线性与
非线性波导论

郭秉荣编著

气象出版社

线性与非线性波导论

郭秉荣 编著

气象出版社

内 容 简 介

本书简明、系统地论述了线性与非线性波的基础理论和最新成果，重点是讲述非线性波动方程的准确解析解法和近似解析解法。数学推导严谨，物理概念清晰，文字流畅易读，适合气象、海洋、非线性光学、等离子体物理、流体力学和应用数学等方面的高年级学生、研究生、教师及有关科研工作者阅读。

线性与非线性波导论

郭秉荣 编著
责任编辑 杨长新
*
气象出版社 出版
(北京西郊白石桥路46号)
北京昌平环球科技印刷厂印刷
新华书店总店科技发行所发行 全国各地新华书店经销
*
开本: 850×1168 1/32 印张: 11.125 字数: 279千字
1990年9月第1版 1990年9月第1次印刷
印数: 1—1000 定价: 2.30元
ISBN 7/5029-0427-1/P·0245 (课)

前 言

波动问题是一个既老又新的研究课题。线性波动理论已有很长的发展历史，不少研究成果已升华到经典阶段。随着科学技术的发展，人们对波动现象的认识和研究更加深入。一百多年前，非线性波问题的研究已经开始，特别是近半个世纪以来，高速电子计算机的应用，非线性波理论发展迅速，成果显著，这不仅表现在这方面的论文、著述与日俱增，更重要的是它的广泛、有价值的应用为人们瞩目。波动问题面很广，涉及力学、物理、生物、地质、天文、气象和海洋等很多领域。在不同的学科领域，波动表征形式可以各种各样，但波作为物质运动的一种形式，它所遵循的物理定律应是相同的，它的数学表达形式，即所满足的微分方程也是统一的。因此，对波动问题的研究除了实验方面外，以数学为工具，求波动方程的解是解决波动问题和波动理论发展的一个重要方面。关于方程的求解可分为准确解析解、近似解析解和数值解等，但本书只涉及前两种求解方法。正因为波动问题面广而复杂，不能设想有一本波动问题大全的书，现有的著述，都是侧重介绍波动问题的某些方面而各具特色，这对不同的读者对象更为适合。本书简明、系统地介绍了线性与非线性波的基础理论，重点讲述非线性波理论的新成果。主要讲非线性波动方程的准确解法，也讲近似解法。目的是为波动理论研究工作者提供有关动力分析的有力工具。其内容适合气象、海洋、非线性光学、等离子体物理、流体力学和应用数学方面的读者。考虑到不同程度读者的需要，全书对数学公式的推导和物理概念的阐释力求严谨、清晰，使之易读易懂。

由于水平所限、缺点、错误难免，恳请读者指正。

作者

1989年7月于武汉大学

目　录

第一章　引论与基本方程

§1　引　　论

波：波是普遍存在的一种物理现象，可以说，人类是生活在波的世界，时时处处都有各种各样的波，如声波、电磁波、水波以及大气波动等等。什么叫波呢？似乎没有一个明确的定义说明波到底是什么构成的，要想包括所有的波动现象，可以广义地、直观地认为，波是以可以识别的传播速度从介质的一部分传到另一部分的任何可以识别的讯号。不过对于某一类具体波动而言，其定义虽有局限性，但可以明确得多。波可以分为两大类：一类是机械波；一类是电磁波。所谓机械波是物体或物质在其平衡位置附近振动，它带动周围的介质振动，这种振动在介质中的传播所形成的波。这种机械波可以在气体介质中传播，也可以在液体或固体介质中传播。我们将气体和液体统称为流体，本书只讨论各种流体中的波动。

研究波动的意义：波给人类的生产、生活带来多方面的影响，有利有弊，换句话说，人类既可以利用波为自身服务，同时，也必须克服、防止波造成的危害。例如利用声波原理可作音响合理的建筑设计，可以制作声呐系统监视潜艇的活动。如果没有对电磁波研究的成就，就不可能有收发报机、电视机这样现代的物质文明。地震危害是地震波造成的，要预报地震，必须研究震源的形成和地震波的传播规律。原子弹威力大的一个重要方面是爆炸形成的强度极高的冲激波以及它随带的强风暴，其速度可达50/秒，超过12级台风。研究冲激波的传播、强度以及冲激波与建筑物的相互作用，在国防上有重要意义。船舰在江、海中航行，

形成水波，产生波阻力，人们要设计合理的船体以减少波阻力。气候的寒来暑往，天气的冷暖雨晴都与大气的波动紧密相关，要预报天气就必须研究大气波动的规律。此外，波动作为一种学科分支还渗透到生物、天文、化学、光学以及等离子体物理等众多科学领域。从上面举例可知，研究波动有重要的理论意义和实际意义。

线性与非线性波：波传播满足物理定律，物理定律的数学表达行式是微分方程。一般情况下，波动方程是非线性的，当波的振幅很小时，非线性方程可以线性化，此称为线性波。如果是有限振幅波，线性化理论不适用，称为非线性波。这种划分是人为的，但是合理的，因为客观上确实存在小振幅波和振幅大的波。实际结果表明，线性波动方程的解确实能刻划小振幅波的特性，有限振幅波的情况则不然。这种划分为数学研究带来方便，线性微分方程理论成熟，线性波问题研究得充分。但是，在自然界和实际问题中，线性波是有条件的、特殊的。更大量、更一般的是非线性波。对分析和实际应用而言，物理系统的一些最有意义和最重要的性质却正是表现在非线性相互作用中，实际的物理系统的数学模型的优劣也正是由模型中描述非线性相互作用的部分（非线性项）所决定，甚至弱的非线性也隐含着许多新的和料想不到的物理属性。因此，不满足于线性波理论，非线性波理论极需发展。

数值解和解析解：电子计算机的应用，大大推动了计算数学的发展，过去看来很难解决的数学问题，现在可以用计算机实现了，这特别表现在非线性方程求解方面。例如大气动力学方程是非线性的，1948年美国人用世界上第一台电子计算机求方程的数值解，成功地实现了24小时和36小时的天气预报，这在气象科学史上是很大的成功。在今天，从数值解带来的众多成就来看，充分肯定它的作用是应该的，但这并不意味着研究解析解已失去意义。首先是数值解有局限性，因为它只能对给定的个别初值数值，算出

数值解，而且只能计算有限次，这样，数值解不可能包含原方程解所表示的无穷情况的全局特征。在有些情况下，我们并不需要知道一些个别解的具体数值，而希望了解方程解的一般定性特征，这对问题的认识往往更深刻得多。例如，对一个非线性演化系统，我们希望知道这个系统的终态，即时间 $t\to\infty$ 的系统的渐近状态，还有解的全局特征如何？数值解无法回答这些问题，因为计算再多时间得到的数值解也不能认为是当 $t\to\infty$ 时解的终态，再多的有限数目的初值的解也不能体现解的全局特征（对所有初值）。这些问题只能靠解析解，或定性分析与数值计算相结合来解决。其次，数值解本身还存在非线性计算不稳定和解的可靠性问题。因此，求非线性方程的解析解的工作，仍有很大的吸引力。

本书包括线性波与非线性波，但主要讲非线性波，并且主要讲非线性波动方程的准确解法，同时也介绍一些有效的近似解法。第一章简略地、不加推导地引用了流体动力学一般形式的基本方程，作为全书讨论问题的出发点。第二章讲一维流体中的波动，重点介绍无耗散效应与有耗散效应的一维平流方程的准确解法，并讨论了两种解的特性，从而了解到激波形成过程与耗散效应的关系。水波问题在波动理论中占有重要地位，第三章较系统的讨论了线性与非线性水波问题。在浅水非线性波部分，重点介绍了Boussinesq理论和Boussinesq方程的解法，导出了后面章节重点讨论的 KdV 方程。在深水非线性波部分，引入了多重尺度解法，讨论了调制波问题。在化工、冶金和冰川地质中，界面波的稳定性问题引起人们的重视，第四章介绍了界面波的基础知识，讨论了有传热传质的界面波的线性与非线性稳定性问题。这类问题物理过程相当复杂，关键是要建立更接近实际的数学模型。第五章讨论了分层流体中的小振幅波与有限振幅波，这里没有考虑地转影响，所以只限于中、小尺度问题。大气和海洋以及油田多孔介质中的水、油、气多相流体都是分层流体，研究分层流体的波动和稳定性问题有广泛的实际意义。第六章讨论了旋转流体中的线性与

非线性波，主要对象是大尺度范围的海洋波动与大气波动，这时地转效应成为不可忽略的因素，从而生成了一类新的波动——Rossby波，在气象上，它是有实际天气意义的波动。近年来，大气非线性波的研究，受到气象工作者的重视，主要问题是探讨纬向基本气流与波之间，波的不同分量之间相互作用的非线性机制。孤波（也称孤立子）的概念也引入到大气非线性波的范畴，因为广义地说，一般的弱非线性色散系统的方程简化到最后都可用KdV方程来近似，且对于某类初值，该方程有孤波形式的解。在气象上，孤波可视为某种阻塞系统，即相对来说，它的强度在较长时间内维持不变。局地的热源扰动，也可视为孤波型的，有人研究了大气温、压场对它的响应。在前面章节中，不论是非线性水波问题或是非线性大气波动问题最后都涉及到KdV方程和非线性Schrödinger方程的求解。从第七章开始，以及其后两章专门讨论这些方程的性质和解法。其中第七章介绍了KdV方程的特殊解法，讨论了孤波的相互作用以及方程的守恒律问题。第八章详细、系统地介绍了逆散射方法，它是新近发展起来的求解某些类型非线性方程的有效方法，用这种方法如何求KdV方程、非线性Schrödinger方程和Sin-Gordon方程的解，本章都作了回答。第九章介绍了逆散射方法的推广工作和Bäcklund变换，并讨论了两者的关系。从研究Bäcklund变换入手，也是求解非线性波动方程的一种途径。第十章介绍解非线性波动方程的近似方法——渐近方法，这里限于结合所讨论的问题只讲了伸缩参数法、多重尺度法、平均法和拉格朗日函数平均法。我们的重点不是讨论方法本身，所以对它们都只作简要介绍，而更关注其用于解题的结果。线性波的色散关系与波的振幅无关，非线性波与线性波的性质的重要差别之一是色散关系对于波的振幅的依赖性。本章介绍的用渐近解法求解非线性波动方程正能很好地揭示非线性波的这一重要性质。

§2 流体动力学基本方程

流体动力学基本方程是建立波动方程的基础，它们在有关流体力学的书中有详细推导，这里直接引用。

连续方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{V})=0 \tag{1.1}$$

其中$\vec{V}$和ρ分别是流体的速度和密度。

运动方程

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}\right]=-\nabla p+\mu\nabla^2\vec{V}$$

$$\times\left(\beta+\frac{\mu}{3}\right)\nabla(\nabla\cdot\vec{V})+\rho\vec{F} \tag{1.2}$$

其中p是压力，μ是动力粘性系数，β是膨胀粘性系数，$\vec{F}$是质量力。

状态方程

$$p=p(\rho,\ s) \tag{1.3}$$

其中s是熵。

能量方程

$$\rho T\left[\frac{\partial s}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)s\right]=\sigma_{ij}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\nabla\cdot(K\nabla T) \tag{1.4}$$

其中T是温度，K是热导系数。

$$\sigma_{ij}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}=\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\frac{\partial V_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial V_i}{\partial x_i}\right)^2$$

$$+\beta\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i}\right)^2$$

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

代表由于粘性产生的耗损。方程（1.1）—（1.4）构成闭合系统。

这就是下面导出各种波动方程的出发方程。

为了使用方便，利用热力学第一定律，可将（1.4）改写成下面几种形式

如果密度变化不大时，有

$$\rho c_v\left[\frac{\partial T}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)T\right]=\sigma_{ij}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\nabla\cdot(K\nabla T) \tag{1.5}$$

如果压力变化不大时，有

$$\rho c_p\left[\frac{\partial T}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)T\right]=\sigma_{ij}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\nabla\cdot(K\nabla T) \tag{1.6}$$

对于可压缩流体，一般有

$$\rho c_v\left[\frac{\partial T}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)T\right]+p(\nabla\cdot\vec{V})=\sigma_{ij}\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\nabla\cdot(\nabla T) \tag{1.7}$$

其中c_v与c_p分别为定容比热与定压比热。

第二章　一维流体中的波动

§1 引　　言

讨论波动问题，我们从一维流体中的波动开始，并且先讨论小振幅波。在物理上，可以认为这种波动是原有的平衡状态因受小扰动而产生的波动。在数学上，可以引进线性化方法将非线性方程简化成线性方程，由于在数学上有关线性方程的理论比较成熟，所以线性波问题研究得比较充分。但是这里我们只对线性化方法和线性波动方程的求解问题作简单介绍，而本章重点是讨论一维非线性平流方程，比较无耗散与有耗散情况，考察耗散效应对解的特征的影响以及非线性项与耗散项对解的生成形态所起的作用。

§2 波动方程

下面用线性化方法导出线性波动方程。设平衡状态的物理量为p_0，ρ_0，T_0，s_0和$\vec{V}_0$，为了简单起见，这里令$\vec{V}_0=0$，其余为常量。相应的扰动物理量为p'，ρ'，T'，s'和$\vec{V}'$。于是有

$$p=p_0+p',\quad \rho=\rho_0+\rho',\quad T=T_0+T'$$

$$s=s_0+s',\quad \vec{V}=\vec{V}'$$

代入上章中诸方程，只保留一级微量，于是有

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\rho_0\nabla\cdot\vec{V}'=0 \tag{2.1}$$

$$\rho_0\frac{\partial\vec{V}'}{\partial t}=-\nabla p'+\mu\nabla^2\vec{V}'+\left(\beta+\frac{\mu}{3}\right)\nabla(\nabla\cdot\vec{V}') \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial s'}{\partial t} = \frac{K}{\rho_0 T_0} \nabla^2 T' \tag{2.3}$$

如果假设流体是正压的，则从（2.1）与（2.2）消去$\vec{V'}$，便得到

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \rho' + \overline{\nu} \nabla^2 \frac{\partial \rho'}{\partial t} \tag{2.4}$$

其中

$$c^2 = \frac{dp'}{d\rho'}$$

$$\overline{\nu} = \frac{1}{\rho_0}\left(\beta + \frac{4}{3}\mu\right)$$

如果不考虑粘性影响，（2.4）就变成

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \rho' \tag{2.5}$$

这就是线性波动方程，c 为波速。

以上，在小振幅波动前提下，将非线性方程简化成线性方程，这种方法称为线性化方法。

§3 波动方程的解

（一）行波解

这里考虑的是正压流体，因此，方程（2.5）也可写成

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 p' \tag{2.6}$$

引进速度势 φ

$$\vec{V'} = \nabla \varphi$$

由（2.2），（2.6）可知，φ 也满足波动方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \varphi$$

如只讨论一维情况，有

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \tag{2.7}$$

令

$$\xi = x - ct, \qquad \eta = x + ct$$

则（2.7）变为

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

所以

$$\varphi = f(x - ct) + g(x + ct) \tag{2.8}$$

$f(x-ct)$代表朝 x 轴正向的波动，$g(x+ct)$代表朝 x 轴负向的波动。后面的非线波问题也将介绍这种解题思想。

（二）单色波

对于线性波动方程（2.7），存在叠加原理，讨论如下形式的解是有意义的，即

$$\varphi(x,t) = \phi(x) e^{-i\omega t}$$

这称为单色波。代入（2.7），有

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} + k^2 \phi = 0$$

其中

$$k = \frac{\omega}{c}$$

易知

$$\phi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

所以

$$\varphi(x,t) = Ae^{i(kx - \omega t)} + Be^{-i(kx - \omega t)} \tag{2.9}$$

其中 ω 为频率，k 为波数。$\lambda = \frac{2\pi}{k}$为波长，$T = \frac{2\pi}{\omega}$为周期。

（三）基本解

求波动方程（2.7）的基本解，即求方程

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -\delta(x - \xi)\delta(t - \tau) \tag{2.10}$$

的解$G(x,t;\xi,\tau)$。设（2.10）的解为