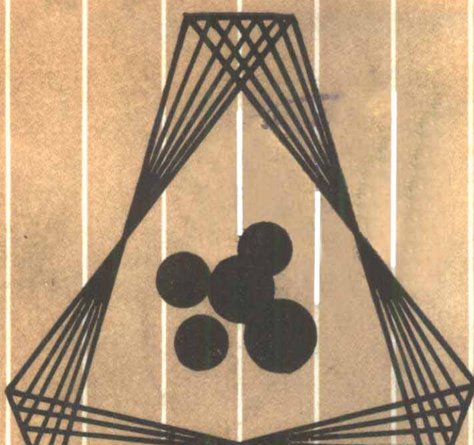
高等学校教材

主　编　王寿生
副主编　李久五

数学物理方法



西北工业大学出版社

高 等 学 校 教 材

数学物理方法

主　编　王寿生
副主编　李久五
编　者　胡舜德　杨　曙
　　　　李久五　王寿生

西北工业大学出版社

1992年6月　西安

（陕）新登字第009号

【内容简介】本书共13章。第一章至第五章介绍复变函数理论和方法，包括解析函数、复变函数的积分、级数、留数和保角映射等；第六章至第十三章介绍有关数学物理方程的内容，主要有定解问题、分离变量法、贝塞尔函数及其应用、勒让德多项式及其应用、行波法、格林函数法和积分变换法等。各章均配有适量的习题并附有答案。

本书可用作高等学校诸如物理、力学、连续介质力学、自动控制以及有关无线电电子技术等专业的教材，也可作为理工科非数学专业的工程数学教材或参考书。

高等学校教材

数学物理方法

主　　编　王寿生
副 主 编　李久五
责任编辑　刘彦信
责任校对　樊　力

*

西北工业大学出版社出版
（西安市友谊西路127号）
陕西省新华书店发行
西北工业大学出版社印刷厂印装
ISBN 7-5612-0336-5/O·40(课)

*

开本850×1168毫米 1/32　13.75印张　350千字
1992年6月第1版　　1992年6月第1次印刷
印数：1—1 500册　定价：3.60元

前　　言

自1978年以来，我们各自先后多次为西北工业大学应用物理、工程力学、空气动力学、自动控制等专业讲授“数学物理方法”课程，深深感到编写一本既符合专业需要，又具有较广泛适应性的教材是多么需要！基于这种共同的认识，于1986年携手合作编写了《数学物理方法》讲义，本书就是在该讲义试用了3年，根据教学再实践的经验，经过修改补充后编写而成的。

本书由复变函数论和数学物理方程两大部分组成。

第一章至第五章介绍复变函数的基本理论和在工程技术中常用的复变函数方法。主要内容有解析函数和柯西-黎曼条件、复变函数积分的柯西定理、柯西积分公式、高阶导数公式、泰勒级数和罗朗级数、留数及用留数计算定积分的方法、保角映射等。

第六章至第十三章介绍数学物理方程的有关内容。数学物理方程是反映自然科学及工程技术中某些物理规律的数学模型，是以描写物理现象和物理过程的偏微分方程为主要研究对象的，有着广泛的应用。本书主要介绍数学物理方程的各种定解问题以及常用的解法——分离变量法、行波法、格林函数法和积分变换法。在这些方法中对分离变量法作了比较详细的讨论。并通过分离变量法如何求解定解问题引出了贝塞尔方程和勒让德方程，进而对贝塞尔函数和勒让德多项式的一些性质以及利用这两种特殊函数来求解定解问题作了全过程的讨论。积分变换法是数学物理方程中一种常用的方法。在介绍这种方法时，系统地介绍了拉普拉斯变换和傅里叶变换的概念、基本性质以及如何利用它们求解定解问题的全过程。

本书编写过程中力求体现由浅入深、由易到难、由简到繁的

循序渐进的原则；对于概念和方法的引入和阐述，也尽量做到由具体到抽象，讲清楚其物理背景。本书主要以方法为线索展开讨论，各章之间既有相互联系，也有相对的独立性，因此各专业可以根据需要和学时的规定进行选用。

本书可供诸如物理、力学、连续介质力学、自动控制以及有关无线电电子技术等专业作为教材使用，也可供理工科非数学各专业用作工程数学教材或教学参考书。

本书共13章，编者均系西北工业大学数学系的教师。第一章至第五章由李久五编写；第六、七、十、十一章由王寿生编写；第八、九章由胡舜德编写；第十二、十三章由杨曙编写；由王寿生任主编，李久五任副主编。承蒙西安电子科技大学祝向荣详细审阅了书稿，并提出了宝贵的意见，在此深致谢意。

编　者

1990年4月

目　录

第一章 解 析 函 数

本章先介绍复数，然后介绍复变函数及其极限与连续性。在建立了导数概念后给出解析函数概念。本章中很多概念与“高等数学”课程的相应概念相似，因此可看作是其相应概念及其定理在复数域中的推广。

§1 复数及其表示法

1. 复数的定义

形如 $z=x+iy$ 的数，称为复数。其中 i 是纯虚数单位 $\sqrt{-1}$，$i^2=-1$，x 与 y 均为实数，分别称为复数 z 的实部和虚部，记为 $x=\mathrm{Re}z$，$y=\mathrm{Im}z$。一个复数 z 对应且只对应一对有序实数 x 与 y，因此也可记为 $z=(x, y)$，当虚部为零时，$z=x+i0=x$，即 z 为一实数，因而全部实数是复数的一部分；当实部为零时，$z=0+iy=iy$，这时 z 称为纯虚数。显然复数没有大小之分。

2. 复数的表示

在平面上取直角坐标系 oxy，用坐标为 (x,y) 的点 M 表示复数 $z=(x,y)$。容易看出复数与平面上的点一一对应，实数与 x 轴上的点一一对应，x 轴称为实轴；纯虚数与 y 轴上的点一一对应，y 轴称为虚轴。与复数建立这种一一对应关系后的平面称为复平面。因而，复数与复平面上的点就不需区别了。

在复平面上，也可用向量 $\overrightarrow{oM}$ 表示复数 $z=x+iy$(见图1-1)，

x,y 分别是 $\overrightarrow{oM}$ 在 x 轴和 y 轴上的投影. $\overrightarrow{oM}$ 的长度 r 称为复数 z 的模，记为 $|z|$，于是 $|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$，且 $|\mathrm{Re}z|\leqslant|z|$，$|\mathrm{Im}z|\leqslant|z|$，$|z|\leqslant|\mathrm{Re}\,z|+|\mathrm{Im}z|$，$\overrightarrow{oM}$ 与 x 轴正向的夹角称为复数 z 的幅角，记为 $\mathrm{Arg}z=\theta$。幅角的方向规定为：逆时针方向为正，顺时针方向为负.显然，一个复数的幅角有无穷多个。若 θ_1 为 z 的一个幅角，那么 $\theta=\theta_1+2k\pi$（k 为整数）就给出了复数 z 的全部幅角。通常称满足 $-\pi<\theta_0\leqslant\pi$ 的 θ_0 为复数 z 的主幅角，或幅角的主值。记为 $\arg z$。于是有 $\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi$（$k$ 为整数）。在复平面上只有 $z=0$ 的幅角是不定的。

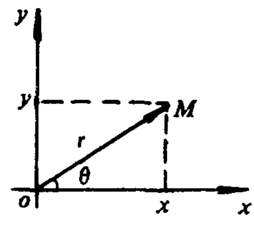


图 1-1

如果采用极坐标来表示平面上的点，引入

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta$$

则复数 z 可表示为

$$z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

其中 r，θ 分别是复数 z 的模和幅角。这是复数 z 的三角表示式。

应用欧拉（Euler）公式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

则复数 z 又可表示为

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$$

这是复数 z 的指数表示式。

3. 共轭复数

复数 $z=x-iy$ 称为复数 $z=x+iy$ 的共轭复数，记为 $\bar{z}$，即 $\bar{z}=x-iy$。容易证明

$$|\bar{z}| = |z|, \quad \mathrm{Arg}\bar{z} = -\mathrm{Arg}z, \quad \bar{\bar{z}} = z$$

4. 复数球面

我们已知复平面上的点与复数构成一一对应关系，所以可以用复平面上的点来表示复数。下面将看到复数球面上的点也可以与复数构成一一对应关系，因而也可用复数球面上的点来表示复数。

取一直径为 1 的球，使其与复平面在原点处相切（见图1-2），球面与 z 轴交于点 N（称为极点），用直线段将点 N 与球面上任意点 M' 相联结，并延长使与复平面相交于一点 M；反之，联结点 N 与复平面上任意一点 M 的线段与球面相交于点 M'。于是，球面上的所有点（除极点外）与复平面的所有点就建立了一一对应关系。因此，可用球面上的点表示复数，称此球面为复数球面。

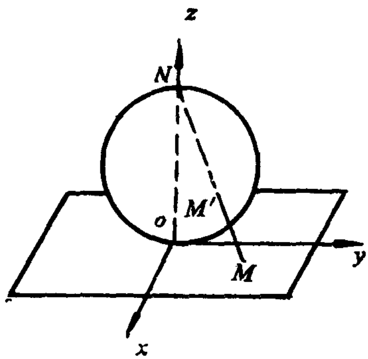


图 1-2

从图 1-2 中可以看到，当复平面上的点 M 远离原点，即复数的模越大时，在复数球面上的对应点 M' 就越靠近点 N，因此，点 N 可以看作是对应于复平面上一个模为无穷大的点，记为 $z=\infty$，称为无穷远点。包含无穷远点的复平面称为扩充复平面。这样扩充复平面上的点与复数球面上的点构成一一对应，因此复平面上的无穷远点只有一个。

无穷远点 ∞ 的幅角、实部与虚部都没有意义，无穷远点的模可以大于任何正数，记为 $|\infty| = +\infty$。

§2 复数的运算

两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 与 $z_2 = x_2 + iy_2$，当且仅当 $x_1 = x_2$，$y_1 = y_2$ 时，才称z_1 与 z_2 相等，记为 $z_1 = z_2$。

1. 复数的加法和减法

复数 $z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ 称为复数 z_1，z_2 的和。而 $z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$ 称为复数 z_1，z_2 的差．

如果用向量$\overrightarrow{oM_1}$，$\overrightarrow{oM_2}$ 分别表示复数 z_1，z_2，（见图 1-3），则复数加、减法与向量的加、减法一致。因此，复数的加法满足交换律和结合律。按平行四边形法则，向量$\overrightarrow{oM}$ 表示复数 $z_1 + z_2$，由于

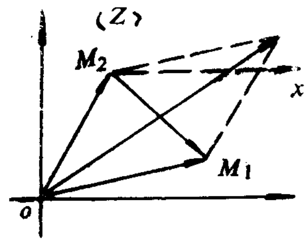


图 1-3

$$\overrightarrow{M_2M_1} = \overrightarrow{oM_1} - \overrightarrow{oM_2}$$
$$= (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)$$
$$= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

故向量$\overrightarrow{M_2M_1}$ 表示复数 $z_1 - z_2$。$\overrightarrow{M_2M_1}$的长为 $|z_1 - z_2|$，也就是复平面上复数 z_1，z_2 之间的距离．过 M_2 作 M_2x' 平行于 x 轴，那么$\overrightarrow{M_2M_1}$ 与M_2x' 之间的夹角就是 $z_1 - z_2$ 的幅角。

由图 1-3，容易得出不等式

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|, \qquad |z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||$$

以上所讨论的是两个有限复数的和与差的运算。如果其中一个或二个是无限复数（即无穷远点）时，定义它们的和、差的运算为：

设 z 为有限复数，则$\infty + z = z + \infty = \infty$；$\infty - z = z - \infty = \infty$．同时规定 $\infty \pm \infty$ 没有意义。

2. 复数的乘法

$z=z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$ 称为复数 z_1，z_2 的积，容易验证，复数的乘法满足交换律、结合律和加法与乘法的分配律。

这样定义的复数乘法，可按代数多项式的乘法规则相乘，且$i^2=-1$。

按照定义有 $z\bar{z}=|z|^2$。

再设 $$z_1=x_1+iy_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_2),$$
$$z_2=x_2+iy_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

于是 $$z_1z_2=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_2)r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$
$$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

因此得

$|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1||z_2|$， $\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$ 这表明：两个复数的积的模等于模的积，积的幅角等于幅角的和。

规定：$\infty\cdot z=z\cdot\infty=\infty$， $0\cdot\infty$没有意义。

3. 复数的除法

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\qquad(z_2\neq0)$$

称为复数 z_1与 z_2 的商。

利用复数的指数表示式作除法，可得

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

因此得

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{r_1}{r_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|},\ \mathrm{Arg}=\frac{z_1}{z_2}=\theta_1-\theta_2=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2$$

这表明：两个复数的商的模等于模的商，商的幅角等于幅角的差。

规定 $\frac{z}{0}=\infty$ $(z\neq 0)$，$\frac{z}{\infty}=0$，$(z\neq\infty)$；并规定$\frac{\infty}{\infty}$，$\frac{0}{0}$没有意义。

由于复数幅角的多值性，上述两个关于幅角的等式应按多值性去理解。

4. 复数的乘方

n 个相同的复数 z 相乘记为 z^n，称为复数 z 的乘方。即

$$z^n=(x+iy)^n=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=(re^{i\theta})^n$$
$$=r^ne^{in\theta}=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

于是有

$$|z^n|=|z|^n,\quad \mathrm{Arg}z^n=n\mathrm{Arg}z$$

当 $r=1$ 时有

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

称为德莫弗 (De.Moivre) 公式。

5. 复数的开方

设有复数 w 和 z。如果 $w^n=z$（n 为正整数），则称 w 为 z 的 n 次方根（或 z 开 n 次方），记为 $w=\sqrt[n]{z}$。

令 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$w=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$，则由复数的乘方计算公式和复数相等的法则，得

$$\rho^n=r,\quad n\varphi=\theta+2k\pi\quad(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

于是 $$\rho=\sqrt[n]{r},\quad \varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n}\quad(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

从而 $$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

其中$\sqrt[n]{r}$为 r 的算术根，$k=0,1,2,\cdots,n-1$。

因为 $\cos\varphi$ 和 $\sin\varphi$ 都以 2π 为周期，所以当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时，可得到 w 的 n 个不同的值，当 k 取其它的整数时，这些值又重复出现。这样，复数开 n 次方后，就能得到 n 个值，这 n 个值的模相等，而相邻两值的幅角均相差 $\frac{2\pi}{n}$。

例 1 把下列各复数表示为三角形式。

(1) $-2-2\sqrt{3}i$，　(2) $1-\sqrt{3}i$

解 (1) 因为 $|-2-2\sqrt{3}i|=4$，$-2-2\sqrt{3}i$ 在第三象限，其幅角为

$$\arg(-2-2\sqrt{3}i)=\operatorname{arctg}\frac{-2\sqrt{3}}{-2}-\pi$$

$$=-\frac{2}{3}\pi$$

所以 $$-2-2\sqrt{3}i=4\left[\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right]$$

(2) 因为 $|1-\sqrt{3}i|=2$，$1-\sqrt{3}i$ 在第四象限，其幅角为 $\arg(1-\sqrt{3}i)=\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{3}}{1}=-\operatorname{arctg}\sqrt{3}=-\frac{\pi}{3}$，

所以

$$1-\sqrt{3}i=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

例 2 求 $z=\frac{i}{(i-1)(i-2)(i-3)}$ 的实部和虚部。

解 因为 $$\frac{i}{(i-1)(i-2)(i-3)}=\frac{-i}{(1-i)(2-i)(3-i)}$$

$$=\frac{-i(1+i)(2+i)(3+i)}{(1-i)(1+i)(2-i)(2+i)(3-i)(3+i)}$$

$$=\frac{-10i^2}{(1+1)(2^2+1)(3^2+1)}=\frac{1}{10}$$

所以 $\operatorname{Re} z=\frac{1}{10}$, $\operatorname{Im} z=0$

例 3 证明 $\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|$

证 设 $z=x+iy$，则

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}\leqslant\sqrt{x^2+2|x||y|+y^2}=|x|+|y|$$

即 $|z|\leqslant|x|+|y|$

由 $(|x|-|y|)^2\geqslant0$，$x^2+y^2\geqslant2|x||y|$，有

$$2(x^2+y^2)\geqslant x^2+2|x||y|+y^2=(|x|+|y|)^2$$

所以 $x^2+y^2\geqslant\frac{1}{2}(|x|+|y|)^2$

即 $|z|\geqslant\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}$

故 $\frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|$

例 4 求 $\sqrt[4]{1+i}$

解 因为 $|1+i|=\sqrt{2}$，$\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

根据复数开方运算

$$\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)$$

$$(k=0,1,2,3)$$

即 $(\sqrt[4]{1+i})_0=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right)$

$$(\sqrt[4]{1+i})_1=\sqrt[8]{2}\left(\sin\frac{9}{16}\pi+i\sin\frac{9}{16}\pi\right)$$