研究生数学入学考试精编

（第三版）

蔡燧林　张继昌　编著

浙江大学出版社

研究生数学入学考试精编

（第三版）

蔡燧林　张继昌　编著

浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

研究生数学入学考试精编／蔡燧林，张继昌编著．
—杭州：浙江大学出版社，1999.8
ISBN 7-308-02145-9/O·242

Ⅰ．研...　Ⅱ．①蔡...②张...　Ⅲ．高等数学-研究生-入学考试-习题　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 28230 号

责任编辑：董德耀
出版发行：浙江大学出版社
（杭州浙大路 38 号　邮政编码 310027）
（E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn）
（网址：http://www.zjupress.com）
排　　版：浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷：余杭市供销印刷有限公司
开　　本：850mm×1168mm　32 开
印　　张：21.875
字　　数：568 千
版 印 次：1999 年 8 月第 1 版　2001 年 7 月第 3 版
2001 年 7 月第 3 次印刷
印　　数：5001—8000
书　　号：ISBN 7-308-02145-9/O·242
定　　价：27.00 元

前　　言

本书是为攻读工学、经济学、管理学硕士学位参加全国数学统考的考生而写的，也可供本科生作为深化教学内容复习迎考和教师教学参考之用.

全书按考研大纲的内容分高等数学、线性代数、概率论与数理统计初步三部分共十章. 每章分若干节，每节又分“内容提要及考查要点”和“例题分析及说明”. 在“内容提要及考查要点”中，列出该节的内容，但并不是将考研大纲重抄一遍，而是按作者对考研大纲的领会，列出要点，包括概念、性质、理论、方法和公式，然后着重指出这些内容可用于何处，应怎么用. 对阐述考查要点，指出常见的考题类型和解题方法，例如曲线、曲面积分这部分，指出考题的各种变形和处理方法；级数敛散性部分，指出通常的处理顺序，难点何在，如何去克服这些难点；证明存在零点问题部分，指出如何构造函数，同时指出以积分形式出现和以导数形式出现的联系等等. 为节省篇幅，使得可以腾出更多的篇幅来介绍解题方法，所以对于一些较熟悉的内容，例如一元函数微积分学的一些公式就不再罗列了. 在“例题分析及说明”中，列举了大量的例题，例题类型不重复，这些例题侧重于概念的理解，方法的掌握和综合应用. 解题不是以解出为目的，而是着重指出为什么这么做，解毕后常加“注”，用以说明应注意些什么，达到举一反三.

从历年考研试题来看，研究生考题有如下特点：概念性强，选择题着重考查考生对概念的掌握；强调理论的应用或利用学过的理论证明一些命题，而不是教科书上定理的简单重复；同一概念或理论以不同面目、不同角度(即所谓变形)来考查考生对它的掌握；

综合性强，几乎每一届考卷都有综合题，目的在于考查考生的能力和数学素质.一般说来，每份试卷都有应用题，它着重考查考生的建模能力.但不出现对某专业群体明显不利或明显有利的应用题.研究生考题的每一题，所占的解题时间不长，也不要求考生有高超的技巧，而只要掌握基本概念和基本方法，读懂考题，解题思路是不难找到的.本书就是针对这些特点来编写例题和习题的，只有极个别题有一定难度.

本书配有例题 570 个和习题 490 个.习题的题型，大都不是例题的重复.恰恰有不少习题是例题的补充.所以这就要求读者不仅去看例题，演算例题(这是重要的)，并且还要求读者去做习题，两者都需要.

考研全国数学统考试卷分"数学一"至"数学四"4 种类型，本书适合报考其中任何一类的考生使用.具体哪些要考，哪些不考，读者可查阅教育部颁布的考研大纲来取舍.考虑到本书也可供有些院校本科生参考，书中增列了"一致连续性"、"数列极限存在的柯西准则"、"广义积分审敛法"和线性代数中的"半正定"四项内容，在有关的标题和题号的右上角打有"*"号以示区别.至于有的公式后的"*"与这里说的不是一回事.

本书概率论与数理统计初步一章由张继昌编写，其余各章由蔡燧林编写.编著者长期在浙江大学从事数学基础课教学，并参加历年考研数学试卷的评阅分析和总结工作，对考研数学统考命题有深刻的研究，作者期望此书的出版对考研学子有所帮助.

在本书编写过程中，作者参考了下列各书：

教育部.2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲.北京：高等教育出版社，1999

工科数学课程指导委员会《工科数学》编委会编.工科数学，第 14 卷.第 5 期，1998

季文铎等.工学硕士入学考试数学复习指南(第二版).北京：

北京理工大学出版社，1998

邵剑、汤国桢. 高等数学专题解析. 杭州：浙江大学出版社，1998

陈维新教授仔细审阅了本书的线性代数部分，他提出了许多宝贵的意见. 作者在此对以上各位先生表示衷心的感谢.

作者于浙江大学求是村

1999 年 6 月

第二版说明

本书这次修订版，根据 2001 年考研大纲，作了下述一些修订：(1)勘误；(2)增删了若干例题和习题，特别增加了线性代数的应用题. 在所增加的题中，有一些是 2000 年研究生入学考试的试题或经改编而成. 经增删后，现有例题 641 个，习题 496 个；(3)对某些解题方法，作了修改或充实，更便于考生使用.

作 者

2000 年 2 月

第三版说明

本版增加了 2001 年的一些考题，并删去了若干例题和习题，使总篇幅基本保持不变.

作 者

2001 年 6 月

内容提要

本书是按照教育部颁布的最新考研数学大纲编写的.全书包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计初步等三部分.每节有“内容提要及考查要点”和“例题分析及说明”,前者介绍概念、理论和方法,并着重阐述常见题型的解题思路和步骤;后者列举了641个例题,并作了详尽的分析,力求举一反三.全书配有习题496个.本书可供报考“数学一”至“数学四”的任何一类考生复习迎考之用,也可为在读本科生作深化教学复习用书.

目　录

第一章 函数、极限、连续

§1 函数

一、内容提要及考查要点

本节包括函数的概念及表示法,函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性,反函数、复合函数和隐函数,基本初等函数的性质及其图形,初等函数,简单应用问题的函数关系的建立.

熟悉、掌握并应用以上这些知识,贯穿于整个高等数学之中.例如,在极限中,有时要检查有否有界性和单调性,利用导数可以研究单调性,弄清楚有否奇、偶性,对于定积分甚至重积分的计算会带来方便.将复合函数分解为一些基本初等函数的复合,是求导的重要一环.基本初等函数及其图形,可以说是无处不用.最大值、最小值问题,定积分应用,常微分方程中,都与建立函数关系或者甚至建立更为复杂的关系有关,等等.所以许多问题,不是本节中单独处理的.

仅涉及本节内容的考查要点有:① 函数的表示;② 分段函数的复合(包括相应的定义域);③ 反函数的定义域及简单的反函数的表示.

二、例题分析及说明

例 1 设对于任意 x, $f(x)+2f(1-x)=x^2-2x$. 则 $f(x)$ $=$ ________.

解 应填$\frac{1}{3}(x^2+2x-2)$. 理由如下：

在所给式中，命 $1-x=t$，则 $x=1-t$. 于是得

$$f(1-t)+2f(t)=(1-t)^2-2(1-t)=t^2-1;$$

即 $f(1-x)+2f(x)=x^2-1$.

与原式联立消去 $f(1-x)$，得

$$f(x)+2[x^2-1-2f(x)]=x^2-2x.$$

解出 $f(x)$ 即为所填.

注 读者一定会看到，正是利用了所给表达式的特点，作变换 $1-x=t$，得 $x=1-t$. 使由变换前后两个式子联立，就可解得 $f(x)$.

例 2 设 $f(x)$ 是以 2 为周期的奇函数，且当 $x\in(2,3)$ 时 $f(x)=x^2$. 求当 $x\in(-2,0)$ 时 $f(x)$ 的表达式.

解 当 $-2<x<-1$ 时，$2<x+4<3$，由周期性有

$$f(x)=f(x+4)=(x+4)^2.$$

同理，当 $0<x<1$ 时，$2<x+2<3$，有

$$f(x)=f(x+2)=(x+2)^2.$$

由奇函数的性质，当 $-1<x<0$ 时，$0<-x<1$，有

$$f(x)=-f(-x)=-(-x+2)^2=-(x-2)^2.$$

所以所求的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-(x-2)^2, & 当 -1<x<0,\\ (x+4)^2, & 当 -2<x<-1.\end{cases}$$

例 3 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x+1, & x>0.\end{cases}$ 则 $f(-x)=$ ________.

解 应填 $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ x^2-x+1, & x<0.\end{cases}$

理由如下：由 $f(x)$ 的分段定义，应区分 $x\leqslant 0$ 与 $x>0$ 两种情形，从而对 $f(-x)$ 来说，应区分 $-x\leqslant 0$ 与 $-x>0$，即 $x\geqslant 0$，$x<0$ 两种情形. 所以当 $x\geqslant 0$ 时 $f(-x)=(-x)^2=x^2$；当 $x<$

0 时 $f(-x)=(-x)^2+(-x)+1=x^2-x+1$. 即为所填.

例 4　已知 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$, 且 $\varphi(x)\geqslant 0$, 求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

解　由 $f(x)=e^{x^2}$ 知 $f(\varphi(x))=e^{[\varphi(x)]^2}$, 再由假设 $f[\varphi(x)]=1-x$ 有 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$. 于是得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 由 $\ln(1-x)\geqslant 0$ 可得定义域为 $x\leqslant 0$.

例 5　设 $f(x)=\begin{cases}1, |x|<1,\\0, |x|\geqslant 1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}0, |x|\leqslant 1,\\1, |x|>1.\end{cases}$ 则 $f(g(x))=$ ________.

解　应填 $f(g(x))=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\0, & |x|>1.\end{cases}$ 理由如下:

首先, 按 $f(x)$ 的定义, 有

$$f(g(x))=\begin{cases}1, & |g(x)|<1,\\0, & |g(x)|\geqslant 1.\end{cases}$$

再由 $|g(x)|<1$ 知 $|x|\leqslant 1$; $|g(x)|\geqslant 1$ 知 $|x|>1$. 于是

$$f(g(x))=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\0, & |x|>1.\end{cases}$$

例 6　设 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & \text{当 } x\leqslant 0,\\\ln x, & \text{当 } x>0.\end{cases}$

$g(x)=\begin{cases}2e^x-1, \text{当 } x\leqslant 0,\\x^3-1, \text{当 } x>0.\end{cases}$ 求 $f(g(x))$ 的表达式.

解　按 $f(x)$ 的定义, 有

$$f(g(x))=\begin{cases}[g(x)]^2-1, & \text{当 } g(x)\leqslant 0,\\\ln g(x), & \text{当 } g(x)>0.\end{cases}$$

再由 $g(x)$ 的定义知, 当 $g(x)\leqslant 0$, 即 $\{2e^x-1\leqslant 0\}\cap\{x\leqslant 0\}$, 或 $\{x^3-1\leqslant 0\}\cap\{x>0\}$. 而

$$\begin{aligned}\{2e^x-1\leqslant 0\}\cap\{x\leqslant 0\}&=\{x\leqslant -\ln 2\}\cap\{x\leqslant 0\}\\&=\{x\leqslant -\ln 2\},\end{aligned}$$

$$\{x^3-1\leqslant 0\}\cap\{x>0\}=\{x\leqslant 1\}\cap\{x>0\}$$

$$= \{0 < x \leqslant 1\}.$$

当 $g(x) > 0$，即 $\{2e^x - 1 > 0\} \cap \{x \leqslant 0\}$，或 $\{x^3 - 1 > 0\} \cap \{x > 0\}$. 而

$$\begin{aligned}\{2e^x - 1 > 0\} \cap \{x \leqslant 0\} &= \{x > -\ln 2\} \cap \{x \leqslant 0\} \\ &= \{-\ln 2 < x \leqslant 0\}. \\ \{x^3 - 1 > 0\} \cap \{x > 0\} &= \{x > 1\} \cap \{x > 0\} \\ &= \{x > 1\}.\end{aligned}$$

于是推知

$$f(g(x)) = \begin{cases} (2e^x - 1)^2 - 1, & \text{当 } x \leqslant -\ln 2, \\ \ln(2e^x - 1), & \text{当 } -\ln 2 < x \leqslant 0, \\ (x^3 - 1)^2 - 1, & \text{当 } 0 < x \leqslant 1, \\ \ln(x^3 - 1), & \text{当 } x > 1. \end{cases}$$

注 求分段函数的复合函数的表达式，就可按本例的方法去做.

例 7 设 $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2, & x < -1, \\ x^3, & -1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 12x - 16, & x > 2. \end{cases}$ 试写出 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式.

解 首先弄清楚 $f(x)$ 在每一分段区间上的值域：当 $x < -1$ 时，$-\infty < f(x) < -1$，且是单调增加的；当 $-1 \leqslant x \leqslant 2$ 时，$-1 \leqslant f(x) \leqslant 8$，且是单调增加的；当 $x > 2$ 时，$8 < f(x) < +\infty$，且是单调增加的.

由以上分析可知 $y = f(x)$ 的值域为 $-\infty < y < +\infty$. 在此区间上，它存在单值的反函数 $x = g(y)$ 分段如下：

$$g(y) = \begin{cases} -\sqrt{\dfrac{1-y}{2}}, & -\infty < y < -1, \\ y^{\frac{1}{3}}, & -1 \leqslant y \leqslant 8, \\ \dfrac{1}{12}(y + 16), & 8 < y < +\infty. \end{cases}$$

即 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 为

$$g(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}}, & -\infty<x<-1,\\ x^{\frac{1}{3}}, & -1\leqslant x\leqslant 8,\\ \dfrac{1}{12}(x+16), & 8<x<+\infty.\end{cases}$$

§2　数列极限存在性的证明与数列极限的求法

一、内容提要及考查要点

数列 $\{u_n\}$ 极限存在性的证明，一般有下述一些方法：① 按定义验证极限. 此法只能用于求证某数 A 为其极限或事先由观察法知 A 为其极限而再验证之. 此法的要点是，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，找出 $N(\varepsilon)>0$，使当 $n>N(\varepsilon)$ 时，$|u_n-A|<\varepsilon$. ② 应用"单调增加(减少)且有上界(下界)则必存在极限"定理来证明极限存在性. 使用此法的要点是，检验数列的单调性及与其相应的有界性. 一般说来，此法只能证明极限的存在，而不能求出极限等于多少. 但由迭代形式给出的其中某些特殊数列，并且在已知极限存在的前提下，可以将迭代等式两边取极限而求出极限等于多少，如下面例 5～8 那样. ③ 应用"夹逼定理"来证明极限的存在性. 此法的要点是，建立左、右两个不等式，将 u_n 夹在中间，而当 $n\to\infty$ 时，要使得左、右两边趋于同一极限(这是夹逼定理的关键!) 此法的优点是，在证明极限存在性的同时，也求出了极限等于多少. 难点是要建立左、右两个不等式，并且左、右两边要趋于同一极限! 除了上述三个基本方法外，还有 ④ 应用"柯西(Cauchy) 收敛准则"(*) 证明极限存在或不存在. 此准则是："数列 $\{u_n\}$ 存在极限的充分必要条