武进市第三印刷厂印装
(地址:武进市村前镇　邮编:213154)

开本 850×1168　1/32　印张 26.375(共两册)　字数 660 千
2000 年 10 月第 1 版　2000 年 10 月第 1 次印刷
印数 1-16000 册
ISBN 7-81037-730-2/O·31(课)
定价:31.00 元(本册定价:21.50 元)

苏州大学版图书若有印装错误,本社负责调换
苏州大学出版社发行科　电话:0512-5236943

江苏省中小学教师自学考试小学教育专业专升本教材编写委员会成员名单

前　言

江苏省教育委员会决定自2000年起举办小学教师小学教育专业专升本自学考试,以南京师范大学为主考单位.

本科小学教育专业自学考试,既是我国自学考试的一种全新形式,也是江苏省21世纪推进小学教师继续教育,提升学历,以适应江苏省教育现代化需要的重要举措.

南京师范大学于1998年设置本科小学教育专业并招生,为我省小学教师小学教育专业专升本自学考试奠定了基础.江苏省自1993年起组织并实施专科小学教育专业自学考试,迄今已有数万考生顺利通过考试,进一步提高了我省小学教师队伍的素质.1999年,江苏省教育委员会组织专家进行了小学教师小学教育专业专升本自学考试方法与课程计划的论证,制定了《江苏省小学教师自学考试小学教育专业专升本课程考试计划》,同时组织了一批专家根据课程计划编写教材.为保证教材的质量,江苏省教育委员会两次组织教材编写会议进行研讨,明确了教材编写的指导思想和编写原则,并拟订了教材编写计划,正式下发了《关于组织编写小学教师自学考试小学教育专业专升本课程教材的通知》.

这套教材的基本特点为：(1) 突出21世纪小学素质教育的要求，旨在提高小学教师实施素质教育的能力和水平.(2) 基础性与应用性相结合，旨在为小学教师可持继发展提供条件，为小学教师的教育教学实践服务.(3) 课程教学与课外学习相结合，改变自学考试的"应试"教育倾向，实现学历与素质同步提高的目标.

本科小学教育专业自学考试作为全新的事业，需要不断发展和完善，希望广大自学考试辅导教师和自学考试者在教材的使用与学习中，提出宝贵意见，为这一事业的发展作出贡献.

江苏省中小学教师自学考试办公室

2000年2月24日

目　　录

第一篇　数论初步

第二篇　线性代数

第四篇 概率统计初步

第一篇 数论初步

数论(The Theory of Numbers)是数学最古老的分支之一.它的历史可以追溯到公元前3世纪,在古希腊数学家欧几里得(公元前330年～公元前275年)著的《几何原本》一书中就有三篇是专门介绍数论知识的.我国公元前后的《孙子算经》一书中就已给出了解一次同余式组的方法,即著名的孙子定理(西方国家称为中国剩余定理).数论的特点之一是其中许多定理和猜想很容易理解(有的只要具有小学或初中的数学水平就可以理解).但要证明它们却异常困难.因此数学中至今仍悬而未决的著名难题有相当一部分就属于数论这个领域.

初等数论是主要用算术方法来研究整数性质的一个数论分支.17世纪以来费马(Fermat)、欧拉(Euler)、勒让德(Legendre)、高斯(Gauss)等人的工作大大发展和丰富了初等数论的内容.近几十年来,初等数论在计算机科学、代数编码理论、组合数学和信号数字处理等现代科学领域内得到了广泛应用.这里主要介绍初等数论的一些基本知识.

第一章　整数的整除性

整除是数论中的基本概念，从这个概念出发，我们将介绍辗转相除法，最大公因数，最小公倍数等重要概念，它们也是本课程最基本的内容.

§1.1　整除的概念与性质

整数是这样一些数：

$$\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots.$$

其中 $1,2,3,4,\cdots,n,\cdots$ 这些数叫做**正整数**，其中 $1,3,5,7,\cdots$ 叫做**奇数**；$2,4,6,8\cdots$ 叫做**偶数**. $0,1,2,\cdots,n,\cdots$ 这些数叫做**自然数**. $-1,-2,-3,-4,\cdots,-n,\cdots$ 这些数叫做**负整数**.

在整数范围内，有

整数＋整数＝整数；

整数－整数＝整数；

整数×整数＝整数.

但是整数除整数并不能保证一定得整数，当然更谈不上正整数除正整数就一定得正整数了. 研究究竟什么样的整数除什么样的整数才能得到整数这样的问题，就是本章所涉及的整数的整除性.

从本节开始，除非另有说明，总是用小写字母 $a,b,c,d,\cdots$ 来表示整数，并认为整数的加法、减法、乘法和除法的通常性质大家是已经掌握的，可以随时应用.

定义 1.1　设 a,b 是整数，$b\neq 0$. 如果存在一个整数 q 使得等式

$$a=bq \tag{1}$$

成立，则称 b **能整除** a 或 a **能被** b **整除**，记作 $b|a$，此时把 b 叫做 a 的**因数**(或**约数**)，把 a 叫做 b 的**倍数**. 如果这样的整数 q 不存在，则称 b **不能整除** a，记作 $b\nmid a$. 例如有 $2|8$, $12|24$, $19|19$, $-5|25$, $7|-21$, $5\nmid 7$, $9\nmid 23$, $4\nmid 3$, $-2\nmid 33$.

由整除的定义出发，可以证明整除具有以下几个性质.

性质 1 如果 $b|a$, $c|b$，则 $c|a$.

证 根据整除的定义，我们知道存在整数 q 和 p，使得等式 $a=bq$, $b=cp$ 成立，因此可得 $a=cpq$，由于 pq 也是一个整数，故再由整除的定义可得 $c|a$.

性质 2 如果 $b|a$，则 $cb|ca$.

证 根据整除的定义，我们知道存在整数 q，使得等式 $a=bq$ 成立，因此有 $ca=cbq$，再由整除的定义可得 $cb|ca$.

性质 3 如果 $c|a$，则对任何整数 d, $c|da$.

证 根据整除的定义，我们知道存在整数 q，使得等式 $a=cq$ 成立，因此有 $da=dcq=c(dq)$，再由整除的定义可得 $c|da$.

性质 4 如果 $c|a$, $c|b$，则对任意的整数 m, n，有 $c|ma+nb$.

证 根据整除的定义，我们知道存在整数 q 和 p，使得等式 $a=cq$, $b=cp$ 成立，因此有

$$ma+nb=mcq+ncp=c(mq+np),$$

由于 mq, np 都是整数，故 $mq+np$ 也是整数，再由整除的定义可得 $c|ma+nb$.

性质 5 如果 $a|b$, $b|a$，则 $a=\pm b$.

证 根据整除的定义，我们知道存在整数 q_1 和 q_2，使得等式 $b=aq_1$, $a=bq_2$ 成立. 因此有 $a=aq_1q_2$，由此可得 $q_1q_2=1$，因为 q_1, q_2 均为整数，所以 $q_1=\pm 1$, $q_2=\pm 1$，即 $a=\pm b$.

定义 1.2 一个大于 1 的正整数，如果只能被 1 和它本身整除，不能被其它任何正整数整除，这样的正整数叫做**质数**(有的书

上称为**素数**).

按照定义质数的因数只有 1 和它本身;反之,一个正整数只有 1 和它本身这样两个因数,那么,它就是质数.

例如 2,3,5,7,11,13,23,43,47 都是质数.

定义 1.3 一个正整数除了能被 1 和它本身整除以外,还能被其它的正整数整除,这样的正整数叫做**合数**.

例如 4,8,10,12,15,18,25,45,50 都是合数.

定义 1.4 如果一个正整数 a 有一个因数 b,而 b 又是质数,则称 b 为 a 的**质因数**.

例如 $18=3\times6$,则 3 和 6 都是 18 的因数,因为 6 不是质数而 3 是质数,所以 3 是 18 的质因数而 6 不是 18 的质因数. 又有 $18=3\times3\times2$,所以 18 的质因数除了 3 以外还有 2.

把一个整数分解为质因数的乘积称为**整数的质因数分解**或称为**把整数分解质因数**. 这对后面内容的学习是有用的.

例如,$48=2\times2\times2\times2\times3$,

$45=3\times3\times5$,

都是整数的质因数分解.

这里我们遇到的问题是对于每一个大于 1 的整数,如果不论次序,它是否能表示成质因数的乘积,如果能表示成质因数的乘积的话,这种表示是否是唯一的,对此我们有以下的定理.

定理 1.1(算术基本定理) 任一大于 1 的整数能唯一地表示成质因数的乘积.

定理证明从略.

在一般的情况下,a 被 b 除时,我们有

定理 1.2(带余除法) 设 a,b 是两个整数,其中 $b>0$,则存在两个唯一的整数 q 及 r,使得

$$a=bq+r,\ 0\leqslant r<b \tag{2}$$

成立.

定理证明从略.这是一个后面经常要用到的结论,请大家牢牢记住.

例 1 设正整数 m,n 都不是 3 的倍数,$m>n$.求证:$m+n$ 和 $m-n$ 中有且仅有一个是 3 的倍数.

证 因为 m 和 n 都不是 3 的倍数,所以 m,n 分别被 3 除,余数只能是 1 或 2.即有

$$m=3p+1 \text{ 或 } m=3p+2,$$
$$n=3q+1 \text{ 或 } n=3q+2.$$

(1) 如果 m,n 被 3 除的余数相同,则 $m-n=3(p-q)$,这意味着 $m-n$ 是 3 的倍数,而此时 $m+n=3(p+q+1)+1$ 或 $m+n=3(p+q+1)-1$,显然 $m+n$ 不能被 3 整除.

(2) 如果 m,n 被 3 除的余数不相同,则 $m+n=3(p+q)+3$,这时 $m+n$ 是 3 的倍数,而此时 $m-n=3(p-q)-1$(m 的余数为 1,n 的余数为 2)或 $m-n=3(p-q)+1$(m 的余数为 2,n 的余数为 1),显然 $m-n$ 不能被 3 整除.

由(1),(2)可知结论为真.

例 2 有一个正整数,用它去除 22,31,44,得到三个余数之和为 13,求这个正整数.

解 设这个正整数为 p,再设用 p 去除 22,31,44,所得到的商分别为 q_1,q_2 与 q_3,余数分别为 r_1,r_2 与 r_3,则有

$$22=pq_1+r_1 \quad (0\leqslant r_1<p),$$
$$31=pq_2+r_2 \quad (0\leqslant r_2<p),$$
$$44=pq_3+r_3 \quad (0\leqslant r_3<p),$$

三式相加可得

$$97=p(q_1+q_2+q_3)+(r_1+r_2+r_3).$$

因为有
$$r_1+r_2+r_3=13<3p,$$

故可得
$$p>\frac{13}{3}.$$

又有 $\quad p(q_1+q_2+q_3)=97-(r_1+r_2+r_3)$

$$=97-13=84.$$

而 84 的正因数是 1,2,3,4,6,7,12,14,21,28,42,84,由于已知 $p>\frac{13}{3}$,故 p 只可能是 6,7,12,14,21,28,42,84 这八个数中的一个.

当 $p=6$ 时,用 p 去除 22、31、44 的余数和为 7;当 $p=7$ 时,用 p 去除 22、31、44 的余数和为 6;当 $p=14$ 时,用 p 去除 22、31、44 的余数和为 11,它们都小于 13. 当 p 取 12,28,42 和 84 时,用 p 去除 22、31、44 的余数和都大于 13. 故只能取

$$p=21.$$

习　题　1.1

1. 求证:若 $b|a,d|c$,则 $bd|ac$.

2. 对于任意两个正整数 m 和 n,试证:$m+n,m-n,mn$ 三者中至少有一个是 3 的倍数.

§1.2　最大公因数和辗转相除法

12 有因数 1,2,3,4,6,12;而 18 有因数 1,2,3,6,9,18. 所以 1 是 12 和 18 的公因数,3 和 6 也是 12 和 18 的公因数.

几个正整数的公因数往往不止一个,我们感兴趣的是其中最大的那一个.

定义 1.5　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个不全为零的整数,若整数 d 是它们之中每一个的因数,那么 d 就叫做 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个**公因数**. 整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的公因数中最大的一个叫做它们的**最大公因数**,记作 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

最大公因数有下列几个性质(不一一严格证明):

性质 1　当 $b|a$ 时,$(a,b)=b$.

这里因为 $a=bm$，所以 $(a,b)=b$.

性质 2 a,b 的一切公因数都是 (a,b) 的因数.

性质 3 若 a,b 是正整数，m 是任一正整数，则有 $(am,bm)=(a,b)m$.

性质 4 若 $(a,b)=1$，c 为任一正整数，则有 $(ac,b)=(c,b)$.

性质 5 若 $(a,b)=1$，$b|ac$，则有 $b|c$.

性质 6 若 a,b,d 是任意三个正整数，则 $(a,b)=d$ 的充分必要条件是

$$\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1.$$

例 1 求(36,60).

解 把这两个数分别分解质因数

$$36=2\times2\times3\times3,$$

$$60=2\times2\times3\times5.$$

把这两个数的质因数比较一下，可以发现质因数 2,2,3 是这两个数所公有的，则它们的乘积就是这两个数的最大公因数：

$$2\times2\times3=12.$$

例 2 求(15,60,90).

解 把这三个数分别分解质因数

$$15=3\times5,$$

$$60=2\times2\times3\times5,$$

$$90=2\times3\times3\times5.$$

把这三个数的质因数比较一下，可以发现质因数 3 和 5 是这三个数所公有的，则它们的乘积就是这三个数的最大公因数：

$$3\times5=15.$$

由此我们可以得到求 n 个正整数的最大公因数的方法是：先把这些正整数分别分解质因数，然后取出它们所有共同含有的质因数(相同的质因数照共同含有的个数取)相乘，即得到这些正整