一般偏微分算子理论

〔瑞典〕L. 霍瑪特著　覃国光　鄒继高譯

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是作者发表在杂志 Acta Mathematica, 94 (1955) 上的一篇論文的单行譯本，这篇文章包含了有关綫性偏微分方程理論中一般而深刻的許多結果，由四章組成．第一章闡述抽象算子理論，依靠一些先驗不等式，証明了对于一般常系数微分算子，存在适定的边値問題．第二章对常系数微分算子，討論了一般形式的能量方法，建立了各种先驗不等式成立的充要条件．第三章討論超椭圓型方程类，建立了常系数算子是超椭圓型的充要条件，并討論了譜性质．最后一章是将前面的結果推广到变系数算子．

本书可供微分方程专門組学生、教师及科研工作者参考．

ON THE THEORY OF GENERAL PARTIAL DIFFERENTIAL OPERATORS

Lars Hörmander

Acta Mathematica, 94 (1955)

一般偏微分算子理论

覃国光　鄒继高　譯

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路 450 号）

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

商务印书館上海厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本 850×1156 1/32　印張 3 18/32　排版字数 83,000

1964 年11月第 1 版　1964 年11月第 1 次印刷　印数 1—7,000

统一书号 13119·616　定价(科六) 0.55 元

序　言

0.1 过去，在偏微分方程的理論中，人們的主要兴趣总是集中在椭圓型方程及正規双曲型方程上. 最近几年来，这些方程的理論，至少在涉及 Dirichlet 問題及 Cauchy 問題方面，已經具有十分令人滿意的規模. 对于物理上重要的其他一些微分方程，特別是二阶的双曲-椭圓混合型方程，也有着濃厚的兴趣. 但是涉及一般类型的方程却論述得很少. 有人曾經在 1946 年說道(見[25]，第 7 頁，第 38～39 頁)："甚至对大多数非常簡单的非解析方程，我們还不知道它是否有一个解存在."接着又說："此外，存在相当广泛一类方程，我們还不知道任何正确地提出的边界問題. 例如，所謂超双曲型方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_p^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial y_p^2}\quad(p\geqslant 2),$$

便是其中的一个."自此以后，已經出現了一些重要的著作. 特別地，我們要提出任意常系数微分方程具有一个基本解的 Malgrange[19] 的証明. (对超双曲型方程，不同基本解的明显的构造，已由 de Rham[27] 及其他作者所提供.) 但是除了这些結果之外，看来还沒有从事于一般微分算子的性质的探討. 这篇文章的主要目的是要給出这种研究的一条途徑. 其一般观点或許也可以解釋椭圓型和双曲型方程的理論.

0.2 現代微分方程理論中的一个普遍特征是 Hilbert 空間中算子的抽象理論的应用. 在这里，我們的观点仍然是純粹算子理論的. 为了閱讀本文的方便，我們把必要的抽象算子理論的說

5015/15

明包含在介紹主要問題的第一章中❶. 利用一些抽象的方法我們証明了,我們的問題的回答依賴于所謂先驗不等式的存在. 以后几章絕大部分是致力于这些不等式的証明. 在第二、三章中,証明是以一般形式的能量积分方法为基础的;也就是以一个函数的导数的某些二次形式的积分的研究作为根据的. 对于波动方程,能量积分具有能量守恒的物理意义,这个方法是由 Friedrichs-Lewy[6] 引入的. 最近,Leray[19] 建立了应用于高阶正規双曲型方程的一个推广. 在第二章中,我們系統地研究了能量积分方法的代数方面. 这一章只討論了常系数方程. 对稍广一类变系数方程的推广在第四章中討論.

在第三章中,我們主要考虑一类常系数微分算子,从某些方面来看,对于通常仅对椭圓型算子所处理的問題的研究,这类微分算子似乎是自然的一类.例如,对这一类算子,Weyl 引理成立,即所有(弱)解是无穷次可微的. 我們的主要論証是使用了一个在那里构造出来的基本解. 这些結果在一般情形似乎不能由能量积分的論証得出,虽然很多重要的例子可用 Friedrichs[5] 所引入的方法来处理.

0.3 不用第一章所引入的概念要詳細說明这些結果是不可能的. 第一章連同以后各章的引論給出了本文內容的一个摘要.

0.4 在此,要感謝 B. L. van der Waerden 教授在有关第 3.1 节問題中給我极为宝貴的帮助,还要感謝 A. Seidenberg 教授,他使我注意到了他的一篇論文,这篇論文对 3.4 是十分有用的.

---

❶ 第一章,特別是第 1.3 节,在个別問題上与 Вишик[34] 关于二阶椭圓型方程的一般边界問題的一篇重要著作的一部分重复.

目　录

第一章　抽象微分算子

1.0　引　　論

在序言中我們曾經指出，本章对于全文具有导論的特性．因此，我們这里不准备对內容作概括的叙述，只介紹一般的布局．首先，在第 1.1 节，我們要复习一下泛函分析中某些熟知的定理与定义；然后在第 1.2 节，我們定义 Hilbert 空間中的微分算子，并将第 1.1 节的定理应用到微分算子的情形；在第 1.3 节，討論边界条件与边界問題的意义．这些研究与 M. И. Вишик 的工作 [34] 具有許多共同之点．这些研究对本文的其余部分在邏輯上不是必需的，但将作为一般基础．

1.1　抽象算子理論中的定义与結果

設 B_0 和 B_1 是两个复 Banach 空間，亦即两个完备賦范复向量空間．由空間 B_0 到空間 B_1 的綫性变换（算子）T 是定义在綫性集合 $\mathfrak{D}_T \subset B_0$ 上而取値于 B_1 内的函数，并且对 $x,\ y \in \mathfrak{D}_T$ 与任意复数 $\alpha,\ \beta$ 滿足

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty. \qquad (1.1.1)$$

由(1.1.1)推知，变换 T 的值域 $\mathfrak{R}_T$ 是 B_1 内的綫性集合．

所有元序偶 $x=[x_0,\ x_1]$ $(x_0 \in B_0,\ x_1 \in B_1)$ 的集合 $B_0 \times B_1$，如果在其中引入自然的向量运算与范数[1]

[1] 在 $B_0 \times B_1$ 中，可以用任意等价的范数，但这里的选擇具有下列优点：如果 B_0 和 B_1 具有 Hilbert 范数，則它給出 Hilbert 范数．

$$|x|=(|x_0|^2+|x_1|^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.1.2}$$

則集合 $B_0\times B_1$ 也是 Banach 空間，并称为 B_0 与 B_1 的直接和．如果 T 是由 B_0 到 B_1 的綫性变换，則由关系式

$$G_T=\{[x_0,\ Tx_0],\ x_0\in\mathfrak{D}_T\} \tag{1.1.3}$$

所定义的集合 $G_T\subset B_0\times B_1$ 是綫性的，且不含形如 $[0,\ x_1]\,(x_1\neq0)$ 的元素．集合 G_T 称为 T 的图象．不含形如 $[0,\ x_1]\,(x_1\neq0)$ 的元素的綫性集合 $G\subset B_0\times B_1$ 是一个且仅一个綫性变换 T 的图象．

綫性变换 T 称为**閉的**，如果其图象 G_T 是閉的．我們也說，綫性变换 T 是**准閉的**，如果图象 G_T 的閉包 $\overline{G}_T$ 仍然是图象，亦即 $\overline{G}_T$ 不含有任何形如 $[0,\ x_1]\,(x_1\neq0)$ 的元素．具有图象 $\overline{G}_T$ 的变换称为 T 的閉包．因此，T 是准閉的充要条件是：只要在 B_0 内 $x_n\to0$，且在 B_1 内 $Tx_n\to y$，我們总有 $y=0$．我們还注意到，綫性准閉算子的任意綫性紧縮仍然是准閉算子．

下面一个定理是閉图象定理的有用形式，此閉图象定理是：由 B_0 到 B_1 的閉綫性变换 T，如果 $\mathfrak{D}_T=B_0$，則 T 必連續．(見 Bourbaki, Espaces vectoriels topologiques, Chap. 1, §3, Paris 1953.)

定理 1.1 設 $B_i\,(i=0,\ 1,\ 2)$ 是 Banach 空間，T_i 是由 B_0 到 $B_i\,(i=1,\ 2)$ 的綫性变换．如果 T_1 是閉的，T_2 是准閉的，且 $\mathfrak{D}_{T_1}\subset\mathfrak{D}_{T_2}$，則存在这样的常数 C，使得

$$|T_2u|^2\leqslant C(|T_1u|^2+|u|^2)\quad(u\in\mathfrak{D}_{T_1}). \tag{1.1.4}$$

証明 按照假定，T_1 的图象 G_{T_1} 是閉的．因而，映射

$$G_{T_1}\ni[u,\ T_1u]\to T_2u\in B_2 \tag{1.1.5}$$

定义在 Banach 空間上．我們将証明，这个映射是閉的．因此，我們假定 $[u_n,\ Tu_n]$ 在 G_{T_1} 内收斂，而 T_2u_n 在 B_2 内收斂．因为 T_1 是閉的，所以存在这样一个元素 $u\in\mathfrak{D}_{T_1}$，使得 $u_n\to u$，$T_1u_n\to T_1u$．根据假定，$u\in\mathfrak{D}_{T_2}$，又因为 T_2 是准閉的，故 T_2u_n 的极限只能为 T_2u．因而，映射(1.1.5)是閉的，并且定义在整个 Banach 空間 G_{T_1} 上．

所以根据閉图象定理,这个映射是連續的. 这便証明了定理.

定理 1.1 是我們唯一需要的关于非 Hilbert 空間的結果:当某些空間 B_i 是具有一致范数的連續函数空間时,我們也可以应用此定理. 在本节的其余部分,我們只考慮由 Hilbert 空間 H 到自身的变換. 在这种情形下,图象位于空間 $H_1\times H_2$ 内,这空間也是 Hilbert 空間, 在其中, $x=[x_0, x_1]$ 和 $y=[y_0, y_1]$ 的內积由公式 $(x, y)=(x_0, y_0)+(x_1, y_1)$給出. 关于共軛算子、算子的乘积等定义,讀者可参看 Nagy[23] (第 27 頁及以后).

引理 1.1 稠定閉綫性算子 T 的值域 $\mathfrak{R}_T$ 与 H 一致, 当且仅当 T^{*-1} 存在且連續,因而定义在閉子空間上.

証明 我們首先建立条件的必要性. 因此假設 $\mathfrak{R}_T=H$. 因为 $T^*u=0$ 蘊涵对每个 $v\in\mathfrak{D}_T$, $(Tv, u)=(v, T^*u)=0$, 从而推知, 仅当 $u=0$ 时 $T^*u=0$. 因而 T^{*-1} 被确定. 其次, 对任意元素 $v\in H$, 我們可以找到这样一个元素 w, 使得 $Tw=v$. 因此, 如果 $u\in\mathfrak{D}_{T^*}$, 就有

$$(u, v)=(u, Tw)=(T^*u, w),$$

所以对固定的 v,

$$|(u, v)|\leqslant C\|T^*u\| \quad (u\in\mathfrak{D}_{T^*}).$$

設 u_n 是 $\mathfrak{D}_{T^*}$ 中一列元素,使得序列 $\|T^*u_n\|$ 有界. 于是对任意固定的 v, $|(u_n, v)|$ 有界. 从而根据 Banach-Steinhaus 定理[見[23], 第 9 頁], 序列 $\|u_n\|$ 必有界. 因而 T^{*-1} 連續, 而因为它显然是閉的,我們断言, T^{*-1} 定义在閉子空間上.

条件的充分性容易直接証明, 或者作为下列引理的推論而得出.

引理 1.2 稠定閉綫性算子 T 有有界右逆算子 S 当且仅当 T^{*-1} 存在且連續❶.

---

❶ 这意味着, S 是連續的且定义在整个空間 H 上, 并且滿足等式 $TS=I$, 此处 I 是恒等算子.

証明　因为 $TS=I$ 蘊涵 $\mathfrak{R}_T=H$，故由我們已証明的引理 1.1 的必要性得知，有界右逆算子仅当 T^* 連續时才存在．我們构造出引理 1.2 中的右逆算子后，引理 1.1 的充分性也得到証明．

根据熟知的 Neumann 定理[24]，算子 TT^* 是自共轭和正定的．在引理的条件下，有

$$(TT^*u,\ u)=(T^*u,\ T^*u)\geqslant C^2(u,\ u)\quad (u\in\mathfrak{D}_{TT^*}),$$

此处 C 是正常数．因而 $TT^*\geqslant C^2I$．設 A 是 TT^* 的正平方根．因为 $A^2\geqslant C^2I$，由譜定理推出，$0<A^{-1}\leqslant C^{-1}I$．算子 A^{-1} 是自共軛与有界的，$\|A^{-1}\|\leqslant C^{-1}$．其次，根据 Neumann 定理，算子 T^*A^{-1} 是等距的．現在定义

$$S=T^*(TT^*)^{-1}=T^*A^{-1}A^{-1}. \tag{1.1.6}$$

因为算子 S 是等距算子与 A^{-1} 的乘积，所以必为有界，$\|S\|\leqslant C^{-1}$．最后，显然 $TS=I$．

引理 1.3　稠定閉算子 T 有全連續右逆算子 S 当且仅当 T^{*-1} 存在且全連續．

証明　首先我們注意到，如果 T^{*-1} 全連續，因而 A^{-1} 全連續，則由 (1.1.6) 所定义的算子 S 是全連續的．这就証明了引理的充分性．現在假設，算子 T 有全連續右逆算子 S．如果 $u\in\mathfrak{D}_{T^*}$，則对任意 $v\in H$，我們有

$$(u,\ v)=(u,\ TSv)=(S^*T^*u,\ v),$$

因而 $u=S^*T^*u$．所以，如果 $v\in\mathfrak{R}_{T^*}$，則 $T^{*-1}v=S^*v$．这便証得 T^{*-1} 全連續，因为它是全連續算子的緊縮．

1.2　微分算子的定义

設 Ω 是 ν 維无穷可微流形．我們以 $C^\infty(\Omega)$ 記定义在 Ω 内的无穷次可微函数的集合，以 $C_0^\infty(\Omega)$ 記 $C^\infty(\Omega)$ 中的在 Ω 内一个列緊

子集之外为零的函数的集合．当不致引起誤会时，我們也簡单地写为 C^∞ 与 C_0^∞．

由 $C^\infty(\Omega)$ 到自身的变换 $\mathfrak{P}$ 称为微分算子，如果在局部坐标系 $(x^1, x^2, \cdots, x^\nu)$ 中，它具有下列的形式：

$$\mathfrak{P}u=\sum a^{\alpha_1\cdots\alpha_k}(x)\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}}\cdots\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha_k}}u, \tag{1.2.1}$$

此处的和仅包含有限个不为零的項，系数 $a^{\alpha_1\cdots\alpha_k}(x)$ 是 x 的无穷次可微函数，且当置换指标 α_j 时不变❶．我們以 α 記从 1 到 ν 間的指标列 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$，并以 $|\alpha|$ 記其长 k．其次，我們令

$$D_j=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x^j},\quad D_\alpha=D_{\alpha_1}\cdots D_{\alpha_k}.$$

则公式(1.2.1)取以后常用的較簡单的形式：

$$\mathfrak{P}u=\sum a^\alpha(x)D_\alpha u, \tag{1.2.2}$$

此处的和取遍序列 α．

我們說，一个微分算子是常系数的，如果 Ω 是 ν 維实向量空間 R^ν 中的一个区域，并且当坐标是綫性时，(1.2.2)中的系数是常数．

設 ρ 是 Ω 中一个固定的密度，即 $\rho(x)$ 是定义在任意局部坐标系中的正值函数，使得 $\rho(x)dx^1\cdots dx^\nu$ 是一个不变測度．記这不变測度为 dx．我們认为 $\rho(x)$ 是无穷可微函数，而且在 $\mathfrak{P}$ 具有常系数的情形下，我們总取 $\rho(x)=\text{const}$．

我們将在所有按測度 dx 平方可积的函数所构成的 Hilbert 空間 L^2 内研究微分算子．这个空間中的內积为

$$(u, v)=\int u(x)\overline{v(x)}dx. \tag{1.2.3}$$

---

❶ 为了叙述簡便起見，我們只限于无穷可微函数的情形．然而許多討論与結果具有更大的一般性，在第四章中，这些討論与結果是在足够高次可微性的較弱假設下被应用的．

相对于这个内积，我們以下列方式定义 $\mathfrak{P}$ 的**代数共轭算子** $\overline{\mathfrak{P}}$：設 $v\in C^\infty$，且 u 为 C_0^∞ 中的任意函数，对 $(\mathfrak{P}u, v)$ 进行分部积分，我們便得到唯一的微分算子 $\overline{\mathfrak{P}}$，使得

$$(\mathfrak{P}u, v)=(u, \overline{\mathfrak{P}}v). \tag{1.2.4}$$

事实上，我們得到

$$\overline{\mathfrak{P}}v=\rho^{-1}\sum D_\alpha(\rho\bar{a}^\alpha v).$$

当系数是常数时，$\overline{\mathfrak{P}}$ 可由系数取共軛得出，这便是我們引入記号 $\overline{\mathfrak{P}}$ 的原因.

引理 1.4 对 C^∞ 中函数 u 定义的算子 $\mathfrak{P}$，只要 u 与 $\mathfrak{P}u$ 均为平方可积，则 $\mathfrak{P}$ 在 L^2 中必是准閉的.

証明 設 u_n 是所指出的范圍內的函数序列，使得 $u_n\to 0$ 与 $\mathfrak{P}u_n\to v$（在 L^2 意义下）．則对任意 $f\in C_0^\infty$，有

$$(v, f)=\lim(\mathfrak{P}u_n, f)=\lim(u_n, \overline{\mathfrak{P}}f)=0,$$

故 $v=0$．引理得証.

附注 容易看出，例如，把 $\mathfrak{P}$ 考虑为由 L^2 到具有一致范数的連續函数空間 C 上的算子时，引理 1.4 仍然是正确的.

引理 1.4 証实下面一个重要定义的合理性.

定义 1.1 具定义域 C_0^∞ 的算子 $\mathfrak{P}$ 在空間 L^2 中的閉包 P_0 称为由 $\mathfrak{P}$ 所定义的最小算子．与由 $\overline{\mathfrak{P}}$ 所定义的最小算子 $\overline{P}_0$ 共軛的算子 P 称为由 $\mathfrak{P}$ 所定义的最大算子.

最大算子 P 的定义意味着：$u\in\mathfrak{D}_P$ 与 $Pu=f$ 当且仅当 u 与 f 同属于 L^2，且对任意 $v\in C_0^\infty$，有

$$(f, v)=(u, \overline{\mathfrak{P}}v).$$

以这样方式定义的算子，通常叫做弱扩張．在广义函数的更一般的术語中（見 Schwartz[28]），我們也可以說，算子 P 的定义域由这样的函数 $u\in L^2$ 所构成：$\mathfrak{P}u$ 在广义函数意义下是 L^2 中的函数.

如果 $u\in C^\infty$，并且 u 与 $\mathfrak{P}u$ 平方可积，则由 (1.2.4) 推知，Pu

存在且 $Pu=\mathfrak{P}u$. 当然，这就是定义的思想基础. 因为 P 是共軛算子，故是閉的，从而是 P_0 的一个扩張.

作者尚不知道，在一般的情况下，P 是否是它在 $\mathfrak{D}_P\cap C^\infty$ 上的緊縮的閉包. 对具有光滑边界的区域中的二阶椭圓型方程，这个結論由 M. Бирман 的結果得到[1]. 如果 $\mathfrak{P}$ 是常系数的齐次算子，而区域 Ω 关于某个开集的每一点是星形的，則这个結論借助于正規化也容易証明. 在第 3.9 节中，当 Ω 是任意区域时，对某类常系数微分算子，所提出的問題将得到肯定的回答.

現在我們用一个簡单的例子来說明定义 1.1. 設 Ω 是实軸上的一个有限区間 $(a,\ b)$，$\mathfrak{P}=\dfrac{d^n}{dx^n}$. 可直接驗証，最大算子 P 的定义域由滿足下列条件的函数 u 所組成：u 具有直到 $n-1$ 阶連續导数，且 $u^{(n-1)}(x)$ 絕对連續并具有平方可积的导数. 最小算子 P_0 的定义域則由 $\mathfrak{D}_P$ 中滿足下列条件的函数 u 所組成：

$$u(a)=\cdots=u^{(n-1)}(a)=0,$$

$$u(b)=\cdots=u^{(n-1)}(b)=0,$$

也就是說，由在 a 与 b 点处关于微分算子 $\mathfrak{P}$ 在古典意义下滿足零 Cauchy 数据的函数所組成.

对于任意的 n 阶常微分算子，同样的結果在适当的正規条件下仍然是正确的. 因此，一般說来，一个常微分算子的最大(最小)区域包含在同阶的或較低阶的任一常微分算子的最大(最小)区域中. 对偏微分算子，这个結果不再正确，但是我們将找出一个适当的結果来代替它. 为了使我們結果的叙述更为方便，引入下面的定义.

定义 1.2 如果 $\mathfrak{D}_{P_0}\subset\mathfrak{D}_{Q_0}$，我們便說算子 $\mathfrak{P}$ 强于算子 $\mathfrak{Q}$，或者 $\mathfrak{Q}$ 弱于 $\mathfrak{P}$. 如果 $\mathfrak{D}_{P_0}=\mathfrak{D}_{Q_0}$，則說 $\mathfrak{P}$ 与 $\mathfrak{Q}$ 是等强的❶.

❶ 这些概念依賴于基本流形 Ω.

現在我們提出关于确定弱于一个給定算子 $\mathfrak{P}$ 的那些算子 $\mathfrak{Q}$ 的集合的問題. 显然，回答应該是密切地联系到 $\mathfrak{D}_{P_0}$ 中的函数的正規性与边界性质. 这个問題由下面的引理归結为一个具体的問題.

引理 1.5 算子 $\mathfrak{Q}$ 弱于算子 $\mathfrak{P}$ 当且仅当存在这样的常数 C，使得

$$\|\mathfrak{Q}u\|^2 \leqslant C^2(\|\mathfrak{P}u\|^2+\|u\|^2) \quad (u\in C_0^\infty). \qquad (1.2.5)$$

証明 如果 $\mathfrak{Q}$ 弱于 $\mathfrak{P}$，則由定理 1.1 有

$$\|Q_0u\|^2 \leqslant C^2(\|P_0u\|^2+\|u\|^2) \quad (u\in \mathfrak{D}_{P_0}),$$

由此推出(1.2.5)成立. 另一方面，設(1.2.5)成立. 若 $u\in\mathfrak{D}_{P_0}$，則我們可以从 C_0^∞ 中选出函数序列 u_n，使得

$$u_n\to u, \quad \mathfrak{P}u_n\to P_0u.$$

对 u_m-u_n 利用(1.2.5)，我們推知 $\mathfrak{Q}u_n$ 是基本列. 又因为 Q_0 是閉的，于是 $u\in\mathfrak{D}_{Q_0}$.

在下列几章中，我們将不只一次地利用引理 1.5 所給出的准則. 在第二章中，当 Ω 是 R^ν 內的有界区域时，我們找到了弱于給定常系数算子 $\mathfrak{P}$ 的常系数算子 $\mathfrak{Q}$ 的簡单而又完整的描述(在这种情形下，問題的回答不依賴于 Ω). 在第四章中，对一类变系数算子将得出类似的結果.

附注 若 $\mathfrak{D}_{P_0}\subset\mathfrak{D}_Q$，則由定理 1.1 幷利用証明引理 1.5 所使用的方法，就可推得 (1.2.5) 成立. 因此，$\mathfrak{D}_{P_0}\subset\mathfrak{D}_{Q_0}$，故 $\mathfrak{Q}$ 弱于 $\mathfrak{P}$. 这便指出，在定义 1.2 中，我們可以較弱的条件 $\mathfrak{D}_{P_0}\subset\mathfrak{D}_Q$ 代替 $\mathfrak{D}_{P_0}\subset\mathfrak{D}_{Q_0}$. 还要指出，在定义 1.2 以及我們所討論的大多数情况下，我們使用的是最小微分算子而不是最大微分算子，这是由于，如同在第二章中将要証明的，对偏微分算子来說，关系式 $\mathfrak{D}_P\subset\mathfrak{D}_Q$ 只在特殊情况下才成立.

現在我們来引进这样的条件，使对每个 $u\in\mathfrak{D}_{P_0}$，$\mathfrak{Q}u$ 在一个測

度为零的集合上校正以后是一个連續函数，此处算子 $\mathfrak{Q}$ 应該按广义函数的意义来理解. 借助于这个結果，可以把微分方程的弱解轉化为古典解. Соболев 曾研究过类似的問題[30]，但是我們的結果与他的結果很少重复.

引理 1.6 对每个 $u\in\mathfrak{D}_{P_0}$，为使 $\mathfrak{Q}u$ 在广义函数意义下等于一个有界函数，其充分必要条件是存在这样的常数 C，使得

$$\sup_{\Omega}|\mathfrak{Q}u|^2\leqslant C(\|\mathfrak{P}u\|^2+\|u\|^2)\quad(u\in C_0^\infty).\qquad(1.2.6)$$

如果(1.2.6)成立，則若 $u\in\mathfrak{D}_{P_0}$，$\mathfrak{Q}u$ 在零測集上校正后，在 Ω 内是一个一致連續函数，并且在边界上，$\mathfrak{Q}u$ 在下列意义下趋于零：对于任意的 $\varepsilon>0$，在 Ω 内存在这样的列紧集合 K，使得在 $\Omega-K$ 内，$|\mathfrak{Q}u|<\varepsilon$.

証明 如果我們把 $\mathfrak{Q}$ 考慮为由 L^2 到 L^∞ 的算子并注意到引理 1.4 后面的附注，則条件 (1.2.6) 为必要条件可由定理 1.1 推出. 反之，設(1.2.6)成立. 設 u_n 是 C_0^∞ 中一列函数，使得 $u_n\to u$，$\mathfrak{P}u_n\to P_0u$，此处 u 是 $\mathfrak{D}_{P_0}$ 中的任意函数. 則 $\mathfrak{Q}u_n$ 一致收斂，且因这个极限必須几乎处处等于 $\mathfrak{Q}u$，所以引理的后一論断得証.

引理的后一部分亦可陈述如次：$\mathfrak{Q}u$ 是連續的并且在 Ω 的 Александров 紧化中无穷远处为零.

現在我們轉向另一个問題，即微分方程解的存在問題. 引理 1.1 与最大算子 P 作为 $\overline{P}_0$ 的共軛算子的定义証实了下面的結果.

引理 1.7 方程 $Pu=f$ 对任意 $f\in L^2$ 至少有一解 $u\in\mathfrak{D}_P$，当且仅当 $\overline{P}_0$ 有連續的逆算子，即

$$(u,\ u)\leqslant C^2(\overline{\mathfrak{P}}u,\ \overline{\mathfrak{P}}u)\quad(u\in C_0^\infty),\qquad(1.2.7)$$

此处 C 为常数.

在第二章与第四章中，我們将証明在关于算子 $\mathfrak{P}$ 的很弱的假設下，条件(1.2.7)仍然成立.

1.3 Cauchy 数据与边界問題

第 7 頁中的例子表明，$\mathfrak{D}_{P_0}$ 中的函数恰好滿足关于算子 P 的零 Cauchy 数据，于是我們引入下列定义：

定义 1.3 具有商范数的商空間

$$C = G_P / G_{P_0} \tag{1.3.1}$$

称为算子 P 的 Cauchy 空間. 如果 $u \in \mathfrak{D}_P$，則元序偶 $[u, Pu]$ 的剩余类是 C 中的元素，称此元素为 C 的 Cauchy 数据，并以 Γu 表示.

由定义立得，$\mathfrak{D}_P$ 中的二个函数，如果它們仅相差一个在 $C_0^\infty(\Omega)$ 中的函数，則这二个函数具有同一的 Cauchy 数据. 当系数是常数时，容易証明(引理 2.11)，$\mathfrak{D}_P$ 中的每个函数，如果它在 Ω 內某一个列紧集合之外等于零，則此函数也属于 $\mathfrak{D}_{P_0}$. 从而推知，$\mathfrak{D}_P$ 中的二个函数，如果它們在 Ω 內某一列紧集合之外恒等，則这二个函数具有同一的 Cauchy 数据. 自然期望，同样的結論对于更一般的算子亦为正确，虽然在这里我們沒有得到任何証明.

第 7 頁中例子也提供下列定义：

定义 1.4 設 B 是算子 P 的 Cauchy 空間 C 中的綫性流形. 对任何給定的 $g \in L^2$，求方程

$$Pf = g, \quad \Gamma f \in B \tag{1.3.2}$$

的解 f 的問題称为綫性齐次边界問題，$\Gamma f \in B$ 是边界条件.

設 $\hat{P}$ 是 P 在适合 $\Gamma f \in B$ 的諸 f 上的紧縮，于是 $\hat{P}$ 是綫性算子，且

$$P_0 \subset \hat{P} \subset P. \tag{1.3.3}$$

相反，具有这一性质的任何綫性算子 $\hat{P}$ 精确地对应于 C 內的一个

綫性流形 B.

定义 1.5 边界問題(1.3.2)称为(完全)适定的，如果 $\hat{P}$ 具有定义在整个空間 L^2 上的(全)連續逆算子.

这个定义与下面一个結果基本上是属于 M. И. Вишик[34] 的，他也考虑比較弱的定义.

定理 1.2 算子 P 存在(完全)适定的边界問題当且仅当算子 P_0 与 $\bar{P}_0$ 有(全)連續逆算子.

証明 假設存在适定的边界問題，且設 $\hat{P}$ 为对应的算子. 因为 $\hat{P}^{-1}$(全)連續且 $\hat{P}\supset P_0$，因此 P_0^{-1} 必(全)連續. 而因 $\hat{P}^{-1}$ 是 P 的右逆算子，故由引理 1.2(引理 1.3)推知，$\bar{P}_0^{-1}$(全)連續.

現在假設 P_0^{-1} 与 $\bar{P}_0^{-1}$ (全)連續. 由于算子 P_0^{-1} 的連續性，算子 P_0 的值域 $\mathfrak{R}_{P_0}$ 是閉的. 設 π 是在 $\mathfrak{R}_{P_0}$ 上的正交投影，如果 S 是引理 1.2(引理 1.3)中所作的关于 P 的右逆算子，則由等式

$$Tf=P_0^{-1}(\pi f)+S((I-\pi)f) \quad (f\in L^2)$$

所定义的算子 T 是(全)連續的. 因为

$$PTf=\pi f+(I-\pi)f=f,$$

故算子 T 有逆算子 $\hat{P}$，并且 $\hat{P}\subset P$. 其次，$T\supset P_0^{-1}$，因而 $\hat{P}\supset P_0$，所以 $P_0\subset\hat{P}\subset P$. 因此 $\hat{P}^{-1}$(全)連續，且定义在整个空間 L^2 上. 証毕.

現在，我們将导出一个不同于 M. И. Вишик 所給出的适定边界問題的描述. 設 U 是齐次方程 $Pu=0$ 的解 u 的集合，因为 P 是閉算子，所以 U 是 L^2 中的閉子空間.

引理 1.8 假設算子 P_0^{-1} 連續，則边界算子 Γ 在集合 U 上的紧縮 γ 拓扑映射 U 到空間 C 中閉子空間 ΓU 上.

証明 設 A 是这样的常数，使得

$$\|P_0f\|\geqslant A\|f\| \quad (f\in\mathfrak{D}_{P_0}),$$

則我們有，如果 $u\in U$，