国家高职、高专教育高等数学系列教材

Gaozhi Jiaoyu

# 线性代数

主　编　刘书田
副主编　胡显佑　高旅端
编著者　胡显佑　赵佳因

北京大学出版社

国家高职、高专教育高等数学系列教材

# 线性代数


主　编　刘书田

副主编　胡显佑　高旅端

编著者　胡显佑　赵佳因



北京大学出版社

·北　京·

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数/胡显佑,赵佳因编著. —北京:北京大学出版社,
2001.1
ISBN 7-301-04796-7

Ⅰ.线… Ⅱ.①胡… ②赵… Ⅲ.线性代数-高等学校-教
Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 77995 号

**书　　名**:线性代数
著作责任者:胡显佑　赵佳因　编著
责 任 编 辑:刘　勇　王国义
标 准 书 号:ISBN 7-301-04796-7/O·498
出　版　者:北京大学出版社
地　　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　　址:http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm
电　　　话:出版部 62752015　发行部 62754140　理科编辑部 62752021
电 子 信 箱:zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者:北京大学印刷厂
发　行　者:北京大学出版社
经　销　者:新华书店
850×1168　32 开本　5.5 印张　140 千字
2001 年 1 月第 1 版　2001 年 1 月第 1 次印刷
印　　　数:0001—8000 册
定　　　价:9.00 元

# 内 容 简 介

本书是国家高等职业、高等专科教育高等数学系列教材之一的“线性代数”基础课的教材.本书依照教育部颁布的高职、高专高等数学教学大纲,并结合作者多年来为高职班学生讲授“线性代数”课所积累的教学经验编写而成.全书共分四章,内容包括:矩阵、行列式、线性方程组、矩阵的特征值和特征向量等.本书针对高职、高专学生的接收能力、理解程度讲述“线性代数”课的基本内容,叙述通俗易懂、简明扼要、富有启发性,便于自学;本书注重对学生基础知识的训练和综合能力的培养,每节配置了适量的习题,书末附有参考答案与提示,便于教师和学生使用.

本书可作为高等职业、高等专科学生“线性代数”课的教材或教学参考书,对数学爱好者本书也是一本较好的“线性代数”自学教材.

# 高职、高专教育高等数学系列
# 教材出版委员会

## 国家高职、高专教育高等数学系列教材

| | |
|---|---|
| 高等数学(上、下册) | 刘书田等编著 |
| 高等数学学习辅导 | 刘书田等编著 |
| 线性代数 | 胡显佑等编著 |
| 线性代数学习辅导 | 胡显佑等编著 |
| 概率统计 | 高旅端等编著 |
| 概率统计学习辅导 | 高旅端等编著 |

# 前　言

为了适应我国高等职业教育、高等专科教育的迅速发展，满足当前高职教育高等数学课程教学上的需要，我们依照教育部颁布的高等职业教育高等数学教学大纲，为高职、高专经济类、管理类及工科类学生编写了本套高等数学系列教材. 本套书包括教材三个分册：《高等数学》、《线性代数》、《概率统计》，并编有配套辅导教材三个分册：《高等数学学习辅导》、《线性代数学习辅导》、《概率统计学习辅导》，总共6分册.

编写本套系列教材的宗旨是：以提高高等职业教育教学质量为指导思想，以培养高素质应用型人材为总目标，力求教材内容"涵盖大纲、易学、实用". 因此，我们综合了高等院校高职、高专经济类、管理类及工科类高等数学教学大纲的要求，在三个分册的主教材中分别系统介绍了"微积分"、"线性代数"、"概率统计"的基本理论、基本方法及其应用. 本套系列教材具有以下特点：

1. 教材的编写紧扣教学大纲，慎重选择教材内容. 既考虑到高等数学本学科的科学性，又能针对高职班学生的接收能力和理解程度，适当选取教材内容的深度和广度；既注重从实际问题引入基本概念，揭示概念的实质，又注重基本概念的几何解释、经济背景和物理意义，以使教学内容形象、直观，便于学生理解和掌握，并达到"学以致用"的目的.

2. 为使学生更好地掌握教材的内容，我们编写了配套的辅导教材，教材与辅导教材的章节内容同步，但侧重点不同. 辅导教材每章按照：教学要求、内容提要与解题指导，自测题与参考解答三部分内容编写. 教学要求指明学生应掌握、理解或了解的知识点；内容提要把重要的定义、定理、性质以及容易混淆的概念给出提

示；解题指导是通过典型例题的解法给出点评、分析与说明，指出初学者易犯的错误，教会学生数学思维的方法，总结出解题规律. 教材与辅导教材相辅相成，同步使用，以达到培养学生的思维、逻辑推理能力，运算能力及运用所学知识分析问题和解决问题的能力.

3. 本套教材叙述通俗易懂、简明扼要、富有启发性，便于自学；注意用语确切，行文严谨. 教材每节后配有适量习题，书后附有习题答案和解法提示. 辅导教材按章配有自测题并给出较详细的参考解答，便于教师和学生使用.

本套系列教材的编写和出版，得到了北京大学出版社的大力支持和帮助，同行专家和教授提出了许多宝贵的建议，在此一并致谢！

限于编者水平，书中难免有不妥之处，恳请读者指正.

编　者

2001 年 1 月于北京

# 目　　录

# 第一章 矩　阵

矩阵是数学中一个重要的概念.它被广泛地应用到现代管理科学、自然科学、工程技术等各个领域.矩阵是线性代数的主要研究对象之一.本章主要介绍矩阵的概念及运算,矩阵的初等变换及逆矩阵.

## §1.1 矩阵的概念

我们平时常用列表的方式表示一些数据及其关系.如学生成绩表、工资表、物资调运表等等.为了处理方便可以将它们按照一定的顺序组成一个矩形数表,先看两个实际例子.

**例1** 假设我们记录4名学生3门课程的考试成绩,4名学生分别用 $A,B,C,D$ 表示;课程分别用1,2,3表示.每个学生每门课程有3个成绩.第一个为平时作业成绩,第二个为平时小测验成绩,第三个为期末考试成绩.每次成绩按10分记录.我们得到平时、测验、考试三张成绩表.

**表1 平时成绩表**

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $A$ | 6 | 8 | 9 |
| $B$ | 8 | 5 | 8 |
| $C$ | 8 | 7 | 8 |
| $D$ | 1 | 6 | 6 |

**表2 测验成绩表**

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $A$ | 5 | 9 | 8 |
| $B$ | 6 | 7 | 9 |
| $C$ | 7 | 8 | 8 |
| $D$ | 5 | 6 | 7 |

**表3 考试成绩表**

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $A$ | 6 | 7 | 9 |
| $B$ | 8 | 6 | 9 |
| $C$ | 8 | 7 | 8 |
| $D$ | 6 | 5 | 6 |

如果只抽出表格中的分数,分别得到学生成绩的三个矩形表(1),(2),(3),

$$\begin{bmatrix}6 & 8 & 9\\8 & 5 & 8\\8 & 7 & 8\\4 & 6 & 6\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}5 & 9 & 8\\6 & 7 & 9\\7 & 8 & 8\\5 & 6 & 7\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}6 & 7 & 9\\8 & 6 & 9\\8 & 7 & 8\\6 & 5 & 6\end{bmatrix}.$$

（1）　　　（2）　　　（3）

同时，我们也可以得到每个学生每门课程总成绩矩形数表(4)（不考虑加权）

$$\begin{bmatrix}17 & 24 & 26\\22 & 18 & 26\\23 & 22 & 24\\15 & 17 & 19\end{bmatrix}.$$

（4）

其中第二行第一个数 22 表示 $B$ 同学"课程 1"的总成绩为 22 分.

**例 2**　某化工公司下属三家企业，都生产 $A,B,C,D$ 四种产品. 1999 年底的库存量如下表（单位吨）：

| 企业 \ 库存量 \ 产品 | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ |
|---|---|---|---|---|
| 一 | 1000 | 900 | 1100 | 500 |
| 二 | 900 | 1000 | 1200 | 1000 |
| 三 | 800 | 400 | 700 | 300 |

此库存量表可以简单地写成矩形数表的形式：

$$\begin{bmatrix}1000 & 900 & 1100 & 500\\900 & 1000 & 1200 & 1000\\800 & 400 & 700 & 300\end{bmatrix},$$

其中第三行第 2 个数 400 表示第三家企业产品 $B$ 的库存量为 400 吨.

显然上述这些数表，每个位置上的数都具有其固定的含义，不

能随意调换，这种数表在数学上被称为**矩阵**.

**定义 1.1** 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 组成一个 $m$ 行 $n$ 列的矩形数表，称为一个 $m\times n$ 的**矩阵**，记作

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

通常用大写字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 表示矩阵，也可以记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $(a_{ij})_{m\times n}$ 以标明行数 $m$ 与列数 $n$，其中 $a_{ij}$ 称为矩阵第 $i$ 行、第 $j$ 列的**元素**.

例 1 中四个矩形数表分别就是四个矩阵，其中第一个矩阵中 $a_{12}=8$，$a_{43}=6$. 例 2 中的矩形表是一个 $3\times4$ 的矩阵，其中 $a_{33}=700$.

矩阵的元素可以全是实数，也可以出现复数，或者元素本身就是矩阵或其他更一般的数学对象，分别称它们为**实矩阵**、**复矩阵**、**超越矩阵**等. 本书中涉及到的均为实矩阵.

**定义 1.2** 如果 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $s\times t$ 矩阵，当 $m=s,n=t$ 时称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是**同型矩阵**. 两个同型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，如果对于任意的 $i,j(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 都有 $a_{ij}=b_{ij}$，则称**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等**，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

例如，例 1 中的四个矩阵均为 $4\times3$ 的同型矩阵. 又如

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

是 $2\times3$ 的同型矩阵，当 $a=1,b=2,c=3,d=4,e=5,f=6$ 时，称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

只有一行的矩阵称为**行矩阵**（也称为行向量），记作 $\boldsymbol{A}_{1\times n}=(a_{11}\ \ a_{12}\ \ \cdots\ \ a_{1n})$；只有一列的矩阵称为**列矩阵**（也称为列向量），记作

$$\boldsymbol{A}_{m\times1}=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}.$$

当矩阵的行数和列数相等时,即 $m=n$ 时,称该矩阵为 **$n$ 阶矩阵或 $n$ 阶方阵**,记作 $\boldsymbol{A}_n$,即

$$\boldsymbol{A}_n=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

$n$ 阶方阵从左上角到右下角的对角线上的元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 称为**主对角线元素**.

在方阵中,若主对角线以外的元素都为零,则这个方阵被称为**对角方阵**,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

特别地,在对角方阵中,当 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=1$ 时,这个方阵被称为**单位矩阵**,记作 $\boldsymbol{E}$,即

$$\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

必要时在其右下角标明阶数,例如,

$$\boldsymbol{E}_{3\times 3}=\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

所有元素都为零的矩阵,称为**零矩阵**,记为 $\boldsymbol{O}$,即

$$\boldsymbol{O}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

必要时也在其右下角标明阶数，例如，

$$O_{2\times 2}=O_2=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},\quad O_{3\times 1}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

### 习　题　1.1

1. 试写出一个 $3\times 4$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times 4}$ 使其满足 $a_{ij}=i+j$ ($i=1,2,3$；$j=1,2,3,4$).

2. 写出一个四阶单位矩阵.

3. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a+2b & 3a-c\\ b-3d & a-b\end{bmatrix}$，如果 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，求 $a,b,c,d$ 的值.

## §1.2　矩阵的运算

无论在数学上还是在实际应用中，矩阵都是一个很重要的概念. 如果仅把矩阵作为一个数表，就不能充分发挥其作用. 因此，对矩阵定义一些运算就显得十分必要.

例如对于例1给出的前三个成绩数表，我们要得出每个学生每门课程总成绩矩阵 $\boldsymbol{T}$（假设平时、测验、考试在总成绩中所占的比例相同）只需把前三个矩阵的对应分量相加得到矩阵

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}6&8&9\\8&5&8\\8&7&8\\4&6&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5&9&8\\6&7&9\\7&8&8\\5&6&7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6&7&9\\8&6&9\\8&7&8\\6&5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17&24&26\\22&18&26\\23&22&24\\15&17&19\end{bmatrix},$$

这就是矩阵的一种运算. 矩阵运算主要包括以下几种：

### 一、矩阵的加法

**定义 1.3**　设有两个 $m\times n$ 矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix},$$

将它们的对应元素相加，所得到的 $m\times n$ 矩阵称为**矩阵 $A$ 与矩阵 $B$ 的和**，记作 $A+B$，即

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

**例 1** 已知

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

求 $A+B$.

**解** $A+B=\begin{bmatrix} 2+1 & 1+7 & 5+5 \\ 3+4 & 2+3 & 7+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 8 & 10 \\ 7 & 5 & 8 \end{bmatrix}.$

由定义可知，只有行数与列数分别相同的两个矩阵才能相加，即只有同型矩阵才能相加，且矩阵相加就是对应元素相加. 由于数字相加有交换律和结合律，因此矩阵加法有以下性质：

设 $A,B,C$ 为同型矩阵，则

(1) $A+B=B+A$  交换律；

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$  结合律；

(3) $A+O=A$.

由性质(3)可以看出，零矩阵在矩阵代数中起着普通数 0 的作用.