北京大学数学丛书

微分几何讲义

（第二版）

陈省身 陈维桓 著

北京大学出版社
·北 京·

图书在版编目(CIP)数据

微分几何讲义/陈省身,陈维桓著.—2版.—北京:北京大学出版社,2001.10

(北京大学数学丛书)

ISBN 7-301-05151-4

Ⅰ.微… Ⅱ.①陈… ②陈… Ⅲ.微分几何 Ⅳ.O186.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第049415号

书　　名:微分几何讲义(第二版)
著作责任者:陈省身　陈维桓　著
责 任 编 辑:邱淑清
标 准 书 号:ISBN 7-301-05151-4/O·512
出　版　者:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址:http://cbs.pku.edu.cn
电　　话:出版部 62752015　发行部 62754140　理科编辑部 62752021
电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者:北京大学印刷厂
发　行　者:北京大学出版社
经　销　者:新华书店
850毫米×1168毫米　32开本　12.375印张　305千字
1983年12月第一版　2001年10月第二版
2001年10月第五次印刷
印　　数:31 001~36 000册
定　　价:21.00元

第二版序

本版与初版不同处是增添了第八章 Finsler 几何。这其实是 1854 年 Riemann 原来的提议。他试了四次微分式的四次根，发现计算很繁，便限于二次微分式，即现在熟知的黎曼几何。

近百年来，黎曼几何是微分几何的主要内容，发展广泛。自然有推广的需要。

我想，最自然的推广是回到 Riemann 原来的定义，现在叫做“Finsler 几何”。这就是变分学，几百年来都是数学的中心课题。

Finsler 的论文发表在 1918 年。第一步研究是 Finsler 几何的局部性质。这并不简单：Riemann 没有做，而 Cartan 的联络坚持了内积不变的性质，因之陷入复杂的计算。本版书中引进了我于 1948 年所定的联络。我想，这是 Finsler 几何的适当工具，值得费点时间去了解。

陈省身

2001 年 6 月 12 日于

天津南开数学研究所

微分几何的过去与未来(代序)

微分几何的出发点是微积分：一条曲线的切线和微分是同一个概念。同样，一条封闭曲线所包围的面积的理论就是积分论。“微积分在几何上的应用”演变成曲线论及曲面论。微分几何初期作出重要的贡献的，当推L. Euler (1707～1783)，G. Monge (1746～1818)。

微分几何的始祖是 C. F. Gauss (1777～1855)。他的曲面论建立了曲面的第一基本式所奠定的几何，并把欧氏几何推广到曲面上“弯曲”的几何。B. Riemann (1826～1866)在 1854 年所做的有名的演讲把这个理论推广到 n 维空间。黎曼几何就在此年出生。

黎曼的演讲直到 1868 年他死后才发表，当即引起许多新工作来处理和推展他的新几何。主要的作者包括 E. Beltrami，E. B. Christoffel，R. Lipschitz；他们的论文都发表在 1870 年左右。Christoffel 是一位开拓的大师。他一度在瑞士的苏黎士任教授，因此影响及于意大利的数学家，有 L. Bianchi 及 T. Ricci。前者是第一个用“微分几何”作书名的(*Lezioni di Geometria Differenziale*, Pisa，1893)；后者是“张量分析”的始祖。

黎曼几何之大受重视，由于爱因斯坦之广义相对论。爱氏把引力现象释成黎曼空间的曲率性质，因之，物理现象变成几何现象。微分几何的了解遂为理论物理学者所必需。

同在 1870 年 Felix Klein 发表了他的 Erlanger Programm。这个计划把几何学定为一个变换群下的不变性质。视变换群的选择，我们有欧氏或非欧几何学、投影几何学、仿射几何学等等。这些空间内的支流形的研究成为相当的微分几何学。20 世纪初期投影微分几何的研究相当活跃，领导者为美国的 E. J. Wilczynski 及意大利的 G. Fubini，苏步青教授作过重大的贡献并指导了很多学生。

在仿射微分几何作决定性工作的当推 W. Blaschke。

把两种观点融合的是 Elie Cartan (1869～1951)。他的广义空间把联络作为主要的几何观念。他建立的外微分和他在李群的工作，是近代微分几何的两大柱石。

微分几何的主要问题是整体性的，即研究空间或流形的整个的性质，尤其是局部性质与整体性质的关系。Gauss-Bonnet 公式(见第五章 § 4)就是一个例子。

要研究整个流形，流形论的基础便成为必要。流形内的坐标是局部的，本身没有意义；流形研究的主要目的是经过坐标卡变换而保持不变的性质(如切矢量、微分式等)。这是与一般数学不同的地方。这些观念经过几十年的演变，渐成定型。将来数学研究的对象，必然是流形；传统的实数或复数空间只是局部的情形(虽然在许多情况下它会是最重要的情形)。所以我相信本书的内容会对一般数学工作者有用。

讲到微分几何的未来，当然预测是很困难的。19 世纪的深刻的结果(如单复变函数论)，多半是单元的。本世纪内高维流形的发展是辉煌的。但整个宝藏发掘未及十一，可以发展的方向，多不胜数。数学的前途无量是可以预卜的。

这份讲义是我在 1980 年春季在北京大学的讲课记录，由陈维桓整理而成的。因时间限制，内容甚不齐备，错误亦难免。北大同人尤其是段学复教授的支持和江泽涵教授的关心，是这个课的主要动力。吴光磊教授在讲义整理过程中提供了许多宝贵意见。吴大任教授曾读过书稿，并提了不少改进的意见。田畴同志也读过书稿，并特为讲义翻译了附录一——“欧氏空间中的曲线和曲面”。此外，我在北大讲课时，章学诚、尤承业、刘旺金、韩念国、周作领、刘应明、孙振祖、李安民和陈维桓等同志为记录和辅导做了不少工作。今天很高兴有机会向这些同志们说一声“谢谢”。

陈省身

1982 年 4 月 7 日于美国加州

说　明

此丛书是以数学、计算数学、概率统计及有关专业的高年级学生、研究生、青年教师及数学研究工作者为读者对象的出版物. 丛书特点是内容新颖，力图反映现代数学的新成就；叙述精练，约相当于一学期周学时为 3 的研究生课程的取材. 我们编辑出版此丛书的主要目的是为了适应我们国家培养研究生的需要，同时，又可作为数学及有关系科高年级选修课程的参考书，为提高本科生的教学质量贡献一份力量.

我们诚恳地希望：广大读者对于书目的选择，内容的取材提出宝贵意见，作为我们今后出版或再版时的参考.

《北京大学数学丛书》编委会

一九八一年元月

目　录

第一章 微分流形

§1 微分流形的定义

流形的概念是欧氏空间的推广. 粗略地说,流形在每一点的近傍和欧氏空间的一个开集是同胚的,因此在每一点的近傍可以引进局部坐标系. 流形正是一块块"欧氏空间"粘起来的结果.

我们用 $\boldsymbol{R}$ 表示实数域. 设

$$\boldsymbol{R}^m = \{x = (x^1, \cdots, x^m) \mid x^i \in \boldsymbol{R}, 1 \leqslant i \leqslant m\}, \tag{1.1}$$

即 $\boldsymbol{R}^m$ 是全体有序的 m 个实数所形成的数组的集合,实数 x^i 称为点 $x \in \boldsymbol{R}^m$ 的第 i 个坐标. 对于任意的 $x, y \in \boldsymbol{R}^m, \alpha \in \boldsymbol{R}$,命

$$\begin{cases} (x + y)^i = x^i + y^i, \\ (\alpha x)^i = \alpha x^i; \end{cases} \tag{1.2}$$

这样就在 $\boldsymbol{R}^m$ 中定义了加法和对实数的乘法,使 $\boldsymbol{R}^m$ 成为实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的 m 维矢量空间.

空间 $\boldsymbol{R}^m$ 除上述线性构造外,还有典型的拓扑构造. 对 $x, y \in \boldsymbol{R}^m$,命

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x^i - y^i)^2}. \tag{1.3}$$

容易验证,函数 $d(x,y)$ 满足下面三个条件:

(1) $d(x,y) \geqslant 0$,且等号只有 $x=y$ 时成立;

(2) $d(x,y)=d(y,x)$;

(3) 对任意的 $x, y, z \in \boldsymbol{R}^m$,有不等式

$$d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z).$$

所以 $d(x,y)$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的距离函数,使 $\boldsymbol{R}^m$ 成为度量空间. 作为度量

空间，$\boldsymbol{R}^m$ 有自然的拓扑结构[①]：以开球 $B_{x;r}=\{y\in\boldsymbol{R}^m \mid d(x,y)<r\}$ $(x\in\boldsymbol{R}^m, r>0)$ 的并集为开集. 以(1.3)式为距离函数的 m 维矢量空间 $\boldsymbol{R}^m$ 称为 m 维欧氏空间.

设 f 是定义在开集 $U\subset\boldsymbol{R}^m$ 上的实函数，如果 f 的所有直到 r 阶的偏导数都存在并且连续，则称 f 是 r 次可微的，或称 f 是 C^r 的，这里 r 可以是所有的正整数. 如果 f 有任意阶的连续偏导数，则称 f 是 C^∞ 的. 如果 f 是解析的，也就是 f 在 U 的每一点的一个邻域内能表成收敛的幂级数，则记 f 是 C^ω 的.

定义 1.1 设 M 是 Hausdorff 空间. 若对任意一点 $x\in M$，都有 x 在 M 中的一个邻域 U 同胚于 m 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^m$ 的一个开集，则称 M 是一个 m 维**流形**(或**拓扑流形**).

设定义 1.1 中提到的同胚映射是 $\varphi_U: U\to\varphi_U(U)$，这里 $\varphi_U(U)$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开集，则称 (U,φ_U) 是 M 的一个坐标卡. 因为 φ_U 是同胚，对任意一点 $y\in U$，可以把 $\varphi_U(y)\in\boldsymbol{R}^m$ 的坐标定义为 y 的坐标，即命

$$u^i=(\varphi_U(y))^i,\quad y\in U,\quad i=1,\cdots,m, \tag{1.4}$$

我们称 $u^i(1\leqslant i\leqslant m)$ 为点 $y\in U$ 的局部坐标.

设 (U,φ_U)，和 (V,φ_V) 是流形 M 的两个坐标卡，若 $U\cap V\neq\varnothing$，则 $\varphi_U(U\cap V)$ 和 $\varphi_V(U\cap V)$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中两个非空的开集，并且映射

$$\varphi_V\circ\varphi_U^{-1}|_{\varphi_U(U\cap V)}: \varphi_U(U\cap V)\to\varphi_V(U\cap V)$$

建立了这两个开集之间的同胚，其逆映射就是 $\varphi_U\circ\ \varphi_V^{-1}|_{\varphi_V(U\cap V)}$.

因它们是从欧氏空间的一个开集到另一个开集的映射，所以用坐标表示时，$\varphi_V\circ\varphi_U^{-1}$ 和 $\varphi_U\circ\varphi_V^{-1}$ 分别表为欧氏空间的开集上的 m 个实函数(见图 1)：

$$\begin{aligned} y^i=f^i(x^1,\cdots,x^m)&=(\varphi_V\circ\varphi_U^{-1}(x^1,\cdots,x^m))^i, \\ (x^1,\cdots,x^m)&\in\varphi_U(U\cap V); \end{aligned} \tag{1.5}$$

---

① 关于拓扑学的基本概念，可看：江泽涵著《拓扑学引论》，上海科学技术出版社，1978.

$$x^i = g^i(y^1, \cdots, y^m) = (\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}(y^1, \cdots, y^m))^i,$$
$$(y^1, \cdots, y^m) \in \varphi_V(U \cap V). \tag{1.6}$$

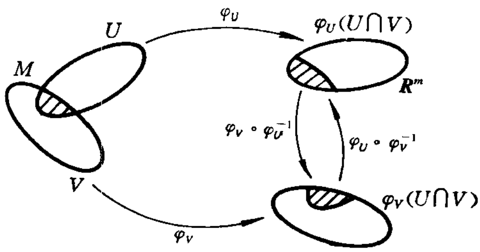

图 1

因为 $\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}$ 和 $\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}$ 是互逆的同胚映射，所以 f^i 和 g^i 都是连续函数，并且

$$\begin{cases} f^i(g^1(y^1, \cdots, y^m), \cdots, g^m(y^1, \cdots, y^m)) = y^i, \\ g^i(f^1(x^1, \cdots, x^m), \cdots, f^m(x^1, \cdots, x^m)) = x^i. \end{cases} \tag{1.7}$$

我们称两个坐标卡 (U, φ_U) 和 (V, φ_V) 是 C^r-相容的，如果 $U \cap V = \varnothing$，或者在 $U \cap V \neq \varnothing$ 时坐标变换函数 $f^i(x^1, \cdots, x^m)$ 和 $g^i(y^1, \cdots, y^m)$ 都是 C^r 的.

定义 1.2 设 M 是一个 m 维流形. 如果在 M 上给定了一个坐标卡集 $\mathscr{A} = \{(U, \varphi_U), (V, \varphi_V), (W, \varphi_W), \cdots\}$，满足下列条件，则称 $\mathscr{A}$ 是 M 的一个 **C^r 微分结构**：

(1) $\{U, V, W, \cdots\}$ 是 M 的一个开覆盖；

(2) 属于 $\mathscr{A}$ 的任意两个坐标卡是 C^r-相容的；

(3) $\mathscr{A}$ 是极大的，即：对于 M 的任意一个坐标卡 $(\widetilde{U}, \varphi_{\widetilde{U}})$ 若与属于 $\mathscr{A}$ 的每一个坐标卡都是 C^r-相容的，则它自身必属于 $\mathscr{A}$.

若在 M 上给定了一个 C^r-微分结构，则称 M 是一个 **C^r-微分流形**. 属于给定的微分结构的坐标卡称为微分流形 M 的容许的坐标卡. 今后谈到微分流形 M 上点 p 附近的局部坐标系都是指包含 p 点的容许坐标卡给出的坐标系.

注记 1 在定义 1.2 中条件(1)和(2)是基本的.不难证明,若坐标卡集 $\mathscr{A}'$ 满足条件(1)和(2),则对任意的正整数 $s,0<s\leqslant r$,存在唯一的一个 C^s-微分结构 $\mathscr{A}$,使得 $\mathscr{A}'\subset\mathscr{A}$.实际上,如果用 $\mathscr{A}$ 表示与 $\mathscr{A}'$ 中的坐标卡都是 C^s-相容的坐标卡的集合,则 $\mathscr{A}$ 是一个 C^s-微分结构,它是由 $\mathscr{A}'$ 唯一确定的.所以在构造微分流形时,只要指出它的一个相容的坐标覆盖就可以了.

注记 2 在本书中,我们还假定流形 M 是满足第二可数公理的拓扑空间.即:M 有可数的拓扑基(见第 1 页脚注).

注记 3 若在 M 上确定了一个 C^∞-微分结构,则简称 M 为**光滑流形**;若在 M 上给定了一个 C^ω-微分结构,则称 M 为**解析流形**.本书主要讨论光滑流形;在不致引起混淆时,常把光滑流形简称为流形.

例 1 $M=\boldsymbol{R}^m$,取 $U=M$,φ_U 是恒同映射,则$\{(U,\varphi_U)\}$是 $\boldsymbol{R}^m$ 的一个坐标覆盖,由此确定了 $\boldsymbol{R}^m$ 的光滑流形结构,称为 $\boldsymbol{R}^m$ 的标准微分结构.

例 2 m 维单位球面

$$S^m=\{x\in\boldsymbol{R}^{m+1}\mid(x^1)^2+\cdots+(x^{m+1})^2=1\}.$$

以 $m=1$ 为例,取如下的四个坐标卡:

$$\begin{cases}U_1\{x\in S^1\mid x^2>0\}, & \varphi_{U_1}(x)=x^1,\\ U_2\{x\in S^1\mid x^2<0\}, & \varphi_{U_2}(x)=x^1,\\ V_1\{x\in S^1\mid x^1>0\}, & \varphi_{V_1}(x)=x^2,\\ V_2\{x\in S^1\mid x^1<0\}, & \varphi_{V_2}(x)=x^2.\end{cases}\tag{1.8}$$

很清楚,$\{U_1,U_2,V_1,V_2\}$构成 S^1 的一个开覆盖.在交集 $U_1\cap V_2$ 上有(见图 2)

$$\begin{cases}x^2=\sqrt{1-(x^1)^2},\\ x^1=-\sqrt{1-(x^2)^2},\end{cases}\quad x^1<0,\ x^2>0,\tag{1.9}$$

它们都是 C^∞-函数,所以(U_1,φ_{U_1})和(V_2,φ_{V_2})是 C^∞-相容的.同理可证,其余的任意两个坐标卡也都是 C^∞-相容的.因此,上面给出

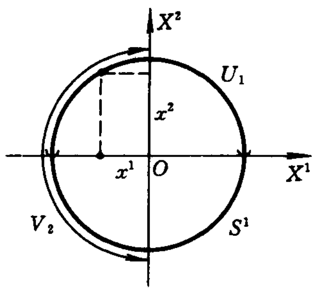

图 2

的坐标卡使 S^1 成为一维的光滑流形.

当 $m>1$ 时,S^m 上的光滑结构可以类似地定义.

例 3 m 维射影空间 P^m.

在 $\boldsymbol{R}^{m+1}-\{0\}$中定义关系～如下：设 $x,y\in\boldsymbol{R}^{m+1}-\{0\}$,$x\sim y$ 当且仅当存在非零实数 α,使 $x=\alpha y$. 显然,～是等价关系. 对于 $x\in\boldsymbol{R}^{m+1}-\{0\}$,$x$ 的"～"等价类记作

$$[x]=[x^1,\cdots,x^{m+1}].$$

所谓 m 维射影空间 P^m 就是指商空间

$$P^m=(\boldsymbol{R}^{m+1}-\{0\})/\sim=\{[x]\,|\,x\in\boldsymbol{R}^{m+1}-\{0\}\}. \tag{1.10}$$

数组$(x^1,\cdots,x^{m+1})$称为点$[x]$的齐次坐标,它被$[x]$确定到差一个非零实因子. 很明显,P^m 也是 $\boldsymbol{R}^{m+1}$中所有过原点的直线构成的空间.

令

$$\begin{cases}U_i=\{[x^1,\cdots,x^{m+1}]\,|\,x^i\neq 0\},\\ \varphi_i([x])=({}_i\xi_1,\cdots,{}_i\xi_{i-1},{}_i\xi_{i+1},\cdots,{}_i\xi_{m+1}),\end{cases} \tag{1.11}$$

其中 $1\leqslant i\leqslant m+1$,${}_i\xi_h=x^h/x^i$ $(h\neq i)$. 显然,$\{U_i,1\leqslant i\leqslant m+1\}$构成 P^m 的开覆盖. 在 $U_i\cap U_j$ $(i\neq j)$上有坐标变换

$$\begin{cases}{}_j\xi_h=\dfrac{{}_i\xi_h}{{}_i\xi_j} \quad (h\neq i,j),\\ {}_j\xi_i=\dfrac{1}{{}_i\xi_j}.\end{cases} \tag{1.12}$$

所以$\{(U_i,\varphi_i)\}_{1\leqslant i\leqslant m+1}$给出了$P^m$的光滑结构.

注记 上面三个例子给出的坐标覆盖都是C^ω-相容的;所以,在实际上它们分别确定了$\boldsymbol{R}^m$,S^m和P^m作为解析流形的结构.

例4 Milnor怪球.

在同一个拓扑流形上可能有不同的微分结构. J. Milnor在1956年给出一个著名的例子(见*Annals of Math.*, **64**(1956), 399~405),指出:在同胚的拓扑流形上确实存在彼此不同构的光滑流形结构(见定义1.3下面的注记),因此微分结构有独立于拓扑结构的意义.关于Milnor怪球的完全的叙述和证明已超出本书的范围,这里只作简要的说明.

在S^4上取两个对径点A,B.命

$$U_1=S^4-\{A\},\quad U_2=S^4-\{B\},\tag{1.13}$$

则U_1和U_2构成了S^4的开覆盖.现在要把平凡的球丛$U_1\times S^3$与$U_2\times S^3$粘起来得到以S^4为底空间的三维球丛Σ^7.

在球极投影下,U_1和U_2分别和$\boldsymbol{R}^4$是同胚的,而$U_1\cap U_2$与$\boldsymbol{R}^4-\{0\}$同胚.把$\boldsymbol{R}^4-\{0\}$中的元素记成四元数.取一奇数k,使$k^2-1\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 7)$.考虑映射$\tau$:$(\boldsymbol{R}^4-\{0\})\times S^3\to(\boldsymbol{R}^4-\{0\})\times S^3$,使得对$(u,v)\in(\boldsymbol{R}^4-\{0\})\times S^3$,有

$$\tau(u,v)=\left(\frac{u}{\|u\|^2},\frac{u^hvu^j}{\|u\|}\right),\tag{1.14}$$

其中

$$h=\frac{k+1}{2},\quad j=\frac{1-k}{2},\tag{1.15}$$

且(1.14)式中的乘法是四元数乘法,$\|\ \ \|$是四元数的模.显然,映射τ是光滑的.我们把$U_1\times S^3$和$U_2\times S^3$通过τ粘起来.可以证明,这样得到的Σ^7与7维单位球面S^7同胚,但是其微分构造与S^7的典型微分结构(例2)不相同.

在光滑流形上,光滑函数的概念是有意义的.设f是定义在m维光滑流形M上的实函数.若$p\in M$,(U,φ_U)是包含p点的容许

坐标卡，那么 $f\circ\varphi_U^{-1}$ 是定义在欧氏空间 $\boldsymbol{R}^m$ 的开集 $\varphi_U(U)$ 上的实函数. 如果函数 $f\circ\varphi_U^{-1}$ 在点 $\varphi_U(p)\in\boldsymbol{R}^m$ 是 C^∞ 的，即 $f\circ\varphi_U^{-1}$ 在点 $\varphi_U(p)$ 的一个邻域内有连续的任意多次的偏导数，则称函数 f 在点 $p\in M$ 是 C^∞ 的.

函数 f 在点 p 的可微性与包含 p 的容许坐标卡的选取是无关的. 实际上，若有另一个包含 p 的容许坐标卡 (V,φ_V)，则 $U\cap V\neq\varnothing$，且

$$f\circ\varphi_V^{-1}=(f\circ\varphi_U^{-1})\circ(\varphi_U\circ\varphi_V^{-1});$$

因为 $\varphi_U\circ\varphi_V^{-1}$ 是光滑的，所以 $f\circ\varphi_V^{-1}$ 和 $f\circ\varphi_U^{-1}$ 在相应点都是可微的.

如果实函数 f 在 M 上处处是 C^∞ 的，则称 f 是 M 上的 C^∞-函数，或称 f 是 M 上的光滑函数. M 上全体光滑函数的集合记作 $C^\infty(M)$.

光滑函数是光滑流形之间的光滑映射的重要特例.

定义 1.3 设 $f: M\to N$ 是从光滑流形 M 到 N 的一个连续映射，$\dim M=m$，$\dim N=n$. 若在一点 $p\in M$，存在点 p 的容许坐标卡 (U,φ_U) 和点 $f(p)$ 的容许坐标卡 (V,ψ_V)，使得映射

$$\psi_V\circ f\circ\varphi_U^{-1}: \varphi_U(U)\to\psi_V(V)$$

在点 $\varphi_U(p)$ 是 C^∞ 的，则称映射 f 在点 p 是 C^∞ 的. 若映射 f 在 M 的每一点 p 都是 C^∞ 的，则称 f 是从 M 到 N 的**光滑映射**.

注记 因为 $\psi_V\circ f\circ\varphi_U^{-1}$ 是从开集 $\varphi_U(U)\subset\boldsymbol{R}^m$ 到开集 $\psi_V(V)\subset\boldsymbol{R}^n$ 的连续映射，所以它在点 $\varphi_U(p)$ 的可微性是已有定义的. f 在点 p 的可微性显然与容许坐标卡 (U,φ_U) 和 (V,ψ_V) 的选取无关.

如果 $\dim M=\dim N$，并且 $f: M\to N$ 是同胚. 当 f 和 f^{-1} 都是光滑映射的，则我们称 $f: M\to N$ 是可微同胚（如果光滑流形 M 和 N 是可微同胚的，则称 M 和 N 的光滑流形结构是同构的）. 上面所举的 Milnor 怪球 Σ^7 与 S^7 是拓扑同胚的，但是它们不是可微同

胚的，即它们的光滑流形结构不同构.

光滑映射的另一个重要特例是流形上的参数曲线. 取 $\boldsymbol{R}^1$ 中的一个开区间 $M=(a,b)$，则从 M 到流形 N 的光滑映射 $f:(a,b)\to N$ 称为流形 N 上的一条参数曲线.

假定 M,N 分别是 m 维和 n 维光滑流形，其微分结构分别是 $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$，$\{(V_\beta,\psi_\beta)\}_{\beta\in B}$. 用下述方法可以构造一个新的 $m+n$ 维光滑流形 $M\times N$：首先，$\{U_\alpha\times V_\beta\}_{\alpha\in A,\beta\in B}$ 构成拓扑积空间 $M\times N$ 的开覆盖；其次，定义映射 $\varphi_\alpha\times\psi_\beta\colon U_\alpha\times V_\beta\to\boldsymbol{R}^{m+n}$，使

$$\varphi_\alpha\times\psi_\beta(p,q)=(\varphi_\alpha(p),\psi_\beta(q)),\quad (p,q)\in U_\alpha\times V_\beta. \tag{1.16}$$

这样，$(U_\alpha\times V_\beta,\varphi_\alpha\times\psi_\beta)$ 是 $M\times N$ 的一个坐标卡. 容易证明，如此得到的坐标卡都是 C^∞-相容的，因此它们决定了 $M\times N$ 上的光滑流形结构.

定义 1.4 拓扑积空间 $M\times N$ 上由 C^∞-相容的坐标覆盖

$$\{(U_\alpha\times V_\beta,\varphi_\alpha\times\psi_\beta)\}_{\alpha\in A,\beta\in B}$$

决定的光滑流形结构使 $M\times N$ 成为 $m+n$ 维光滑流形. 该流形称为 M 和 N 的**积流形**.

积流形 $M\times N$ 到各因子的自然投影记作

$$\pi_1\colon M\times N\to M,\quad \pi_2\colon M\times N\to N,$$

即对于 $(x,y)\in M\times N$ 有

$$\pi_1(x,y)=x,\quad \pi_2(x,y)=y.$$

显然，它们都是光滑映射.

§2 切空间

正则的曲线和曲面在每一点分别有切线和切平面的概念. 同样，在拓扑流形上给定一个微分结构之后，在每一点的附近可以用线性空间来“近似”. 确切地说，可以引进切空间和余切空间等概念. 我们从余切空间的概念着手.