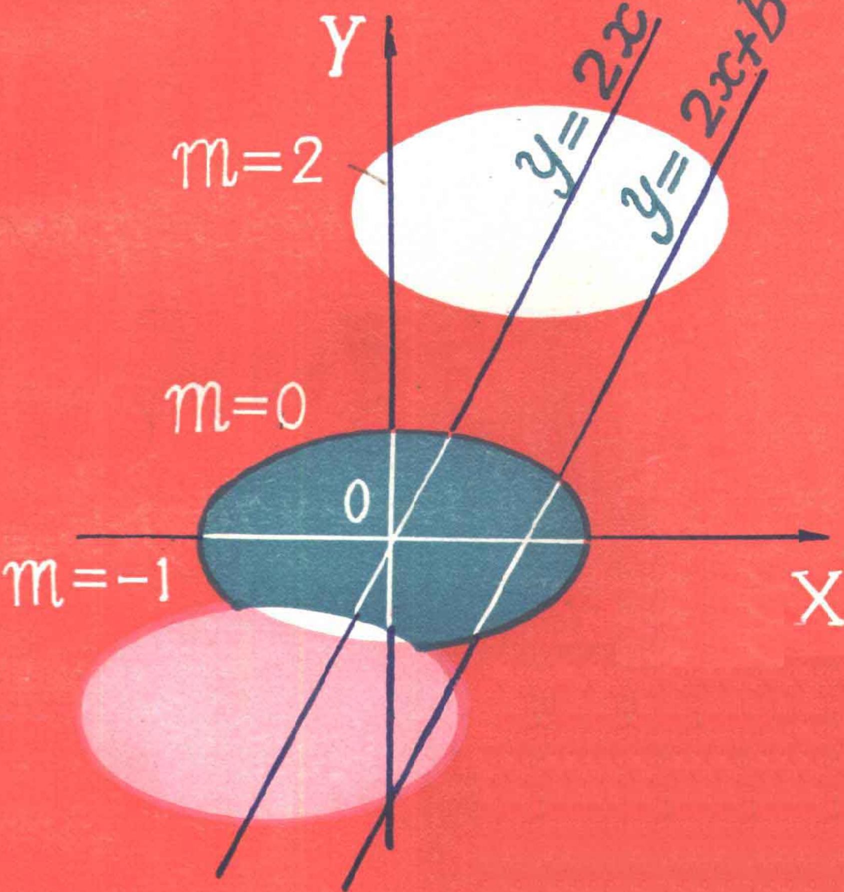
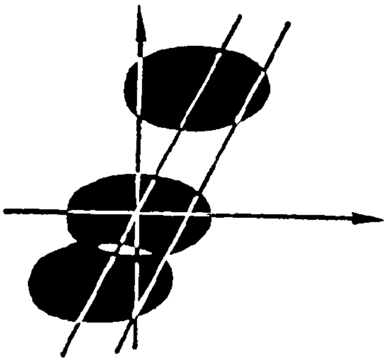
ZHONGXUESHENGKEWAIDUWU



中学数学方法的综合运用

欧阳维诚 唐德论 曾岳生编著

中学生课外读物



中学数学方法的综合运用

欧阳维诚 唐德论 曾岳生编著

湖南教育出版社

中学数学方法的综合运用

欧阳维诚　唐德论　曾岳生 编著

责任编辑：孟实华

•

湖南教育出版社出版（长沙市展览馆路14号）

湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷一厂印刷

*

1981年8月第1版　1984年2月第3次印刷

字数：174,000　印张：8.5　印数：100,001——162,000

统一书号：7284·68　定价：0.61元

目 录

前言 ……………………………………………………（1）
第一章 代数在三角和几何上的应用 ………（3）
§1 利用代数变换解三角问题…………………………（4）
§2 利用代数运算解几何问题…………………………（22）
§3 利用代数函数解几何极值等问题………………（46）
§4 利用复数解三角问题………………………………（57）
§5 利用复数与向量解几何问题……………………（72）
§6 利用解析方法解几何问题………………………（85）
第二章 三角在解决几何和代数问题上的作用 ………………………………………（98）
§1 利用三角方法证几何定理………………………（100）
§2 利用三角方法解几何中有关线段的四则运算问题…………………………………………（110）
§3 利用三角方法解几何题的进一步分析…………（118）
§4 利用三角方法结合面积公式解几何题…………（128）
§5 利用三角方法求几何极值…………………………（137）
§6 利用三角函数建立曲线方程………………………（144）
§7 利用三角代换解某些代数问题……………………（152）

第三章　几何图象在解决代数和三角问题上的作用 ……………………………………(166)

§1　利用几何图象解释和记忆数学公式………………(166)
§2　利用几何图象简化推理运算……………………(171)
§3　利用几何图象分析题意，寻找解题途径…………(183)
§4　利用几何图象猜测或检验问题的答案……………(195)
§5　利用几何图象研究极值问题……………………(203)
§6　利用几何方法解代数、三角问题杂例……………(218)

第四章　综合题与一题多解 ……………………(225)

§1　综合题……………………………………………(225)
§2　一题多解…………………………………………(239)
§3　举一反三，总结解题经验…………………………(260)

前　　言

代数、几何、三角是中学数学三个不同的分支。代数研究的对象主要是"数"，几何研究的对象主要是"形"，而三角研究的则主要是三角函数和三角形的解法，它们所使用的研究方法也各自不同。但是，"数"与"形"之间并没有不可逾越的鸿沟，它们之间有着密切的联系，在解析几何中就把"数"与"形"很好地统一起来了。不同的研究方法也不是一成不变的，在一定的条件下，它们可以互相转化、互相渗透。许多代数问题可以用三角或几何方法来解；许多三角问题可以用代数或几何方法来解；许多几何问题又可以用代数或三角方法来解。一般地说，几何图形比较"直观"，代数问题比较"机械"。抽象的代数问题，一旦与几何图形结合，就往往易于理解、记忆或估测其结果；几何中的难题，一旦化为代数问题，也往往有一定的运算方法和步骤可循，因而易于求解。

由此可见，要想比较全面、灵活、深入、牢固地掌握中学数学，除了要学好基础知识和基本技能之外，还要能沟通其不同部分的知识，并能综合运用它们来分析问题和解决问题。编写本书的目的，就是向广大中学生介绍这方面的知识。本书的内容分为四个部分：一是代数在三角和几何上的应用；二是三角在解决几何和代数问题上的作用；三是几何图象在解决代数

和三角问题上的作用；最后再简略谈谈综合题与一题多解，以及怎样总结解题经验的问题。

本书所说的综合运用，是建立在牢固掌握各科基础知识的基础之上的。其中涉及到的一些中学数学知识，一般只述而不证，因为在中学教科书上可以找到其证法。有个别例题或习题因使用不同的解法，在不同的章节中重复出现，以供对比。各节后所附的习题，希望读者尽可能地用该节所讲的方法去完成，这对于掌握该节所介绍的方法是必要的。同时也可用其他方法来解，以进行比较，加深理解。

第一章　代数在三角和几何上的应用

代数在三角和几何上的应用非常广泛，非常重要。代数研究的对象是数量关系，它具有高度的抽象性，同时也具有广泛的应用性。代数公式$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，a、b既可以代表数或代数式，也可以代表三角函数，还可以代表几何中的长度、面积的数量等等；反过来，几何与三角的许多结论，常常要通过一定的代数式表示出来，例如几何中的勾股定理$a^2+b^2=c^2$，三角中的平方关系$\sin^2A+\cos^2A=1$等等。因此，无论是解几何题或三角题，都离不开代数基本运算和代数基础知识。此外，代数在三角和几何上的应用还表现在以下几个方面：

1　许多三角题或几何题在解题之前，充分运用代数知识进行适当处理，常可使题目中的条件和结论由生疏转向熟悉，由复杂变成简单，由隐晦化为明显，有助于我们发现解题途径或简化推理过程，

2　某些三角和几何问题如果能转化为代数问题来解，较之纯用三角或几何本科知识来解会更为顺利和简洁。

3　某些三角和几何问题虽可用本科知识解决，但若同时用上代数方法来配合对比，会使我们对问题的认识更深入、更全面。

4　某些代数内容、如一次函数、二次函数、复数或向量等，

它们本身就有强烈的几何意义，是解决某些三角或几何问题的强有力的工具。

本章即从上述几个方面介绍一些代数在三角和几何上的应用。

§1 利用代数变换解三角问题

某些三角问题，如证三角恒等式、解三角方程、解三角不等式等，可以通过适当的变换，化为相应的代数问题来处理。

一 用万能置换公式进行代换

在中学课本中，我们知道，若令$\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$，则不难推出：

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \mathrm{tg}\,x=\frac{2t}{1-t^2}.$$

这三个公式称为万能置换公式。通过这一代换，可以把一个三角函数式化为 t 的代数式，从而可以把某些三角问题转化成代数问题来处理。

例1 求证 $\dfrac{1+\sec\alpha+\mathrm{tg}\alpha}{1+\sec\alpha-\mathrm{tg}\alpha}=\sec\alpha+\mathrm{tg}\alpha$。

证 设$tg\,\dfrac{\alpha}{2}=t$，则

$$\frac{1+\sec\alpha+\mathrm{tg}\alpha}{1+\sec\alpha-\mathrm{tg}\alpha}=\frac{1+\dfrac{1+t^2}{1-t^2}+\dfrac{2t}{1-t^2}}{1+\dfrac{1+t^2}{1-t^2}-\dfrac{2t}{1-t^2}}=\frac{1-t^2+1+t^2+2t}{1-t^2+1+t^2-2t}$$

$$=\frac{2+2t}{2-2t}=\frac{1+t}{1-t},$$

$$\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha=\frac{1+t^2}{1-t^2}+\frac{2t}{1-t^2}=\frac{(1+t)^2}{1-t^2}=\frac{1+t}{1-t},$$

$$\therefore\quad \frac{1+\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1+\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha.$$

例2 解方程$\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}=1+\sin 2x$.

解 设 $\operatorname{tg}x=t$，则原方程化为

$$\frac{1+t}{1-t}=1+\frac{2t}{1+t^2},$$

化简得 $2t^2(1+t)=0$.

若$t=0$，则$\operatorname{tg}x=0$，得$x_1=n\pi$.

若$t=-1$，则$\operatorname{tg}x=-1$，得$x_2=n\pi-\frac{\pi}{4}$.

∴ 这个方程的根是：

$$x_1=n\pi,\quad x_2=n\pi-\frac{\pi}{4}.\ (n\text{为整数})$$

值得注意的是，万能置换公式对于把三角问题转化为代数问题虽然是"万能"的，但使用这一代换也有其不足的一面，一是往往带来复杂的计算，特别是解三角方程时，有时可能得出高次方程而难以求解．二是在解三角方程时，由于把$\sin x$、$\cos x$等换成$tg\,\frac{x}{2}$，定义域缩小了，（$\sin x$、$\cos x$的定义域是全体实数，而$tg\,\frac{x}{2}$的定义域是$x\neq(2n+1)\pi$） 当$x=(2n+1)\pi$ 为

原方程的根时，会造成遗根．因此必须检验$x=(2n+1)\pi$是不是方程的根，以免丢根。

例3 解方程 $\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}=2$。

解 设$\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$，则原方程化为

$$\frac{1+t^2}{2t}+\frac{1+t^2}{1-t^2}=2,$$

化简得 $t^4-6t^3+2t-1=0$ 。

这个四次方程无有理根，求解十分困难。

例4 解方程 $\sin x+\cos x+\sin 2x=-1$。

解 设$\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$，则原方程化为

$$\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+2\cdot\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}=-1,$$

化简得 $t^3-t^2-3t-1=0$,

即 $(t+1)(t^2-2t-1)=0$。

$\therefore$ $t=-1$ 或$t=1\pm\sqrt{2}$。

故原方程的解是：

$x_1=2n\pi-\dfrac{\pi}{2}$，$x_2=2n\pi+\dfrac{3\pi}{4}$，$x_3=2n\pi-\dfrac{\pi}{4}$。($n$为整数)

我们不难发现，$x=(2n+1)\pi$ 也适合原方程，所以原方程还有解

$x_4=(2n+1)\pi$。(n为整数)

正由于利用万能置换公式作代换有上述缺点，限制了它的使用范围，所以在一些只包含正弦和余弦的方程或等式中，还常常采用下面的代换.

二　用 $\begin{cases}\sin x = a,\ \ \cos x = b\\ a^2 + b^2 = 1\end{cases}$ 进行代换

若令　$\sin x = a$，$\cos x = b$，则由 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$　我们有 $a^2 + b^2 = 1$，于是得到上述代换公式. 利用这一代换，把某些三角问题转化成代数问题，也往往会使运算过程简捷、顺利.

例5　解方程 $\sin x + \cos x = 0$.

解　设 $\sin x = a$，$\cos x = b$，则原方程化为方程组

$$\begin{cases}a + b = 0\\ a^2 + b^2 = 1.\end{cases}$$

解之，得　$a = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$b = \mp\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

即　　$\sin x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos x = \mp\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

∴　原方程的解是：

$$x_1 = (2n+1)\pi - \frac{\pi}{4},\ \ x_2 = 2n\pi - \frac{\pi}{4},$$

即　　$x = n\pi - \dfrac{\pi}{4}$.（$n$为整数）

利用这一代换有时可以克服万能代换的缺点，我们以上述例3和例4来说明。

在例3中设 $\sin x = a$，$\cos x = b$，则原方程化为方程组

$$\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2\\a^2+b^2=1,\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}2ab-(a+b)=0\\a^2+b^2-1=0.\end{cases}$$

$$\therefore\quad (a+b)^2-(a+b)-1=0.$$

取符合题意的解 $a+b=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，则$ab=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$，进而得

$$a=\frac{1-\sqrt{5}\pm\sqrt{2(1+\sqrt{5})}}{4}.$$

$$\therefore\quad x=2n\pi+\arcsin\frac{1-\sqrt{5}\pm\sqrt{2(1+\sqrt{5})}}{4},$$

或 $x=(2n+1)\pi-\arcsin\frac{1-\sqrt{5}\pm\sqrt{2(1+\sqrt{5})}}{4}$。（$n$为整数）

这样，就避免了利用万能置换公式代换而引出难于求解的四次方程的情况了。

在例4中，设$\sin x=a$，$\cos x=b$，则原方程化为方程组

$$\begin{cases}a+b+2ab=-1\\a^2+b^2=1\end{cases}$$

解之，得

$$\begin{cases}a=0\\b=-1,\end{cases}\begin{cases}a=-1\\b=0,\end{cases}\quad\begin{cases}a=\frac{\sqrt{2}}{2}\\b=-\frac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}\quad\begin{cases}a=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\b=\frac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}\sin x=0\\ \cos x=-1,\end{cases}\quad \begin{cases}\sin x=-1\\ \cos x=0,\end{cases}\quad \begin{cases}\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}$$

$$\therefore\quad x_1=(2n+1)\pi,\ x_2=2n\pi-\frac{\pi}{2},$$

$$x_3=2n\pi+\frac{3\pi}{4},\quad x_4=2n\pi-\frac{\pi}{4}.\ (n\text{为整数})$$

这样，就不会象利用万能置换公式那样产生丢根的现象。

三　用三角形中的等式进行代换

在三角形中，角的三角函数和边之间有着密切的关系，通过这些关系，可以把角的三角函数式用边的代数式来表示．例如由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，可导出$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$．因此在只含有同一三角形的边与角的三角函数的式子中，可以通过适当的变换，把整个式子化为只含边的纯代数式．

例6　在$\triangle ABC$中，$\cos B=\dfrac{\sin A}{2\sin C}$，问此三角形的形状怎样？

解　由余弦定理得

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},\qquad (1)$$

又由正弦定理　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$　（R为外接圆半径）得

$$\frac{\sin A}{2\sin C}=\frac{\frac{a}{2R}}{2\cdot\frac{c}{2R}}=\frac{a}{2c}, \qquad (2)$$

把(1)、(2)代入题设条件，便将三角函数式转化成代数式：

$$\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a}{2c}$$

去分母并化简得$c^2=b^2$，因为$c>0$，$b>0$，即得$c=b$。

故此三角形为等腰三角形。

例7 在$\triangle ABC$中，$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1$，求证$\triangle ABC$是直角三角形。

证 直接利用余弦定理转化，形式比较麻烦，故先加以变形。得

$$(1-\sin^2A)+(1-\sin^2B)+(1-\sin^2C)=1,$$

即 $$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2.$$

作代换 $\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{b}{2R}$，$\sin C=\frac{c}{2R}$，得.

$$a^2+b^2+c^2=8R^2.$$

(R 为外接圆半径)

(1) 若$\triangle ABC$为钝角三角形

设C为钝角，则

$$a^2+b^2<c^2,\quad c<2R,$$

故有 $$a^2+b^2+c^2<2c^2<8R^2.$$

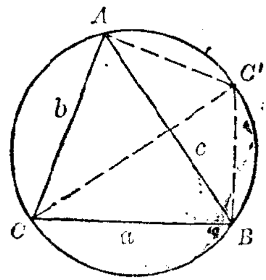


图1—1

(2) 若$\triangle ABC$为锐角三角形

作直径CC'，则$\angle AC'B$为钝角，$AC'^2+BC'^2<c^2$，于是

$$a^2+b^2+c^2>(a^2+C'B^2)+(b^2+C'A^2)$$
$$=2CC'^2=8R^2.$$

两种情况都与条件 $a^2+b^2+c^2=8R^2$ 矛盾，故$\triangle ABC$为直角三角形．实际上，设 C 为直角，则$c=2R$，$a^2+b^2=c^2$，于是 $a^2+b^2+c^2=2c^2=8R^2$，即所给条件成立．

例8 设 A、B、C为$\triangle ABC$的三内角，证明

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

这个恒等式证法很多，在第三章§6的例3，我们将给出一个几何证明．用三角方法也可直接证明如下：

$$\sin A+\sin B+\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$=2\sin\frac{180^\circ-C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$=2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)$$
$$=2\cos\frac{C}{2}\cdot2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$
$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

现在我们再介绍下面一种解法：

$$\because\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}=\sqrt{\frac{1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

（p为$\triangle ABC$的半周长）

同理 $\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$，$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$.

又∵ $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，（$S$表示$\triangle ABC$的面积，参看第二章§1）

∴ $4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$$=4\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\cdot\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

$$=4\sqrt{\frac{p^2\cdot p(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2b^2c^2}}=\frac{4ps}{abc}. \quad (1)$$

而 $\sin A+\sin B+\sin C=\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R}$

$$=\frac{a+b+c}{2R}=\frac{p}{R}, \quad (2)$$

比较(1)、(2)，只要证明 $\frac{4s}{abc}=\frac{1}{R}$或 $S=\frac{abc}{4R}$.

∵ $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\cdot\frac{c}{2R}=\frac{abc}{4R}$,

∴ $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.