最新MBA入学联考数学模拟试题 陈秉正 主编

最新MBA入学联考数学模拟试题

陈秉正　主编

兵器工业出版社

最新 MBA 入学联考
数学模拟试题

主　编　陈秉正
副主编　费英瑶　黄克海　贾秋萍
编　委　陈秉正　费英瑶　龚金双
王晓波　贾秋萍　黄克海
魏志宏　屠新泉　刘　海

兵器工业出版社

内 容 简 介

本书根据MBA考生的实际需要，紧扣《MBA数学联考大纲》，结合编者多年从事数学教学以及MBA数学辅导的经验与体会编写而成。全书共22套模拟试题，后附参考答案及1997、1998两年MBA数学联考试题(含答案)，其中选择题部分附有参考答案、疑难提示或解答；计算题部分(含证明题)附有详细解答过程或证明过程。试题考点全面、丰富多样，具有针对性、适用性、典型性、广泛性、技巧性和权威性。本书特别适用于MBA考生，也适用于经济学硕士考生；同时可供MBA数学辅导教师作为教学参考。

图书在版编目(CIP)数据

最新MBA入学联考数学模拟试题/陈秉正主编. —北京：兵器工业出版社，1998.9
ISBN 7-80132-272-X

Ⅰ.最… Ⅱ.陈… Ⅲ.高等数学-试题-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(98)第16622号

(邮编:100081　北京市海淀区车道沟10号)
各地新华书店经销
北京市黄坎印刷厂印装
*
开本 787×1092 1/16　印张 11 5　字数 276 12千字
1998年9月第1版　1998年9月第1次印刷
印数:1—5000　定价 18.00元

前　言

近几年来，随着MBA招生院校的逐步扩大，全国各界有志之士踊跃报考MBA，考生人数大幅度增加，竞争日趋激烈。广大MBA考生迫切希望考前多做一些针对性强的模拟试题，更好地准备应试，以达事半功倍之目的。为满足考生的这一迫切需要，由**清华大学**、**北京大学**、**对外经济贸易大学**等著名院校从事MBA教学及考前辅导的专家教授编写了这套《最新MBA入学联考模拟试题》丛书。本丛书分数学、英语、管理、语文和逻辑四个分册。其中数学分册与一般的应试习题及其它MBA入学考试辅导资料相比，具有如下三方面的特色：

一、更具针对性和适用性

本书是根据近年来MBA数学联考的信息反馈，针对MBA考生的实际需要编写而成的。第一，本书弥补了一般经济学硕士入学考试辅导或指南中模拟试题太少、难易程度不均、针对性不强等诸多不足。第二，本书弥补了一般研究生入学考试数学辅导资料中将工学类、经济学类数学基础知识、习题与MBA的数学考试内容混杂在一起，且缺少解题或证明过程，极不便于MBA考生考前短时间内严格模拟演习，及时发现自己存在的具体问题等诸多不足。第三，本书编入了考生易混淆和计算出错的典型试题。

MBA招收的是在职人员，考生大多工作忙、时间紧、考前难以抽出大量时间进行系统复习，因此希望考前多做一些针对性强的模拟试题，"真枪实弹地演习"，在短时间内抓住重点、巩固要点、解决难点。满足MBA考生的这一实际需要即是本书的编撰宗旨。

二、更具典型性、广泛性和技巧性

本书试题典型、丰富多样，涉及每个知识考点，有更高的技巧性。试题包含了1990年以来与《MBA数学联考大纲》所规定的范围、难度等极为吻合的主要数学题型、典型试题，难度接近于数学四类。MBA考生通过对本书试题的认真模拟，能尽快掌握各种题型的解题技巧、提高解题速度和正确率。

此外，根据近年来考生人数增多、竞争日趋激烈、考题难度加大的特点，以及我们多年从事MBA数学考前辅导的经验，在模拟试题中有意加大了一点难度，特提请读者注意。

三、更具权威性

本书由**清华大学**、**北京大学**、**对外经济贸易大学**等著名院校具有丰富的MBA教学及考前辅导经验的专家教授，紧扣《MBA数学联考大纲》，通过对1997年、1998年MBA数学考题的认真分析以及对1999年MBA数学命题的合理预测编写而成，更具权威性。

本书共22套模拟试题，后附参考答案、疑难提示、解题过程或证明过程，特别适用于MBA考生，也适用于一般硕士考生和经济学硕士考生；同时也可作为MBA数学辅导教师的教学参考书。

本书由**清华大学经济管理学院陈秉正副教授主编**，**清华大学经济管理学院李端敏教授**，**清华大学经济管理学院程佳惠副教授审稿**，并对本书提出了很多宝贵意见；同时兵器工业出版社也给予了热情支持，在此对他们一并表示衷心的感谢！

本书在编写过程中，广泛参阅了国内外有关论著或资料，限于篇幅不能一一注明，在此一并致谢！

编　者

1998年6月

目　录

模拟试题 1

（本试卷满分为 100 分，考试时间为 180 分钟）

一、选择题：本大题共 20 小题，每小题 2 分，共 40 分，在每小题给出的五个选项中，只有一项正确，请在答题纸上按要求把所选项涂黑．

1. 已知$\frac{x}{3}=\frac{y}{5}$，则$\frac{x+y}{x-y}=$

(A) 2　(B) -4　(C) -2　(D) 1　(E) 4

2. 有 1,2,3 三个数码，可以组成多少个无重复数字的自然数

(A) 6　(B) 27　(C) 15　(D) 9　(E) 无穷多个

3. 用 3，-2 两个根构造成的一个方程为

(A) $x^2+3x-2=0$　(B) $x^2-3x+2=0$　(C) $6x^2-x+1=0$

(D) $3x^2-2x-1=0$　(E) $x^2-x-6=0$

4. 已知$(3x-1)^8=a_8x^8+a_7x^7+\cdots+a_1x+a_0$，则 $a_8+a_6+\cdots+a_0=$

(A) $2^{16}+2^8$　(B) 2^{16}　(C) 2^7+2^{15}　(D) 2^8　(E) 以上均不正确

5. 证明等式 $1+2+\cdots+(n+2)=\frac{(n+2)(n+3)}{2}$ $(n\in \mathbf{N})$时，当 $n=1$ 时，左边应取的项为

(A) $6+5+4$　(B) $1+2+3$　(C) 1　(D) $1+2$　(E) 3

6. 正实数 a, b, c 满足 $a+d=b+c$，$|a-d|<|b-c|$，则

(A) $ad=bc$　(B) ad 与 bc 的大小不定　(C) $ad<bc$

(D) $ad>bc$　(E) $ac<bd$

7. 解关于 x 的不等式组$\begin{cases}3x+4y=12\\ \frac{x}{2}\leqslant y\leqslant 2x\end{cases}$

(A) $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2$　(B) $\frac{3}{4}\leqslant x\leqslant 3$　(C) $8\leqslant x\leqslant 15$

(D) $\frac{5}{12}\leqslant x\leqslant \frac{11}{12}$　(E) $\frac{12}{11}\leqslant x\leqslant \frac{12}{5}$

8. 从盛满 10L 纯酒精的容器里倒出 1L，然后用水填满，再倒出 1L 混 合溶液，用水填满，这样继续进行，一共倒了 4 次，这时容器里还有纯酒精多少升？

(A) 6　(B) 6.354　(C) 6.561　(D) 6.841　(E) 6.923

9. 某商场出售一种商品，每天可卖 2000 件，每件可获利 6 元。据市场预测，若每件商品降价 0.1 元，则每天能多卖出 100 件，问每件应减价多少元，才能获得最好的效益？

(A) 0.8　(B) 1　(C) 1.5　(D) 2　(E) 2.5.

10. 如果一个球的体积扩大后是原来球体积的 9 倍，那么扩大后球的表面积是原来球表面积的几倍？

(A) $3\sqrt[3]{3}$ 倍　(B) $\sqrt[3]{9}$ 倍　(C) 4 倍　(D) 2 倍　(E) 3 倍

11. 已知函数 $f(x)=|2^x-1|$，$a<b<c$ 且 $f(a)>f(c)>f(b)$，则必有

(A) $a<0, b>0, c<0$　(B) $a<0, b<0, c<0$　(C) $a<0, b\geqslant 0, c>0$

(D) $2^{-a}<2^{c}$ (E) $2^{a}+2^{c}<2$

12. 若 $f(x)=\begin{cases}x^2 & (x\geqslant 0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x & (x>0)\\ x^2 & (x\leqslant 0)\end{cases}$，则当 $x\leqslant 0$ 时，$f(g(x))=$

(A) x (B) $\sqrt{x}$ (C) x^4 (D) x^2 (E) x^3

13. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{1-\cos x}=$

(A) 1 (B) 0 (C) 2 (D) $\dfrac{1}{2}$ (E) $\sqrt{2}$

14. 若 $f(x)=\begin{cases}ax+b & x>1\\ x^2 & x\leqslant 1\end{cases}$ 处处可导，则

(A) $a=-2$，$b=-1$ (B) $a=2$，$b=1$ (C) $a=2$，$b=-1$

(D) $a=-2$，$b=1$ (E) $a=2$，$b=2$

15. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-1 & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}=$

(A) 1 (B) $(n-1)!$ (C) $n!$ (D) $(n+1)!$ (E) 2

16. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，那么

(A) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ (B) $\boldsymbol{A}=0$ (C) 若 $\boldsymbol{A}$ 不可逆，则 $\boldsymbol{A}=0$

(D) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ (E) 以上均不正确

17. 设三维列矩阵 $\boldsymbol{a}=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，矩阵 $\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$，其 $\boldsymbol{I}$ 为单位阵，则矩阵 $\boldsymbol{A}=$

(A) 3 (B) 1 (C) 2 (D) $\boldsymbol{I}$ (E) 0

18. 设某一俱乐部，其中会员为统计学家、数学家或二者兼有，今有一 22 人组成的俱乐小组，其中有 18 位统计学家，有 15 位数学家，请问有多少位既是统计学家又是数学家？

(A) 10 (B) 8 (C) 9 (D) 11 (E) 5

19. 已知 $P(A)=0.92$，$P(B)=0.93$，$P(B|\overline{A})=0.85$，求 $P(A|\overline{B})=$

(A) 0.17 (B) 0.056 (C) 0.83 (D) 0.068 (E) 0.725

20. 把 10 本不同的书以任意的次序放在书架上，求其中指定的 3 本书放在一起的概率

(A) $\dfrac{1}{10}$ (B) $\dfrac{1}{5}$ (C) $\dfrac{1}{8}$ (D) $\dfrac{1}{12}$ (E) $\dfrac{1}{15}$

二、计算题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分．

21. 双曲线 C 的渐近线方程是 $x+4y-1=0$ 及 $x-4y-1=0$，虚轴平行于 y 轴，且虚轴长为 2，求点 P(2,0)到 C 的最近距离．

22. 求曲线 $x^2+xy+y^2=4$ 过 $(2,-2)$ 处的切线方程．

23. 已知 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=0$，且当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，证明当 $x>0$ 时，$f(x)>0$.

24. 设 $f'(\ln x)=\begin{cases}1 & 0<x\leqslant 1\\ x & 1<x<+\infty\end{cases}$ 且 $f(0)=0$，求 $f(x)$.

25. 函数 $f(x)=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$，确定其定义域，并讨论函数的奇偶性、单调性和凸凹性．

26. 已知 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t \quad (x>0)$,求 $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$.

27. 设曲线 $y=-x^2+x+2$ 与 y 轴有交点 P,过 P 点作曲线的切线,求切线与曲线与 x 轴围成图形的面积.

28. $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 为四维列矩阵,且四阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_3\boldsymbol{\beta}_1|=m$, $|\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2\boldsymbol{\alpha}_3|=n$,则四阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_3\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_1(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)|$ 等于多少?

29. 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0 \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=0 \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=0 \\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=0 \end{cases}$ 的一个基础解系.

30. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{bmatrix}$

试证:$\boldsymbol{r}(\boldsymbol{AB})\leqslant\min[\boldsymbol{r}(\boldsymbol{A}), \boldsymbol{r}(\boldsymbol{B})]$.

31. 设在 10 只产品中有 2 只是次品,每次任取 1 只,不再放回,连取两次,求如下各事件的概率:

(1)两次都是合格品;

(2)两次都是次品;

(3)第一次是合格品,第二次是次品;

(4)第二次是次品.

32. 对飞机进行独立射击,设每次射击命中率为 0.2,问至少必须经过多少次独立射击才能使至少击中一次的概率不小于 0.9.

参考答案

一、选择题

1.B　2.C　3.E　4.C　5.B　6.D　7.E　8.C　9.D　10.A

11.E　12.C　13.B　14.C　15.C　16.D　17.B　18.D　19.C　20.E

疑难提示：

3. **解**：设所求方程为：$ax^2+bx+c=0$，

已知 $x_1=3, x_2=-2$，$\therefore \begin{cases} 3+(-2)=-\dfrac{b}{a} \\ 3\times(-2)=\dfrac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a=b \\ a=-\dfrac{c}{6} \end{cases}$

再设 $a=1$，得 $b=-1$，$c=-6$，故所求方程为：$x^2-x-6=0$．

4. **解**：令 $x=1$，得 $2^8=a_8+a_7+\cdots+a_0$　①

令 $x=-1$，得 $2^{16}=a_8-a_7+\cdots+a_0$　②

①+②，得 $2^8+2^{16}=2a_8+2a_6+2a_4+2a_2+2a_0$

两边除以 2，得 $2^7+2^{15}=a_8+a_6+a_4+a_2+a_0$

12. **解**：当 $x\leqslant 0$ 时，$g(x)=x^2$，$\therefore f(g(x))=f(x^2)$，

又 $\because x^2\geqslant 0$，$\therefore$ 取 $f(x)=x^2$ 代入，因此 $f(g(x))=x^4(x\leqslant 0)$．

19. **解**：$P(A)=0.92 \Rightarrow P(\overline{A})=0.08$；$P(B)=0.93 \Rightarrow P(\overline{B})=0.07$

$P(B|\overline{A})=0.85 \Rightarrow P(\overline{B}|\overline{A})=0.15$

$$P(A|\overline{B})=1-P(\overline{A}|\overline{B})=1-\frac{P(\overline{A}\overline{B})}{P(\overline{B})}=1-\frac{P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})}{P(\overline{B})}=1-\frac{0.08\times 0.15}{0.07}=1-0.17$$

$=0.83$

二、计算题(含证明题)

21. **解**：由 $\begin{cases} x+4y-1=0 \\ x-4y-1=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ $\therefore$ 点(1,0)为双曲线 C 的中心

设双曲线方程为 $\dfrac{(x-1)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，渐近线的斜率为 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{4}$，又 $\because b=1$　$\therefore a=4$

$\therefore$ 双曲线方程为 $\dfrac{(x-1)^2}{16}-y^2=1$，设 $Q(x,y)$ 为双曲线上一点，则

$$|PQ|=\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{(x-2)^2+\frac{(x-1)^2}{16}-1}=\sqrt{\frac{17}{16}\left(x-\frac{33}{17}\right)^2-\frac{16}{17}}$$

$\because Q(x,y)$ 是双曲线上的点　$\therefore x\geqslant 5$ 或 $x\leqslant -3$

因此当 $x=5$ 时，$|PQ|=3$ 为点 P 到双曲线 C 的最近距离。

22. **解**：设切线方程为 $y-y_0=y'|_{x=x_0}(x-x_0)$，曲线方程两边对 x 求导，

得 $2x+y+xy'+2yy'=0$，$y'=-\dfrac{2x+y}{x+2y}$，代入 $x_0=2,y_0=-2$，得

$y'=-\dfrac{2\times2+(-2)}{2+2\times(-2)}=1$，∴ 所求切线方程为 $y+2=x-2$，即 $y=x-4$

23. **证**：对任给的 $x>0$，

∵ $f(x)$为在$[0,x]$上连续，在$(0,x)$上可导的单调增函数

∴ 由拉格朗日中值定理，一定存在一个 $\xi\in(0,x)$，使得

$f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{f(x)}{x}>0$

∴ 当 $x>0$ 时，$f(x)>0$

24. **解**：(1)当 $0<x\leqslant1$ 时，

$$f(\ln x)=\int f'(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x+C,\quad \therefore f(x)=x+C$$

由 $f(0)=0$，可知 $C=0$，∴ $f(x)=x\quad x\leqslant0$

(2)当 $1<x<+\infty$时，

$$f(\ln x)=\int f'(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)=\int\mathrm{d}x=x+C$$

令 $\ln x=t$，则 $x=\mathrm{e}^t$

∴ $f(x)=\mathrm{e}^x+C$，由 $f(0)=\mathrm{e}^0+C=0$，可知 $C=-1$，

因此，$f(x)=\begin{cases}x & x\leqslant0\\ \mathrm{e}^x-1 & x>0\end{cases}$

25. **解**：(1) $x\neq0$，∴ 定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

(2)$f(-x)=\dfrac{4(-x+1)}{(-x)^2}-2=\dfrac{-4(x-1)}{x^2}-2$

∴ 函数 y 既不是奇函数，也不是偶函数．

(3)求出函数的单调性、凸凹性见图表

$y'=-\dfrac{4(x+2)}{x^3}$　令 $y'=0$，得 $x=-2$；$y''=\dfrac{8(x+3)}{x^4}$　令 $y''=0$，得 $x=-3$

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	$-$		$-$	0	$+$		$-$
y''	$-$	0	$+$		$+$		$+$
y的单调性	↘	$-2\frac{8}{9}$	↘	极小值(-3)	↗	间断点	↘
凸凹	∩	拐点	∪		∪		∪

26. **解**：$f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\displaystyle\int_1^x\frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t+\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t$

$$\xlongequal[\mathrm{d}t=-\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u]{\text{令 } t=\frac{1}{u}}\int_1^x\frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t+\int_1^x\frac{\ln\left(1+\frac{1}{u}\right)}{\frac{1}{u}}\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\int_1^x\frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t-\int_1^x\frac{\ln(1+u)-\ln u}{u}\mathrm{d}u$$

$$=\int_1^x\frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t-\int_1^x\frac{\ln(1+u)}{u}\mathrm{d}u+\int_1^x\frac{\ln u}{u}\mathrm{d}u$$

$$=\int_1^x\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t=\int_1^x\ln t\,\mathrm{d}(\ln t)=\frac{1}{2}\ln^2t\Big|_1^x=\frac{1}{2}\ln^2x$$

27. **解**：画出所求图形的平面图，如图 1-1 所示

$\because$ 曲线与切线的交点 P 在 y 轴上　$\therefore$ 取 $x=0$，代入曲线方程，得 $y=2$

$\therefore$ P 点坐标为 $(0,2)$.

设切线方程为 $y-2=kx$

对曲线方程求导，$k=y'=-2x+1$

当 $x=0$ 时，$k=1$，则切线方程是 $y-2=x$

即 $y=x+2$

求切线、曲线与 x 轴的交点：

令 $y=0$，得 $x=-2$，即切线与 x 轴交于 $(-2,0)$ 点；

令 $y=0$，$-x^2+x+2=0$，得 $x=-1$ 及 $x=2$

即曲线与 x 轴交于 $(-1,0)$ 和 $(2,0)$ 两点 .

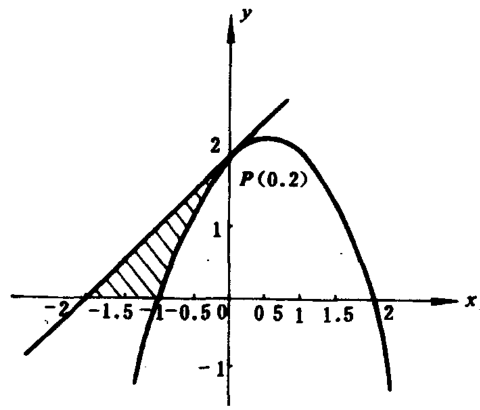

图 1-1

由图 1-1 可知，所求平面图形的面积为：

$$S=\int_{-2}^{0}(x+2)\mathrm{d}x-\int_{-1}^{0}(-x^2+x+2)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-2}^{0}-\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-1}^{0}=\frac{5}{6}$$

28. **解**：$|\alpha_3\alpha_2\alpha_1(\beta_1+\beta_2)|=|\alpha_3\alpha_2\alpha_1\beta_1|+|\alpha_3\alpha_2\alpha_1\beta_2|$

$=-|\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1|+(-1)(-1)|\alpha_1\alpha_2\beta_2\alpha_3|=-m+n$

29. **解**：对方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&1&-1&1\\2&1&-1&2&-3\\3&-2&-1&1&-2\\2&-5&1&-2&2\end{bmatrix}\begin{matrix}\times(-2)\quad\times(-3)\\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&-2&1&-1&1\\0&5&-3&4&-5\\0&4&-4&4&-5\\0&-1&-1&0&0\end{bmatrix}\times\left(-\frac{4}{5}\right)\quad\times\frac{1}{5}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&-2&1&-1&1\\0&5&-3&4&-5\\0&0&-\frac{8}{5}&\frac{4}{5}&-1\\0&0&-\frac{8}{5}&\frac{4}{5}&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-2&1&-1&1\\0&5&5&0&0\\0&0&8&-4&5\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-3&0&-1&1\\0&1&1&0&0\\0&0&8&-4&5\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所以 $r(\boldsymbol{A})=3$，方程组的基础解系由 $5-3=2$ 个解向量构成 .

原方程组化为同解方程组：$\begin{cases}x_1-3x_2\qquad-x_4+\ x_5=0\\ \qquad x_2+x_3\qquad\qquad=0\\ \qquad\qquad 8x_3-4x_4+5x_5=0\end{cases}$

令 $x_3=1$，$x_5=0$，则 $x_1=-1$，$x_2=-1$，$x_4=2$；

令 $x_3=0$，$x_5=1$，则 $x_1=\frac{1}{4}$，$x_2=0$，$x_4=\frac{5}{4}$

于是得方程组的一个基础解系

$\alpha_1=(-1,\ -1,\ 1,\ 2,\ 0)$，　$\alpha_2=\left(\frac{1}{4},\ 0,\ 0,\ \frac{5}{4},\ 1\right)$

30. **证**：设 $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \cdots, \boldsymbol{B}_s$ 表示矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量，则矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可以表示成分块矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{B}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{B}_s\end{bmatrix}\quad \text{于是 } \boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{B}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{B}_s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}\boldsymbol{B}_1+a_{12}\boldsymbol{B}_2+\cdots+a_{1s}\boldsymbol{B}_s\\ a_{21}\boldsymbol{B}_1+a_{22}\boldsymbol{B}_2+\cdots+a_{2s}\boldsymbol{B}_s\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ a_{m1}\boldsymbol{B}_1+a_{m2}\boldsymbol{B}_2+\cdots+a_{ms}\boldsymbol{B}_s\end{bmatrix}$$

这说明矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的行向量组可由 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性表示，所以，$r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{B})$

另外，设 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_s$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以表示成分块矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_s)$，于是

$$\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_s)\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}\boldsymbol{A}_1+b_{21}\boldsymbol{A}_2+\cdots+b_{s1}\boldsymbol{A}_s\\ b_{12}\boldsymbol{A}_1+b_{22}\boldsymbol{A}_2+\cdots+b_{s2}\boldsymbol{A}_s\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ b_{1n}\boldsymbol{A}_1+b_{2n}\boldsymbol{A}_2+\cdots+b_{sn}\boldsymbol{A}_s\end{bmatrix}^T$$

这说明矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示，所以，$r(\boldsymbol{AB})\leqslant r(\boldsymbol{A})$

因此可得 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant \min[r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})]$

31. **解**：(1) $\dfrac{C_8^1C_7^1}{C_{10}^1C_9^1}=\dfrac{28}{45}$；(2) $\dfrac{C_2^1C_1^1}{C_{10}^1C_9^1}=\dfrac{1}{45}$；(3) $\dfrac{C_8^1C_2^1}{C_{10}^1C_9^1}=\dfrac{8}{45}$；(4) $\dfrac{C_8^1C_2^1}{C_{10}^1C_9^1}+\dfrac{C_2^1C_2^1}{C_{10}^1C_9^1}=\dfrac{1}{5}$

32. **解**：A_i 为第 i 次射击命中　$(i=1, 2, \cdots, n)$

B 为至少经过 n 次独立射击才能至少击中一次的事件

已知 $P(A_1)=P(A_2)=\cdots=P(A_n)=0.2$，使 $P(B)\geqslant 0.9$

$P(\overline{A}_1)=P(\overline{A}_2)=P(\overline{A}_n)=0.8$

$P(B)=P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n)=1-0.8^n$

要使 $P(B)\geqslant 0.9$，即 $1-0.8^n\geqslant 0.9$　$0.8^n\leqslant 1-0.9$　　$\therefore n=11$

答：至少必须经过 11 次独立射击才能使至少击中一次的概率不小于 0.9．

模拟试题 2

（本试卷满分为 100 分，考试时间为 180 分钟）

一、选择题：本大题共 20 小题，每小题 2 分，共 40 分，在每小题给出的五个选项中，只有一项正确，请在答题纸上按要求把所选项涂黑．

1. 配制一种农药，其中生石灰、硫磺粉和水的质量比为 1∶2∶14，要配制这种农药 3825 千克，需要硫磺粉的质量是

(A) 225 千克　(B) 450 千克　(C) 480 千克　(D) 675 千克　(E) 500 千克

2. 三个连续整数的和为 21，则它们的积为

(A) 210　(B) 236　(C) 336　(D) 326　(E) 436

3. 一等腰直角三角形的斜边为 6，则其面积为

(A) 16　(B) 12　(C) 9　(D) 8　(E) 18

4. 已知 x_1, x_2 是方程 $2x^2-3x+1=0$ 的两个根，则 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ 的值是

(A) $\frac{1}{3}$　(B) $\frac{4}{5}$　(C) 3　(D) $\frac{3}{2}$　(E) 4

5. 三角形的一边 $c_1=6\text{cm}$，面积 $S_1=20\text{cm}^2$，另一三角形与它相似，其面积 $S_2=24.20\text{cm}^2$，则其对应边 c_2 长为

(A) 6.6cm　(B) 7.26cm　(C) 3.3cm　(D) 8.8cm　(E) 不能确定

6. 下列函数为偶函数的是

(A) x^3-2　(B) 3^x　(C) x^3+5x+2^x　(D) $\cos 2x$　(E) x^3-3x^2+x

7. 已知 $\sin\beta+\cos\beta=\sqrt{2}$，$f(x)=x+\frac{1}{x}$，那么 $f(\mathrm{tg}\beta)$ 的值为

(A) 1　(B) 2　(C) -1　(D) -2　(E) -4

8. 已知 $c<0$，在下列不等式中成立的一个是

(A) $c>2^c$　(B) $c>\left(\frac{1}{2}\right)^c$　(C) $2^c<\left(\frac{1}{2}\right)^c$　(D) $2^c>\left(\frac{1}{2}\right)^c$　(E) 以上均不正确

9. 下列函数中是奇函数的为

(A) $3x^4-x^2$　(B) $4x-x^2$　(C) x^5-1　(D) $\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})$　(E) $\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$

10. 一直角三角形斜边长为 10cm，一个内角为 60°，则与此角对应的边长是

(A) $\frac{10}{\sqrt{3}}$cm　(B) 5cm　(C) $5\sqrt{2}$cm　(D) $5\sqrt{3}$cm　(E) $\frac{20}{\sqrt{3}}$cm

11. 圆 $x^2+y^2+4x-6y+12=0$ 的圆心坐标为

(A) (0, 0)　(B) (2, 3)　(C) (2, −3)　(D) (−2, 3)　(E) (−2, −3)

12. 经过两点(4，−1)和(−2，3)的直线方程为

(A) $2x+3y=5$　(B) $x-y=3$　(C) $2x-3y=4$　(D) $3x-2y=4$　(E) $4x-3y=5$

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x}=$

(A) 0　(B) 1　(C) e^3　(D) e^6　(E) e^{-6}

14. $y=\ln(x^2-1)$ 的定义域为

(A) $(-1, 1)$　　(B) $(-\infty, -1]\cup[1, +\infty)$　　(C) $(-\infty, 1)$

(D) $(-\infty, +\infty)$　　(E) $(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$

15. $(3^x)'=$

(A) 3^x　　(B) $\dfrac{3^x}{\ln 3}$　　(C) $x\cdot 3^{x-1}$　　(D) $3^x\ln 3$　　(E) $3^x\ln x$

16. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x<0\\ x^2+\frac{1}{3}a, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $a=$

(A) -1　　(B) 0　　(C) $\dfrac{1}{3}$　　(D) 1　　(E) 3

17. 下列数列中，收敛的是

(A) 3^n　　(B) $\dfrac{1}{3}[(-1)^n+1]$　　(C) $\ln(1+n)$

(D) $(-3)^{-n}$　　(E) $(-1)^n\dfrac{1}{n}(n-1)$

18. 曲线 $y=\dfrac{1}{4}(x-2)$ 与 $y=4x+2$ 对称于

(A) y 轴　　(B) 原点　　(C) 直线 $y=x$　　(D) 直线 $y=-x$　　(E) x 轴

19. 下列行列式中与行列式 $\begin{vmatrix}3&3&0\\0&2&0\\1&0&1\end{vmatrix}$ 相等的是

(A) $\begin{vmatrix}2&2&0\\0&2&0\\3&0&3\end{vmatrix}$　　(B) $\begin{vmatrix}2&0&3\\2&2&0\\0&0&3\end{vmatrix}$　　(C) $\begin{vmatrix}3&0&1\\3&2&0\\0&0&1\end{vmatrix}$

(D) $\begin{vmatrix}-3&-3&0\\0&2&0\\1&0&1\end{vmatrix}$　　(E) $\begin{vmatrix}-3&0&1\\-3&2&0\\0&0&1\end{vmatrix}$

20. 10 个灯泡中有 3 个是坏的，从这 10 个灯泡中任取 4 个，则取到的 4 个灯泡中恰有 1 个是好灯泡的概率为

(A) $\dfrac{1}{10}$　　(B) $\dfrac{3}{10}$　　(C) $\dfrac{1}{4}$　　(D) $\dfrac{C_7^6}{C_{10}^4}$　　(E) $\dfrac{C_4^1C_6^3}{C_{10}^4}$

二、计算题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

21. 设 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$，求 y'.

22. 求函数 $y=x^3-9x^2-27$ 的极值.

23. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}$.

24. 已知 $x\geqslant 0$，且 $f(x)$ 为连续正值函数，问 $g(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$ 是单调增加还是减少？为什么？

25. 已知 $f(\pi)=2$，$\int_0^\pi[f(x)+f''(x)]\sin x\mathrm{d}x=5$，求 $f(0)$.

26. 求 $y^2=x$ 与半圆 $x^2+y^2=2\ (x>0)$ 所围成的平面图形的面积.

27. 求在曲线 $y=x^3+x-2$ 上与直线 $y=4x-1$ 平行的切线的切点坐标．

28. k 为何值时，下列齐次线性方程组有非零解．

$$\begin{cases} kx_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+kx_2-x_3=0 \\ 2x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}$$

29. 下面线性方程组有唯一解、无解或无穷解？若有无穷解，请用向量形式表示．

$$\begin{cases} x_1+x_2-5x_3+2x_4=8 \\ -6x_1-3x_2+x_4=9 \\ 2x_1+2x_2-x_3=-5 \\ 6x_1+4x_2-7x_3+x_4=0 \end{cases}$$

30. 求方阵 $A=\begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix}$ 的特征值及特征向量．

31. 判断向量组 $\alpha_1=(2,-1,7,3)$，$\alpha_2=(1,4,11,-2)$，$\alpha_3=(3,-6,3,8)$是否线性相关

32. 某灯泡厂共有甲、乙两车间，甲车间日产量为乙车间的 3 倍，甲车间的次品率为 5%，乙车间的次品率为 4%，求该厂产品的次品率．