

深层地下热水运移的 三维数值模拟

周 训 陈明佑 李慈君 著



地质出版社

深层地下热水运移的三维数值模拟

周 训 陈明佑 李慈君 著

地 质 出 版 社

· 北 京 ·

470708

内 容 简 介

本书针对深层地下热水的特点,建立了同时描述深层地下热水流动和热量运移的三维非稳定流数学模型,并介绍其数值解法。本书以天津市深层基岩热水系统作为深层地下热水运移三维数值模拟的研究对象,系统阐述天津市基岩地热系统的地质背景、地温场特征以及地下热水的分布、开采动态和水化学特征,详细介绍基岩热水系统的数值模拟和预测计算,提供了一个同时描述深层地下热水系统压力场和温度场随时间和空间变化的研究实例。

本书可供从事水文地质、环境地质、水资源、地热资源等领域的科技人员、管理决策者和大专院校的师生参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

深层地下热水运移的三维数值模拟/周训,陈明佑,李慈君著. -北京:地质出版社,2001.4
ISBN 7-116-03397-1

I. 深… II. ①周…②陈…③李… III. 数学模型-应用-地下热水-地下水动态-研究 IV. P314.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 12346 号

地质出版社出版发行

(100083 北京海淀区学院路 29 号)

责任编辑:屠涌泉 邱 培

责任校对:李 玲

*

北京地质印刷厂印刷 新华书店总店科技发行所经销

开本:787×1092 1/16 印张:5 字数:115 千字

2001 年 4 月北京第 1 版·2001 年 4 月北京第 1 次印刷

印数:1—450 册 定价:15.00 元

ISBN 7-116-03397-1
P·2185

(凡购买地质出版社的图书,如有缺页、倒页、脱页者,本社发行处负责调换)

前 言

地下热水既是水资源又是能源。开发利用地下热水资源具有重要的经济效益、社会效益和环境效益,因而受到广泛重视。国内外许多学者对地下热水的分布、形成、资源评价和开发利用进行了大量的研究,取得了很大的进展。在地下热水资源评价和模拟计算方面,随着浅层常温地下水的资源评价及模拟模型的理论和方法的发展和日趋成熟,推动了地下热水相应理论和方法的发展。地热资源评价的研究,已从计算地热资源总量发展到研究地下热水的运移,从单一描述地下热水的运动或热量的运移到同时描述地下热水水流和热量运移,从一维模型到二维模型再到三维模型,从稳定流模型到非稳定流模型,逐渐趋于深入。

地下热水,特别是深层地下热水,属于特殊类型的地下水。由于热储层埋深大,井底压力随深度变化大;水温高且变化显著,水的密度随温度的变化而改变;地下热水在运移过程中与围岩发生热交换并受到来自深部热源的加温;通过回灌冷水到热储层中又获得新的地热资源,致使地下热水系统的压力场和温度场变化复杂。在研究这样复杂的地下水-热系统时,应采用三维非稳定流数学模型,同时描述压力场和温度场的时、空变化。在以往的文献报道中,有关数学模型的理论推导探讨得较多,而在实际应用方面对热水水流的模拟较为容易,对温度场的模拟研究仍然是薄弱环节。这是因为影响温度场的因素较多,有关温度场的野外观测资料也很难系统地获取。因而计算地下热水系统温度场变化的实例并不多见。

本书以天津市深层基岩热水系统作为深层地下热水运移三维数值模拟的研究对象。首先建立适合于描述深层地下热水运移的三维非稳定流数学模型,并探讨其数值解法,在阐述天津市地质背景、地温场基本特征和基岩地下热水系统的热储层特征、开采动态特征、水化学特征和热水成因的基础上,对热水系统进行合理概化,然后对天津市基岩地下热水近年来的开采过程进行模拟,并对不同开采方案的钻井热水开采动态进行预测,从而提供一个同时描述地下热水水流和热量运移的三维非稳定流模拟的研究实例。

作者在开展这项研究工作中,得到了天津市地矿局和天津地热管理处李明朗、赵维明、蔡冠英、久建新、李春华工程师等的大力帮助,同时还得到了中国地质大学(北京)水资源与环境工程系田开铭、陈爱光、沈照理、万力教授以及哈承佑、王兆馨教授级高工等的热情支持,特此致谢。

目前,对深层地下热水运移三维数值模拟的研究尚在探索之中。我们向读者奉献此书,旨在引起更多同行对这一研究领域的关注。本书疏漏与错误之处在所难免,敬请读者予以指正。

联系地址:北京市海淀区学院路29号中国地质大学水资源与环境工程系;邮编:100083;电话:010-82322281(O);传真:010-82321081;E-mail:zhouxun@cugb.edu.cn

作 者

2000.12

目 录

第一章 地热资源评价研究概述	(1)
第一节 问题的提出和研究意义	(1)
第二节 地热资源评价研究进展	(2)
一、地热类型	(2)
二、地热资源分类	(2)
三、地热资源评价	(3)
第三节 研究思路与方法	(4)
第二章 深层地下热水运移的三维数学模型	(6)
第一节 控制方程	(6)
一、压力场控制方程	(6)
二、温度场控制方程	(7)
第二节 有限元方程	(8)
一、压力场有限元方程	(8)
二、温度场有限元方程	(10)
第三章 天津市地热系统地质背景和地温场基本特征	(13)
第一节 自然地理简述	(13)
第二节 地质概况	(14)
一、区域地质背景	(14)
二、构造	(16)
三、地层	(19)
第三节 地温场基本特征	(20)
一、区域地温场特征	(20)
二、研究区地温场特征	(20)
三、地温场的形成与地热模型	(21)
第四章 天津市基岩地下热水系统的特征	(24)
第一节 基岩地下热水储集层	(24)
一、奥陶系热储层	(24)
二、寒武系热储层	(24)
三、中新元古界热储层	(25)
第二节 深层地下热水的开采动态	(25)
一、开采动态特征	(25)
二、深层热水钻井动水位升高现象及其分析	(28)
第三节 地下热水水化学特征	(32)

一、水化学基本特征	(32)
二、地下热水的同位素特征	(33)
第四节 基岩地下热水的成因	(34)
第五章 天津市基岩地下热水系统的模拟与预测	(36)
第一节 基岩地下热水系统的概化	(36)
一、计算区范围	(36)
二、热储层结构及其内部特征	(36)
三、边界条件	(36)
第二节 数值模拟计算	(38)
一、渗流区域的单元剖分及时间离散	(38)
二、初始条件和边界条件的处理	(39)
三、热储层参数及其分区	(43)
四、开采井的处理	(44)
五、特殊问题的处理	(44)
六、拟合与求参	(51)
第三节 地下热水开采动态的预测	(51)
一、第一开采方案	(51)
二、第二开采方案	(53)
第六章 结论	(62)
参考文献	(64)
附录 1 插图英文目录	(66)
附录 2 插表英文目录	(68)
英文摘要	(69)

Contents

Chapter 1 General Description of Studies of the Evaluation of Geothermal Resources	
.....	(1)
1.1 Statement of the Problem and Significance	(1)
1.2 Development of Studies of the Evaluation of Geothermal Resources	(2)
1.2.1 Geothermal Types	(2)
1.2.2 Classification of Geothermal Resources	(2)
1.2.3 Evaluation of Geothermal Resources	(3)
1.3 Approach to the Problem	(4)
Chapter 2 3-Dimensional Mathematical Model Describing Geothermal Water Flow and Heat Transport	
.....	(6)
2.1 Governing Equations	(6)
2.1.1 Governing Equation Describing Geothermal Water Flow	(6)
2.1.2 Governing Equation Describing Heat Transport	(7)
2.2 Finite Element Equations	(8)
2.2.1 Finite Element Equation Describing Geothermal Water Flow	(8)
2.2.2 Finite Element Equation Describing Heat Transport	(10)
Chapter 3 Basic Features of Geology and Geothermal Field in Tianjin Area	(13)
3.1 Brief Description of Physical Geography	(13)
3.2 Geological Setting	(14)
3.2.1 Regional Geological Setting	(14)
3.2.2 Structures	(16)
3.2.3 Strata	(19)
3.3 Basic Features of Geothermal Field	(20)
3.3.1 Features of Regional Geothermal Field	(20)
3.3.2 Features of Geothermal Field in the Study Area	(20)
3.3.3 Formation of Geothermal Field and Geothermal Model	(21)
Chapter 4 Features of Geothermal Water System in the Basement Rocks near Tianjin	
.....	(24)
4.1 Aquifers in the Basement Rocks	(24)
4.1.1 Ordovician Aquifer	(24)
4.1.2 Cambrian Aquifer	(24)
4.1.3 Middle and Upper Proterozoic Aquifer	(25)
4.2 Regime of Geothermal Water Exploitation in Deep-Seated Aquifers	(25)

4.2.1	Characteristics of the Regime of Geothermal Water Exploitation	(25)
4.2.2	Phenomenon and Analysis of Rises in Hydraulic Heads in Geothermal Wells in Deep-Seated Aquifers	(28)
4.3	Hydrochemical Features of Geothermal Water	(32)
4.3.1	Basic Hydrochemical Features of Geothermal Water	(32)
4.3.2	Isotopic Features of Geothermal Water	(33)
4.4	Formation of Geothermal Water in the Basement Rocks	(34)
Chapter 5 Modeling and Prediction of Geothermal Water System in the Basement Rocks near Tianjin		
5.1	Generalization of Geothermal Water System in the Basement Rocks	(36)
5.1.1	Model Area	(36)
5.1.2	Structure and Internal Features of the Aquifers	(36)
5.1.3	Boundary Conditions	(36)
5.2	Numerical Modeling	(38)
5.2.1	Discretization of Flow Domain and Time	(38)
5.2.2	Treatment of Initial and Boundary Conditions	(39)
5.2.3	Aquifer Parameters and Subdivisions	(43)
5.2.4	Treatment of Pumping Wells	(44)
5.2.5	Treatment of Special Problems	(44)
5.2.6	Match and Identification of Aquifer Parameters	(51)
5.3	Prediction of Geothermal Water Exploitation	(51)
5.3.1	First Pumpage Scheme	(51)
5.3.2	Second Pumpage Scheme	(53)
Chapter 6 Conclusions		(62)
References		(64)
Annex 1 List of Figures		(66)
Annex 2 List of Tables		(68)
Abstract		(69)

第一章 地热资源评价研究概述

第一节 问题的提出和研究意义

地下热水是宝贵的水资源和能源,具有显著的商业价值,很早就引起人们的关注和开发利用。冰岛、新西兰、匈牙利、美国、斐济等许多国家都拥有丰富的地热资源,通过开发利用地下热水或作为旅游资源,使地热资源得到了充分的使用。我国也是地热资源丰富的国家,在天津、福州、昆明、腾冲和西藏羊八井等地,地下热水得到了开发和利用。随着我国经济建设的迅速发展和环境保护工作的加强,地下热水的勘查、资源评价和开发利用将会受到更加广泛的重视。

天津市是在市区拥有地热资源的城市,也是我国最早利用地热资源的城市之一。地下热水赋存在地下第三系和早古生界、中新元古界基岩地层之中。天津市早在 1936 年就开凿了第一眼热水井,新中国成立后特别是 20 世纪 70 年代以来,开发地下热水的钻井迅速增加,到 1980 年开采井达 211 眼,绝大部分钻井开采第三系热储层中的热水。由于过量开采第三系热水,导致热储层地下水位持续下降,热水资源趋于枯竭。因此,自 20 世纪 80 年代初转向勘探和开发埋深更大的基岩地下热水。当地地勘单位于 1982~1987 年开展了市区及其以南地区(王兰庄地热田)的地热勘查工作,1986~1991 年又开展了市区东部(山岭子地热田)的地热勘查工作,基本查明了地热资源的特征,积累了基础资料,并用热储法(容积法)估算了基岩地热资源,对地热开发具有指导意义。进入 20 世纪 90 年代后,天津市地热开发有了进一步的发展,特别是近几年来房地产业的兴起,对基岩地下热水的开发日益受到重视,到 1998 年底,基岩热水井已达 50 眼左右,开采井数及总开采量均呈上升趋势。由于基岩热水储集层埋深大多数在 1000 m 之下,钻井成井成本很高,在开发地热资源时,除了需要对基岩地下热水的分布、运移、形成有比较清楚的认识以外,对热水开采井的开采量及其发展变化,需要作出合理的预测,对整个地热系统的资源潜力及开采规划,要有切合实际的分析。因此,极有必要对天津市深层基岩地下热水的运移进行更为细致的研究。

地下热水在工业上可以用于纺织、印染、化工、造纸、木材和食品加工等行业,在农业上可以用于温室种植和养殖,在生活中可直接用于采暖供热而节省燃煤减轻环境污染,还可在医疗方面具有使用价值。因此,开发利用地热资源具有重要的经济效益、社会效益和环境效益。天津市由于城乡建设和工农业的迅速发展,对能源需求也不断增加,经长期消耗的常规能源已供不应求,煤、石油能源的环境污染日趋严重,促进了地热资源的大规模开发利用。开展天津市深层地下热水运移的研究,对于开发利用基岩热水资源有着重要的实际意义。

地下热水,特别是深层基岩地下热水,又是一种特殊类型的地下水,主要表现在:①埋

藏深,井底压力随深度变化大,致使水动力场变化复杂;②水温较高(60~96℃),水的密度随温度变化而改变,井中水位高度不能代表井底压力的大小;③地下水在运移过程中不断与围岩发生热交换,并受到来自深部热源的加热;④通过回灌冷水到热储层中,又能获得新的地热资源。因此,不仅地下热水的水动力场随时间发生变化,而且温度场也是随时间经常发生变化的。在研究这样复杂的地下热水系统时,需要考虑质量、动量和能量三种平衡关系,运用三维非稳定流理论,既要描述地下热水压力场,同时又要描述温度场的变化。这对于丰富地下热水的理论和完善地下水运移三维非稳定流理论,有着重要的理论意义。

第二节 地热资源评价研究进展

一、地热类型

地球内部的热能在向地表的传递过程中,受到不同的地形、岩性、构造和地下水活动等因素的影响,致使地表各处的热流并不相同,在一些地区出现地热异常。例如,同样以传导为传递热能的形式,由于不同岩石的导热系数不等,地表就会出现不相同的热流。实际上,地热系统中重要的部分是对流形式的热传递。热能由地下水或蒸汽的运动来传递,即流体通过对流把热能带到浅部或地表,这样才便于使用。现有的地热异常区,一般可以分为三种类型,即以热水为主的水热型,以蒸汽为主的蒸汽型和缺少水分的干热岩石型。已经开发利用的主要为第一种,其次为第二种类型。

热水型地热异常是最常见的一种,地下水在补给区获得补给后运移到某一深度上受热增温,根据对流原理,水受热膨胀而上升,将热能输向浅部,形成地热异常。这种地热异常在地表常有显示,如温泉,或钻孔中揭露热水,因而是常见的地热资源类型。根据热量传输的途径的不同,又可以大体上划分为三种类型:①沉积盆地型,深部热量通过岩石的传导传递到浅部,常表现为层状热储;②断裂型,通过深大断裂沟通地壳浅部岩浆热源,常形成带状热储;③近期岩浆活动型,是与近期火山活动有关的地热资源类型。

含有能被开发利用的热流体的岩石或岩层称为热储层。它可分为孔隙型热储层和裂隙型热储层,部分岩溶和裂隙发育的碳酸盐岩为岩溶裂隙热储层。

在一定范围内具有盖层、热储层、热流体通道和热源的地质体称为地热田。其热能可供开发利用并具有社会、经济和环境效益。

二、地热资源分类

中华人民共和国地质矿产部标准(DZ40-85)“地热资源评价方法”中提出,地热资源系指在当前的技术经济条件下可以开发利用的地下岩石和水中的热能,也包括在未来条件下具有潜在价值的热能。根据研究程度的高低,地热资源可进一步划分为已查明的地热资源、推测地热资源和远景地热资源。

从开发利用的经济技术合理性考虑,可将地热资源划分为可能开采的和不可能开采的两部分。可能开采的地热资源依其经济效益,又可分为可利用的地热资源和残留的地热资源。埋深较浅,在技术上可及、经济上可行的部分是可利用的地热资源;埋藏较深,虽然技术上可及,但开发成本高,目前不宜开采的部分成为残留的地热资源。可利用的地热资源,其经济效益是以深度和地温梯度来评定的。就总的趋势而言,一个地区的地温是随着

深度增加而增加的。从经济和技术条件考虑, 钻井钻进愈深技术愈复杂, 钻井的成本愈高。为此, 通常将埋深在 2000 m 以上的可利用的地热资源称为经济型地热资源, 2000~3000 m 深度的可利用的地热资源称为亚经济型地热资源。

此外, 依据热储层的温度, 地热资源还可分为低温的 ($>20\sim40^{\circ}\text{C}$)、中低温的 ($>40\sim60^{\circ}\text{C}$)、中温的 ($>60^{\circ}\text{C}$ 至当地沸点) 和高温的 ($>$ 当地沸点) 地热资源 (或地热田)。

三、地热资源评价

国内外用于评价地热资源的方法大体上分为两类, 一类是用基于容积法的热储法计算地热资源量或热水资源量, 然后再用诸如回归法等方法求解可采的地热资源量; 另一类是建立热水运移或热量传输的微分方程, 运用解析法或数值法求解, 对地下热水的开采动态进行模拟和预测。

用热储法计算地热资源量, 其计算公式为:

$$Q_R = \bar{C} \cdot A \cdot M \cdot (T_r - T_j)$$

式中: Q_R ——地热资源量, kcal^①;

A ——热储层面积, m^2 ;

M ——热储层厚度, m;

T_r ——热储层温度, $^{\circ}\text{C}$;

T_j ——基准温度 (当地地下恒温层温度或年平均气温), $^{\circ}\text{C}$;

$\bar{C}$ ——热储层岩石和水的平均热容量, $\text{kcal}/\text{m}^3 \cdot ^{\circ}\text{C}$ 。

该方法简单易行, 只需确定热储层有关参数, 便可计算出地热资源量, 因而极为常用。但计算结果只是得到一个静态的地热资源总量, 一般在地热勘探初期对地热开发有指导意义。

天津市先后完成的王兰庄地热田和山岭子地热田勘探报告 (卢润等, 1987^②; 陈振霞等, 1991^③) 中, 均用热储法估算了勘探范围内的地热资源量, 并用容积法计算了热水的静储量, 然后建立总开采量和水位降深的回归方程, 求得可采量, 对个别热储层还用平均布井法计算可采量。沈显杰 (1986a, 1986b) 曾用热储法计算了西藏羊八井高温地热田的各类地热资源量, 并把可采的地热资源换算成相应的发电潜力, 又用质量平衡法对地热开发动态进行预测。马刚 (1990) 对华北平原北部地热以深度 2000 m 及 3000 m 为下限分别计算了经济型地热资源和亚经济型地热资源。郑克桢 (1993) 建立了热储层观测井月平均水位标高与当月、上月, 直至前 4 个月开采量的复相关方程, 用来预测北京市东南地热田的可采资源量。

前人研究地下热水运移的数学模型大体上有三种情形: 有些学者在研究地热资源评价时, 只注重研究地下热水的运动, 不考虑热量的传输; 另外一些学者只注重研究热量的运移, 忽视地下水运动的影响; 也有一些学者同时描述水-热系统中水和热量的运移。早在 20 世纪 60、70 年代, 国外已有学者研究地下水运动对地温场的影响 (庞忠和, 1987a, 1987b), 后来相继出现各种定量模型, 如捷克学者 Cermak 和 Jetel (1982) 在研究波希米亚盆地热流与地下水运动关系时, 提出一个上下均有隔水层的单一水平含水层模型, 描述地

① $1 \text{ cal} = 4.1868 \text{ J}$ 。

② 卢润等, 天津市区及玉兰庄地热田勘探报告, 1987 (内部报告)。

③ 陈振霞等, 天津市山岭子地热田详查报告, 1991 (内部报告)。

下水水平流动引起的热对流,并给出了温度分布的解析解和算例。Eckstein 等(1985)用二维解析模型模拟了尼加拉瓜 Momotombo 地热田钻井不同深度处温度随时间的变化。卢润等(1987)在研究王兰庄地热田时,选择一条长 17 km、深 2000 m 的剖面对稳定态地温场进行剖面二维数值模拟。Lu 等(1996)利用扩展的一维模型描述一个理想的半承压含水层剖面上的温度分布。薛禹群等(1990)在对上海市结合地面沉降的防治而进行的贮能试验研究时,建立了含热机械弥散项的热量运移方程,并给出了数值解法和算例。Pizzi 等(1984)和 Brandi 等(1986),曾建立天津市地下热水水流的准三维流数值模型,但未考虑温度场的变化,并受当时勘探程度的限制,模型刻画不够细致。许广森等(1995)对天津市山岭子地热田基岩热水依据双重介质裂隙水流理论建立非稳定态裂隙流的开采预测模型,其中裂隙区单元采用垂向差分准三维模型,岩块区为平面二维模型。范锡朋等(1995)对福州市第四系热水层建立平面二维非稳定流模型,根据水热均衡计算讨论了地热田水量及其衰减状况,并根据热水开采区地下水位降落漏斗的发展估计了地面沉降可能的发展规模。Huyakorn 等(1983)是较早给出多孔介质中能量运移方程一般表达式的研究者,并探讨了方程的数值解法,为研究深层地下热水的运移奠定了理论基础。张志辉等(1995)建立了考虑自然对流的地下热水运移的三维流模型,并结合上海市西郊的一个承压含水层储能试验给出了一个简单的算例。Ondrak 等(1999)建立了热量和质量运移的耦合数值模型,模拟一个脉状地热系统的温度和矿物沉淀随时、空的变化。福斯特等(1979)则建立了水-热系统中液态水和蒸汽同时存在的双相流动数学模型,并应用于新西兰的蒸汽型地热田的计算。

总的看来,地热资源评价从计算地热资源总量发展到研究地下热水的运移,从单一描述地下热水的运动或热量的运移到同时描述地下热水水流和热量运移,从一维模型到二维模型再到三维模型,逐渐趋于深入。在以往的文献报道中,从稳定流到非稳定流,有关模型的理论推导探讨得较多,在实际应用方面对水流的模拟较为容易,但对温度场的模拟研究仍然是薄弱的环节。这是因为影响温度场的因素较多,模型描述未必能全面考虑到这些因素,同时也因为温度场的野外观测资料很难系统地获取。

第三节 研究思路与方法

本书针对天津市基岩热水的特点,着重研究埋藏较深(1000~4000 m)、温度较高(50~<100℃)的沉积盆地型地下热水运移的数值模拟问题。深层地下热水由于埋深大、温度高,渗流场中水位不仅随空间、时间而变化,而且随水温的变化而改变,致使水动力场变化十分复杂,因而模拟深层地下热水比模拟常温地下水或浅层地下热水更为困难。在地下水-热系统中,既存在热传导,又存在热对流,还存在水-岩之间的热交换,致使温度场的模拟变得极为复杂。可见,研究深层地下热水运移的关键在于建立符合实际的数学模型。

为此,本书首先建立描述深层地下热水水流和热量运移的三维非稳定流数学模型,并探讨其数值解法;然后阐述天津市区域地质背景和天津市区的构造和地层概况,了解地温场的基本特点,通过合理概化得到地热模型,并且比较详细地讨论了天津市基岩地下热水储集层的特征、地下热水开采动态特征、水化学特征和同位素特点,分析了地下热水的成因。在此基础上对基岩地下热水系统进行合理概化,最后对天津市基岩地下热水近年来的

开采过程进行模拟，并对若干钻井热水开采动态（压力场和温度场的变化）进行预测。本书的着重点在于：①在水流方程中充分考虑热水密度随温度、矿化度及压力的变化；②在热流方程中反映水、岩之间的热交换；③探讨热水钻井动水位升高的原因并进行相应的理论计算；④提供一个同时描述地下热水水流和热量运移的三维非稳定流研究的完整实例。

考虑到深层地下热水运移的模型及研究实例较少，本书在建立三维数学模型过程中，除了借鉴已有地热资源评价的理论方法以外，还借鉴了比较成熟的地下水溶质运移数学模型的思想方法。因此，这项研究可以看成是同类内容的研究的一次有益的探索。

第二章 深层地下热水运移的三维数学模型

第一节 控制方程

深层地下热水是一种特殊类型的地下水，由于埋藏深，水温高且变化大，水的密度随温度变化显著，又由于地下水在运移过程中不断与围岩发生热交换，并受到深部热源的加热，再加上开采热水或回灌冷水等因素的影响，致使水动力场和温度场变化复杂。采用三维非稳定流数学模型，可以同时描述热水系统的水动力场和温度场随空间和时间的变化。

一、压力场控制方程

对于温度高且变化大的地下热水，水的密度不是一个常数。与密度变化相依赖的地下水流的水量守恒方程可表示为 (Bear, 1979)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) = -\operatorname{div}(\rho\vec{V}) + Q\rho_Q \quad (2-1)$$

式中： ϕ ——孔隙度；

ρ ——密度， $[\text{ML}^{-3}]$ ；

$\vec{V}$ ——渗流速度， $[\text{LT}^{-1}]$ ；

Q ——源汇项（进入为正，抽出为负）， $[\text{T}^{-1}]$ ；

ρ_Q ——源汇 Q 的密度， $[\text{ML}^{-3}]$ 。

假设渗流速度 $\vec{V}$ 符合达西定律：

$$V_i = -\frac{k_{ij}}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x_j} + \rho g \frac{\partial z}{\partial x_j} \right), \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3$$

式中： k_{ij} ——渗透率；

μ ——动力粘滞系数；

P ——压力， $[\text{ML}^{-2}\text{T}^{-2}]$ ；

g ——重力加速度， $[\text{LT}^{-2}]$ ；

z ——垂向坐标，指向向上， $[\text{L}]$ 。

引进渗透系数：

$$K_{ij} = \rho g k_{ij} / \mu$$

则有

$$V_i = -K_{ij} \left(\frac{1}{\rho g} \frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{\partial z}{\partial x_j} \right), \quad i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3 \quad (2-2)$$

式中： K_{ij} ——渗透系数张量， $[\text{LT}^{-1}]$ 。

同时假设密度 ρ 是水的压力 P 、温度 T 及矿化度 S 的函数，即 $\rho = \rho(P, T, S)$ ，并可以表示为

$$\rho \approx \rho_0(1 + \alpha_P P + \alpha_T T + \alpha_S S) \quad (2-3)$$

式中： ρ_0 ——参考密度， $[\text{ML}^{-3}]$ ；

α_P 、 α_T 、 α_S ——压力、温度和矿化度相应的系数。

我们还假设矿化度 S 不随时间变化。

依照上述假设，方程 (2-1) 可以作下列推导：

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} + \phi \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\rho K_{ij} \left(\frac{1}{\rho g} \frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{\partial z}{\partial x_j} \right) \right] + Q \rho_Q$$

对上式作进一步简化，就有

$$\frac{1}{\rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial P} + \phi \frac{\partial \rho}{\partial P} \right) \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\rho K_{ij} \left(\frac{1}{\rho g} \frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{\partial z}{\partial x_j} \right) \right] + Q \frac{\rho_Q}{\rho} - \frac{\phi}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t}$$

利用 Boussinesq 假设，有

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial P} + \frac{\phi}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \right) \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[K_{ij} \left(\frac{1}{\rho g} \frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{\partial z}{\partial x_j} \right) \right] + Q \frac{\rho_Q}{\rho} - \frac{\phi}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2-4)$$

引进比弹性给水度 S_s ：

$$S_s = \rho_0 g \left(\frac{\partial \phi}{\partial P} + \frac{\phi}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \right) \quad (2-5)$$

就得到压力场控制方程：

$$\frac{S_s}{\rho_0 g} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[K_{ij} \left(\frac{1}{\rho g} \frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{\partial z}{\partial x_j} \right) \right] + Q \frac{\rho_Q}{\rho} - \frac{\phi}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2-6)$$

有时，为了简化和计算方便，可以假定

$$\rho_Q = \rho \quad (2-7)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \approx \alpha_T \quad (2-8)$$

$$H = \frac{1}{\rho_0 g} P + z \quad (2-9)$$

式 (2-9) 中的 H 称为参考水头。这样，式 (2-6) 可写成

$$S_s \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\rho_0}{\rho} K_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j} + \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) K_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_j} \right] + Q - \phi \alpha_T \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2-10)$$

二、温度场控制方程

地下热水系统中能量守恒方程可表示为

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho h) + \text{div}(\rho h \vec{V}) = \text{div}(D \text{grad} T) + Q \rho_Q h_Q + k_s(T_s - T) \quad (2-11)$$

式中： h ——水的内能， $[\text{JM}^{-1}]$ ；

D ——热扩散系数， $[\text{JL}^{-1}\Theta^{-1}\text{T}^{-1}]$ ；

h_Q ——源汇的热能， $[\text{JM}^{-1}]$ ；

T ——水的温度， $[\Theta]$ ；

T_s ——岩石的温度， $[\Theta]$ ；

k_s ——水、岩之间的热交换系数， $[\text{JL}^{-3}\text{T}^{-1}\Theta^{-1}]$ 。

式 (2-11) 中等号右端第三项表示水与岩石之间的热交换，当 $T_s > T$ 时，水被岩石加温，当 $T_s < T$ 时，水的温度降低。

式 (2-11) 可写成

$$\phi \rho \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (\phi \rho)}{\partial t} h + \rho \vec{V} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i} + \text{div}(\rho \vec{V}) h = \text{div}(D \text{grad} T) + Q \rho_Q h_Q + k_s(T_s - T)$$

利用式 (2-1), 就有

$$\phi \rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i} = \text{div}(D \text{grad} T) + Q \rho_Q (h_Q - h) + k_s(T_s - T) \quad (2-12)$$

假定

$$h = cT \quad (2-13a)$$

$$h_Q = c_Q T_Q \quad (2-13b)$$

并且有

$$c_Q = c \quad (2-14)$$

式中: c ——水的比热容, $[\text{JM}^{-1}\Theta^{-1}]$;

c_Q ——源汇 Q 的比热容, $[\text{JM}^{-1}\Theta^{-1}]$;

T_Q ——源汇 Q 的温度, $[\Theta]$ 。

则 (2-12) 式就成为

$$\phi \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c \vec{V} \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i} = \text{div}(D \text{grad} T) + Q \rho_Q c (T_Q - T) + k_s(T_s - T) \quad (2-15)$$

用 ρc 除以上式, 得

$$\phi \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho c} \text{div}(D \text{grad} T) + \frac{\rho_Q}{\rho} Q (T_Q - T) + \frac{k_s}{\rho c} (T_s - T)$$

注意到 ρ 是变量, 我们利用前面压力场控制方程的推导思想, 引进 ρ_0/ρ 这个比例数, 并假定 $\rho_Q = \rho$, 就有

$$\phi \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\rho_0}{\rho} \text{div}(\tilde{D} \text{grad} T) + Q (T_Q - T) + \frac{\rho_0}{\rho} \tilde{k}_s (T_s - T) \quad (2-16)$$

这里

$$\tilde{D} = \frac{D}{\rho_0 c} \quad (2-17a)$$

$$\tilde{k}_s = \frac{k_s}{\rho_0 c} \quad (2-17b)$$

方程 (2-16) 就是温度场控制方程。

我们可以注意到, 当 $Q < 0$ 时, 即抽水时, T_Q 必然等于 T , 则式 (2-16) 的等号右端第二项实际上是不存在的; 当 $Q > 0$ 时, 即注水时, T_Q 不等于 T , 该项才有意义。

第二节 有限元方程

一、压力场有限元方程

设

$$P(\vec{x}, t) = P_J(t) N_J(\vec{x}) \quad J = 1, 2, \dots, n \quad (2-18a)$$

$$T(\vec{x}, t) = T_J(t) N_J(\vec{x}) \quad J = 1, 2, \dots, n \quad (2-18b)$$

式中: $\vec{x} = x_i \vec{i} + x_j \vec{j} + x_k \vec{k}$;

$N_J(\vec{x})$ ——结点基函数;

n ——结点数。

把 (2-18) 代入 (2-6), 就有

$$\frac{S_s}{\rho_0 g} N_J \frac{dP_J}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{\rho g} K_{ij} \frac{\partial N_J}{\partial x_j} P_J + K_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_j} \right] + \frac{\rho_0}{\rho} Q - \phi \alpha_T N_J \frac{dT_J}{dt}$$

依 Galerkin 法, 应有以下式子成立:

$$\sum_{\epsilon} \iiint_{R'} \left\{ \frac{S_s}{\rho_0 g} N_J \frac{dP_J}{dt} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{\rho g} K_{ij} \frac{\partial N_J}{\partial x_j} P_J + K_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_j} \right] - Q + \phi \alpha_T N_J \frac{dT_J}{dt} \right\} N_I d\Omega = 0, \quad I = 1, 2, \dots, n \quad (2-19)$$

这里 R' 表示积分区域 (渗流区域) R 的各个小单元, 并且取 $\rho = \rho_0$ 。

对 (2-19) 式的第二项应用格林定理, 就有

$$\begin{aligned} & \sum_{\epsilon} \iiint_{R'} \left\{ \frac{S_s}{\rho_0 g} N_J \frac{dP_J}{dt} - Q + \phi \alpha_T N_J \frac{dT_J}{dt} \right\} N_I d\Omega \\ & + \sum_{\epsilon} \iiint_{R'} \frac{1}{\rho g} K_{ij} \frac{\partial N_I}{\partial x_i} \frac{\partial N_J}{\partial x_j} P_J d\Omega - \sum_{\epsilon} \iiint_{R'} K_{ij} \frac{\partial N_I}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial x_j} d\Omega \\ & - \sum_{\epsilon} \iint_{B_2'} (\vec{V} \cdot \mathbf{n}_i) N_I dB = 0, \quad I = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

式中: B_2' ——单元 R' 的第二类边界面;

$\mathbf{n}_i$ —— B_2' 的外法线方向。

令

$$\vec{V} \cdot \mathbf{n}_i|_{B_2'} = q' \quad (2-20)$$

即用 q' 表示流量通量, 这样就有

$$\begin{aligned} & \sum_{\epsilon} \iiint_{R'} \frac{S_s}{\rho_0 g} N_I N_J \frac{dP_J}{dt} d\Omega + \sum_{\epsilon} \iiint_{R'} \frac{1}{\rho g} \frac{\partial N_I}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial N_J}{\partial x_j} P_J d\Omega \\ & = \sum_{\epsilon} \iint_{B_2'} q' dB - \sum_{\epsilon} \iiint_{R'} \frac{\partial N_I}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_j} d\Omega \\ & + \sum_{\epsilon} \iiint_{R'} Q N_I d\Omega - \sum_{\epsilon} \iiint_{R'} \phi \alpha_T N_I N_J \frac{dT_J}{dt} d\Omega \end{aligned} \quad (2-21)$$

假设

$$A'_{IJ} = \iiint_{R'} N_I N_J d\Omega \quad (2-22a)$$

$$K'_{IJ} = \iiint_{R'} \frac{\partial N_I}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial N_J}{\partial x_j} d\Omega \quad (2-22b)$$

$$C'_I = \iiint_{R'} N_I d\Omega \quad (2-22c)$$

则 (2-21) 就成为

$$\sum_{\epsilon} \frac{S_s}{\rho_0 g} A'_{IJ} \frac{dP_J}{dt} + \sum_{\epsilon} \frac{1}{\rho g} K'_{IJ} P_J = \sum_{\epsilon} \iint_{B_2'} q' dB - \sum_{\epsilon} \iiint_{R'} \frac{\partial N_I}{\partial x_i} K_{ij} \frac{\partial z}{\partial x_j} d\Omega$$