动力系统基础及其方法

西安交通大学数学研究生教学丛书

陈绥阳　褚蕾蕾　编著

科学出版社
www.sciencep.com

西安交通大学数学研究生教学丛书

动力系统基础及其方法

陈绥阳　褚蕾蕾　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

动力系统（Dynamical System）是拓扑空间上连续自映射迭代生成的系统．本书重点阐述拓扑动力系统（含符号动力系统、分形动力系统），微分动力系统和无穷维动力系统的基础理论知识与基本研究方法．这一理论与方法，已广泛而深入地应用于数学、统计学、物理、力学、信息与计算科学，以及许多工程领域．

本书可作为数学类各专业的研究生教材，也可供以上相关专业的高年级学生及教学、科研人员参考．

图书在版编目（CIP）数据

动力系统基础及其方法/陈绥阳，褚蕾蕾编著．—北京：科学出版社，2002.9

（西安交通大学数学研究生教学丛书）

ISBN 7-03-010392-0

Ⅰ．动… Ⅱ．①陈…②褚… Ⅲ．动力系统（数学）－研究生－教学参考资料 Ⅳ．O19

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 027341 号

责任编辑：林鹏 杨波/责任校对：陈丽珠

责任印制：安春生/封面设计：高海英　王浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2002年9月第 一 版　开本：B5（720×1000）

2002年9月第一次印刷　印张：20 3/4

印数：1—3 000　字数：394 000

定价：31.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

前　　言

动力系统是20世纪最富有成就的一个数学分支，也是非线性科学的一个重要组成部分，在不少领域中有重要的应用.

一个动力系统是由拓扑空间及其上的连续自映射所构成的系统. 该系统研究的问题，大致可以分为两类：一类是孤立地研究一个自映射迭代生成的动力学复杂性质，即长时间的形态；另一类是把一个动力系统看作是某个空间内的一个点，研究诸如在微小挠动下动力性状的改变.

与此同时，从20世纪六七十年代以来，随着计算能力的不断提高，非线性科学发现两个极端的现象，一是具有内秉的对称和保守性质的孤立子，另一是在耗散系统中发现了奇怪吸引子和混沌. 近来又发现一批从孤立子可演化为混沌现象的非线性演化方程. 从而推动了无穷维动力系统的研究，与有穷维动力系统不同的是，它研究空间上的混沌现象，而后者仅研究时间上的混沌现象. 但是，二者却有令人惊叹的联系.

动力系统不仅是非线性科学的研究对象，而且是研究非线性“复杂性”的有力工具，其理论与方法已广泛渗透于许多重要领域和众多学科.

作者出于计算和理论研究而感兴趣于动力系统. 于是，在多年教学与研究的基础上，希望搜集整理这一领域的文献与典籍，对其知识进行再组织. 为成此书，历时两年，虽无博观约取、厚积薄发之力，但有心在适当深入的基础上拓宽知识，注重学科内部联系，保持结构相对完整，以便于教学组织与自学参考.

本书内容分为三部分，拓扑动力系统（含符号动力系统、分形动力系统），微分动力系统和无穷维动力系统. 其中，拓扑动力系统是基础. 读者可按需选读. 一般来讲，需要具备点集拓扑和非线性泛函分析的基本知识.

本书§12.3，由伍渝江先生撰写. 所引文献，已注明出处，在此对原著表示尊敬而诚挚的谢意.

作者囿于学识，对书中挂一漏万、疏忽纰缪之处，向读者和文献原著表示歉意，并敬请斧正.

作　者

2001年于西安交通大学

目　　录

第一章 概 述

§1.1 动力系统概述

1591 年，奥地利格拉茨大学讲师开普勒(Kepler)前往布拉格，成为天文学家第谷·布拉赫(Tycho)的助手. 开普勒根据第谷的准确观测数据，发现了行星运动三定律，其中对当时正统派理性思潮最为震动的一条是，每个行星沿着以太阳为一个焦点的椭圆轨道而运动. 在当时理性思潮的影响下，人们普遍认为行星绕太阳旋转的轨道是圆，因为圆是最完美的曲线.

为什么行星运动的轨道是椭圆曲线而不是"完美"的圆呢?

半个多世纪以后，牛顿(Newton)于 1687 年在其名著《自然哲学的数学原理》中，提出万有引力定律，而后用数学的形式——常微分方程——推出了开普勒定律，完成了日心地动说的力学解释，也同时开始了以常微分方程为对象的动力系统的研究. 下面仅介绍行星轨迹为椭圆的论述.

例 1.1.1 行星轨道方程. 设某行星运动于以太阳为原点 O 的复平面内，在时刻 t 的位置

$$z(t) = re^{i\theta},$$

其中 $r = r(t), \theta = \theta(t)$. 设行星和太阳的质量分别为 P 和 M，$G = 6.672 \times 10^{-11} \mathrm{m^3 s^{-2} kg^{-1}}$ 是万有引力常数，于是由万有引力定律，有

$$P\ddot{z} = -\frac{PMG}{r^2}e^{i\theta},$$

其中

$$\ddot{z} = ((\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + i(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}))e^{i\theta}$$

是加速度. 分离方程的实部和虚部得

$$-\frac{MG}{r^2} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \tag{1.1.1}$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0. \tag{1.1.2}$$

由方程(1.1.2)得 $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$，从而

$$r^2\dot{\theta} = h, \tag{1.1.3}$$

其中 h 是常数，它等同于开普勒第二定律，行星在相等的时间内扫过相等的面积.

联合(1.1.1)和(1.1.3)，令 $r = \frac{1}{u}$，得

$$\frac{MG}{h^2} = \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\theta^2} + u,$$

再令 $v = u - \frac{MG}{h^2}, p = \frac{h^2}{MG}$，解得

$$r = \frac{p}{1 - \mu\cos\theta},$$

其中 $\mu = Ap$ 是离心率. 由此可见，点(r, θ)的轨道是离心率为 $\mu(0<\mu<1)$，极点 O 为一个焦点的椭圆.

与例 1.1.1 的分析方法不同的是，绝大多数的微分方程不能用已知函数的积分来表示其通解. 这导致微分方程定性理论[1~3]的研究，其肇端始于法国数学家 H. Poincaré 和俄国数学家 A. M. Ляпунов. 前者在 1881～1886 年间连续发表的论文《微分方程所确定的曲线》，后者在 1882～1892 年间完成的博士论文《运动稳定性的一般问题》，是这一方面的经典著作. 到 1927 年，G. D. Birkhoff 在继承并发展 Poincaré 工作的基础上，使"动力系统"一词首见于其专著[4].

如例 1.1.1 所示，一个用常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \Phi(x, t), \quad x \in \mathbf{R}^n$$

描述的随时间演化的系统，是一个经典意义下的动力系统. 设其满足初值条件

$$x(0) = x_0, \quad x_0 \in \mathbf{R}^n$$

的解为 $\varphi(t, x_0)$，且存在区间是 $\mathbf{R}$，则映射 $\varphi: \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 满足

(H1)　$\varphi(0, x) = x, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$.

(H2)　$\varphi(s+t, x) = \varphi(s, \varphi(t, x)), \quad \forall s, t \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^n$.

更一般地，称满足条件 H1 和 H2 的映射 $\varphi: \mathbf{R}\times X \to X$ 为连续动力系统或流，其中 X 是底空间.

下面例 1.1.2 的差分方程给出的动力系统是离散动力系统。

例 1.1.2 (Malthus 模型，1798 年)　设某人口群体在第 n 个时间段开始时的总数为 P_n，若出生率与死亡率之差为 b，则有 Malthus 模型

$$P_{n+1} = kP_n, \quad n \in \mathbf{Z}_+,$$

其中 $k = 1 + b$，于是

$$P_{n+1} = k^{n+1}P_0, \quad n \in \mathbf{Z}_+.$$

定义 $f: \mathbf{Z}_+ \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 为 $f^n(x) = k^n x$，则 Malthus 模型又可记为

$$P_{n+1} = f(P_n).$$

显然，映射 $f: \mathbf{Z}_+ \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 满足条件 H1 和 H2，构成 $\mathbf{R}$ 上的离散动力系统，而

$$\mathrm{Orb}_f(P_0) = \{P_0, P_1, P_2, \cdots\}$$

是 f 过 P_0 点的一条轨道.

动力系统不仅可以通过映射 φ 或 f 在“时间”维上的定义域来进行分类,如连续动力系统或离散动力系统,而且可以通过底空间 X 的结构来进行分类.例如,若 X 分别是拓扑空间(或度量空间),C^r 微分流形和无穷维 Banach 空间,则在 X 上可分别定义拓扑动力系统,微分动力系统和无穷维动力系统.

一般而言,动力系统研究的主要问题是:

(1)轨道长时间的渐近性质,如极限点集、非游荡点集、周期点集等.

(2)轨道在相空间中的稠密性,如极小性、拓扑传递性、拓扑混合性等.

(3)动力系统的整体性质,如全局吸引子等.

(4)动力系统的拓扑分类与结构稳定性,如双曲不动点和双曲不变集的稳定性.

(5)动力系统的复杂性,包括几何复杂性,如混沌、分形,以及动力学复杂性,如拓扑熵、Liapunov 指数等.

研究这些问题的主要方法,一是以结构分析为主的几何方法,另一是以数值计算为主的模拟方法.本书拟采用前者依次逐层展开对上述动力系统主要问题的研究和讨论.

§1.2 动力系统的底空间

设 S 是一个集合,映射 $f: S \to f(S) \subseteq S$ 按复合运算“$\circ$”满足

$$\text{H1} \qquad f^0 = id.$$

$$\text{H2} \qquad f^{m+n} = f^m \circ f^n, \quad \forall\, m, n \in \mathbf{Z}_+.$$

其中 id 表示恒同映射.一般来讲,可定义一单边的离散动力系统(S, f).这时,S 的结构对(S, f)的性质有决定性的影响.

在形式系统的一般理论中,没有限定 S 的结构,仅设 S 是一个非空集.S 上的一条规则是一个有序对(X, x),表示 $X \Rightarrow x$,其中 $X \subseteq S$ 称为规则的前提,$x \in S$ 称为规则的结论.设 Ω 是一个规则集,子集 $A \subseteq S$ 称为 Ω_- 封闭的,若

$$X \subseteq A \Rightarrow x \in A, \quad \forall (X, x) \in \Omega.$$

令 $I(\Omega)$是一切 Ω_- 封闭集的交,即

$$I(\Omega) = \bigcap \{A \mid A \subseteq S \text{ 且 } \Omega_- \text{ 封闭}\}.$$

性质 1.2.1 [5] 对映射 $\Phi: 2^S \to 2^S$,存在 S 上的规则集 Ω_Φ,

$$\Omega_\Phi = \{(X, x) \mid X \subseteq S, x \in S, x \in \Phi(X)\}.$$

使得 $I(\Omega_{\Phi})$是 Φ 的最小不动点.

不动点是最简单的周期点.事实上,对任意一个序数 σ 可以定义

$$\Phi^{(0)} = \varnothing, \quad \Phi^{(\sigma)} = \bigcup_{\tau<\sigma}\Phi^{\tau}, \quad \Phi^{\sigma} = \Phi(\Phi^{(\sigma)}), \quad \Phi^{\infty} = \bigcup_{\sigma}\Phi^{\sigma},$$

使得 Φ^{∞}是 Φ 的最小不动点.在自然推理系统中,空集表示以公理为前提的推理规则,因而 Φ^{∞}是公理前提集的"极限集".

集射系统(S,Φ)太广泛,在研究中希望限定 S 的结构.集合 S 的基本结构有三类:序结构、代数结构和拓扑结构.

首先,设集合 S 关于序关系"$\leqslant$"构成一个偏序集$(S,\leqslant)$,其中任意两个元素 a 和 b 都有公共下确界和上确界,在 S 上定义运算$\wedge$和$\vee$为

$$a \wedge b = \inf(a,b), \quad a \vee b = \sup(a,b),$$

则$(S,\wedge,\vee)$是一个格.设 L_1 和 L_2 是格,称映射 $f:L_1\to L_2$ 是单调的,若

$$x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y), \quad \forall x,y \in L_1,$$

记单调映射的集合为 F,称映射 $\tau:F\to F$ 为 F 上的泛函.当 $f,g\in F$,且

$$f(x) \leqslant g(x), \quad \forall x \in L_1$$

时,称 $f\leqslant g$,于是,可类似地定义单调泛函.称泛函 τ 是连续的,若 τ 是单调的,且对 F 中的任何链$\{f_i\}$,有

$$\tau[\sup\{f_i\}] = \sup\{\tau[f_i]\},$$

其中 sup 表示上确界.于是,有如下性质.

性质 1.2.2[6] 任何连续泛函 τ 均有一个最小不动点.

证明 设 Ω 是处处无定义函数,由 τ 的单调性,使函数序列

$$\Omega, \tau[\Omega], \tau^2[\Omega], \cdots$$

构成一个链,故上确界 $tau = \sup\{\tau^k[\Omega]\}$必然存在.不难证明,$tau$ 是τ 的一个最小不动点.

显然,τ 满足本节条件 H1 和 H2,使(F,τ)是一个动力系统.格上泛函的不动点理论,是理论计算机科学程序理论中形式语义的一个数学基础.

其次,设集合 S 上定义了一组运算 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,其运算的结果仍是 S 中的元素,则称 S 对于这 n 个运算构成一个代数.前面由偏序关系引出的格,就是一个代数结构.下面,设 S 是 Galois 域

$$GF(23) = \{[k] \mid k = 0,1,\cdots,22\},$$

$$[k] = \{a \in \mathbf{Z} \mid a \equiv k \bmod 23\},$$

同样,$GF(23)$是代数结构.取 $5\in GF(23)$,定义 $f:GF(23)\to GF(23)$为

$$f^n(k) = 5^n k \bmod 23, \quad k \in GF(23),$$

并记$f^n(k)=k_n$.于是,得到动力系统$(GF(23),f)$,且过任一点$k\in GF(23)$的轨道$\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$是周期轨道,例如过点$k=1$的轨道的周期是22.Galois域

$GF(p)$上的代数性质，在密码学中有重要应用[7].

其三，讨论 S 具有拓扑结构的情况，仍以形式系统为例.

设 Γ 是一阶语言 L 理论 T 全体非逻辑公理的集合，记

$$I = S_\omega(\Gamma) = \{A \in 2^\Gamma \mid \mathrm{card}(A) < \infty\},$$

$D \subseteq 2^I$ 是 I 上的一个滤集，记

$$\tau_I = D \cup \{\varnothing\},$$

则(I, τ_I)是以 τ_I 为拓扑的拓扑空间. 对于 $i \in I$, T_i 是以 i 为非逻辑公理的理论，$\mathscr{A}_i$ 是 T_i 的一个模型. 记 $T = \{T_i \mid i \in I\}$和 $\mathscr{A} = \{\mathscr{A}_i \mid i \in I\}$分别是一个理论族和一个模型族. 于是由$(I, \tau_I)$可以导出与其同胚的拓扑空间$(T, \tau_T)$和$(\mathscr{A}, T_{\mathscr{A}})$. 一般记$(X, \tau_X)$和$(Y, \tau_Y)$是由$(I, \tau_I)$导出的 $T_j (j = 0, 1, 2)$拓扑空间，u_0 表示选择最小邻域的选择函数，那么在(X, τ_X)中可引入偏序，称 $x \leqslant x^*$，若 $x^* \in u_0(x) \in \tau_X$；类似地，在$(Y, \tau_Y)$中引入偏序. 记 F 是X 到 Y 的全体单调算子的集合. 在 F 中引入拓扑基

$$u(f) = \{g \mid g \in F, g(x) \in u_0(f(x)), \forall x \in X\},$$

其中 $u(f)$表示 F 的邻域. 于是，在 F 上可导入拓扑，从而有如下结论.

性质 1.2.3[8] 若单调泛函 $\tau: F \to F$ 是上确界可达的，则 τ 在F 上存在一个最小不动点.

例 1.2.1 设 $I = \{\perp, 0, 1, \cdots, n\}$，其中符号$\perp$表示无定义，$u_0(j) = \{j, j+1, \cdots, n\}$, $0 \leqslant j \leqslant n$, $u_0(\perp) = I$，于是有序关系$\perp \leqslant 0 \leqslant 1 \leqslant \cdots \leqslant n$. 定义 $f: I \to I$ 为

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 1, \\ 0, & x \leqslant 1, \end{cases}$$

显然 f 是单调函数，定义泛函 $\tau: F \to F$ 为

$$\tau^k[\Omega] = f^k, \quad k = 1, 2, \cdots$$

于是有

$$\cdots \leqslant \tau^m[\Omega](x) \leqslant \cdots \leqslant \tau^2(x)[\Omega] \leqslant \tau[\Omega](x), \quad \forall x \in I,$$

记 $g(x) = f^2(x)$，有

$$\tau[g](x) = \tau[f^2](x) = \tau^3[\Omega](x) = g(x), \quad \forall x \in I,$$

即 $g(x)$是 τ 的不动点.

一般而言，由超滤集引入的拓扑是 T_0 或 T_1 空间，其拓扑刻画还不够精细. 具有可数基的 T_3 空间(正则的 T_1 空间)，是可度量化的拓扑空间. 而在度量空间上建立的拓扑动力系统，具有丰富的性质，这正是下面章节所要研究的主要对象. 但并不是每个拓扑空间都可度量化，拓扑空间可度量化，当且仅当它是具有 σ 局部有限基的 T_3 空间[9].

由前面的讨论可知，由拓扑空间的拓扑结构，可引入序关系，即具有序结构，但对代数结构而言并不是所有的拓扑空间都有线性的代数结构，即是线性空间. 在有线性结构的度量空间中，有的还可以引入范数使该范数所规定的度量就是原度量空间中的度量，而成为赋范空间. 显然，赋范空间是可度量化的线性拓扑空间，但并不是每个度量空间都能按所规定的距离成为赋范空间[10]. 在微分动力系统中，双曲不动点的结构稳定性是在非线性泛函分析的框架内进行讨论的. 同样，在这一框架内还可以讨论无穷维动力系统.

讨论双曲不变集的结构稳定性时，往往不可能在一个整体的欧氏空间中进行，而必须在流形中进行讨论. 流形是"局部欧氏"的，即在其每一点的附近与欧氏空间(或欧氏空间中的开集)同胚. 于是，有必要准备微分拓扑的工具.

架构在上述空间上的动力系统，是确定性动力系统. 如果在概率空间或模糊拓扑空间上建立动力系统，就分别为随机动力系统和模糊动力系统. 后面章节仅适当涉及随机动力系统的基本概念.

§1.3 动力系统的复杂性

动力系统底空间的不同结构使得动力系统的类型是多样的，而底空间上映射的非线性性质又使得动力系统的大范围性状是复杂的. 尤其是 20 世纪 60 年代以来，随着计算数学和计算机技术的发展，采用数值模拟的计算可视化方法，得到了许多令学界惊叹不已的发现，如分岐(或分支、分岔)(bifurcation)、混沌(chaos)、孤立子(soliton)和分形(fractal)等，极大推动了动力系统的研究及其在非线性科学研究中的应用，同时数值分析方法(数值实验、数值模拟、数值仿真、数值发现等)也成为一种重要的研究方法。

首先讨论区间自映射的分支现象. 设 $I \subset \mathbf{R}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个区间，$x_0 \in I$ 是区间自映射 $f: I \to I$ 的不动点. 当 $|f'(x_0)| \neq 1$ 时，x_0 是 f 的双曲不动点，f 在 x_0 点附近是结构稳定的. 下面，讨论 Logistic 函数族在非双曲不动点 x_0，即 $|f'(x_0)| = 1$ 的情况.

例 1.3.1 Logistic 函数族

$$f(x) = f(x, \lambda) = \lambda x(1 - x)$$

的分支[11]. 考虑迭代

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_n \in I = [0,1], \quad n = 1,2,\cdots$$

在 I 中的周期点，其中 $\lambda \in [0,4]$. 当 $n = 1$ 时，f 在 I 中的非平凡 1 周期点(不动点) $x_1^{(1)} = 1 - 1/\lambda$，当 $1 < \lambda < 3$ 时，是稳定不动点，即在 f 迭代作用下吸引它附近的点；而当 $\lambda > 3$ 时，是不稳定不动点，即在 f 迭代作用下排斥它附近的点，$\lambda_1 = 3$ 是失稳的临界值，又称分支点. 同时，在 $\lambda_1 = 3$ 附近

$$f^2(x) = f \circ f(x) = \lambda(\lambda x(1-x))(1-\lambda x(1-x))$$
有两个稳定的不动点
$$x_1^{(2)}, x_2^{(2)} = \frac{1}{2\lambda}(1+\lambda \pm \sqrt{(\lambda+1)(\lambda-3)}),$$
即 f 的 2 周期稳定点,其分支点 $\lambda_2 = 1+\sqrt{6} = 3.449\cdots$. 依次下去,每个 2 周期点失稳后又产生两个稳定的 4 周期点……这种现象称为倍周期分支,其分支点序列 $\{\lambda_n\}$ 满足
$$f^{2^{n-1}}(x^*, \lambda_n) = x^*, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^{2^{n-1}}(x^*, \lambda_n) = -1.$$
其著名的分支图似乎首先由 May[12]给出. 并且, $\{\lambda_n\}$有如下性质:

1° $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n = 3.569945672\cdots$.

2° $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} = \delta = 4.669201609\cdots$.

其中常数 δ 称为费根鲍姆常数,它与区间上光滑自映射函数族的具体形式无关。

Logistic 映射的迭代模型,描述了非世代重叠的昆虫逐年种群量,而作为最早发现的混沌模型,是 Lorenz 模型.

例 1.3.2 Lorenz 模型
$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-z), \\ \dot{y} = bx - y - xz, \\ \dot{z} = cz + xy. \end{cases}$$
轨线的计算机程序. 如下程序给出了 Lorenz 曲线图.

```
#include <graphics.h>
# define Xunhuan-factor 40000
# define Zoom-factor 9
float a=10, b=28, c= -2.66667;

float xdot(float x, float y, float z) {return(a * (y-x));}
float ydot(float x, float y, float z) {return(b * x-y-x * z);}
float zdot(float x, float y, float z) {return(c * z+x * y);}

main()
    {
    float x=1, y=1, z=1, dt=0.001, flag=0, dx, dy, dz;
    int gdriver=DETECT, gmode;
```

```
registerbgidriver(EGAVGA-driver);
initgraph(&gdriver,&gmode,"");
setbkcolor(BLACK);
cleardevice();

while(flag<=Xunhuan-factor)
    {
    putpixel(x*Zoom-factor+320,480-z*Zoom-factor,RED);
    dx=xdot(x,y,z)*dt;
    dy=ydot(x,y,z)*dt;
    dz=zdot(x,y,z)*dt;
    x=x+dx; y=y+dy; z=z+dz;
    flag++;
    }
getch();
closegraph();
}
```

说明:Xunhuan-factor 控制循环次数,即描点个数,Zoom-factor 控制图形大小.

Lorenz 模型是不含任何外在随机因素的确定性模型,其长时间行为对初始的微小变化十分敏感,具有“内在随机性”.非线性系统除了混沌、奇怪吸引子现象外,另一类现象却表现出内秉的保守和对称性质,如孤立波[13,14].

1834 年,英国造船工程师 J. S. Russell[15]在 Edinburg 附近一条狭窄的运河中观察到孤立波现象.60 年后,瑞典 Amsterdam 大学的 D. J. Korteweg 教授和他的学生 G. de Vries[16]在 1895 年提出了流体中单向波传播的数学模型

$$\frac{\partial u}{\partial t} \pm 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0,$$

即通常所说的 KdV 方程.又沉寂 60 多年后,在 20 世纪 60 年代初期,利用计算机数值实验技术,出现了几次对该类问题的重要研究.1965 年,N. J. Zabusky 和 M. D. Kruskal[17]把 KdV 方程用于等离子体波的研究,首次用孤立子(soliton)一词描述孤立波的粒子行为.后来,人们发现了孤立波对应于常微分方程所描述的某些动力系统中的同(异)宿轨道,进而发现与涡旋、湍流的联系[18].通过一大类非线性演化方程的研究,同时也推动了无穷维动力系统理论的发展.

分支、混沌是动力系统的时间演化行为,反映出系统的动力学复杂性.这

里,拓扑熵和 Liapunov 指数是描述动力学复杂性的重要概念.此外,奇怪吸引子、湍流的结构是动力系统的空间复杂性,分形[16,17]是描述这类空间复杂性的重要概念.同时,结构与随机,无论是概率空间上的随机现象,还是确定性系统的内在随机性,又伴生而交织,更使非线性动力系统的时空性状更加复杂.

本书围绕这一主题,介绍基本的数学工具和方法.

第二章　拓扑动力系统

拓扑动力系统是拓扑空间上的一个单参数同胚变换群，其一般理论的研究始于20世纪初G. D. Birkhoff等人的工作[4,19,20]．本章在拓扑空间上引入动力系统的概念，并通过紧致度量空间上极限点集，非游荡点集和拓扑熵等概念，着重讨论轨道的渐近行为，以及轨道在拓扑空间中的稠密性和混沌(chaos)．考虑到一维拓扑流形的分类，给出了线段和圆周上自映射的动力学性质．

§2.1　拓扑动力系统

用$\mathbf{R}$和$\mathbf{Z}$分别表示实数集和整数集按通常加法构成的实数拓扑加群和整数拓扑加群，X和Y分别表示拓扑空间．

定义 2.1.1　设$G\in\{\mathbf{R},\mathbf{Z}\}$，$X$是一拓扑空间，称连续映射$\varphi:G\times X\to X$为$X$上的一个拓扑动力系统，若$\varphi$满足：

(1) $\varphi(0,x)=x,\quad\forall x\in X$．

(2) $\varphi(t+s,x)=\varphi(t,\varphi(s,x)),\quad\forall t,s\in G,x\in X$．

此时，空间X又称为相空间，φ也简称为动力系统．

有时，为了指明相空间，又将动力系统记为(X,φ)．特别当是X是C^r微分流形且φ是C^r映射($r\geqslant 1$)时，则称φ是一个C^r微分动力系统．

当$G=\mathbf{R}$时，称动力系统φ是X上的流；如果φ又是C^r微分动力系统，则称φ是C^r流．当$G=\mathbf{Z}$时，称动力系统φ是X上的离散动力系统．

对X上的动力系统φ和任一$t\in G$，可定义映射$\varphi^t:X\to X$为$\varphi^t:x\mapsto\varphi(t,x)$．显然$\varphi^t$具有连续逆映射$\varphi^{-t}$，因而$\varphi^t$是$X$到$X$的一个同胚，且满足：

(1) $\varphi^0=id$．

(2) $\varphi^{t+s}=\varphi^t\circ\varphi^s,\quad\forall t,s\in G$．

其中id表示恒同映射，$\varphi^t\circ\varphi^s$表示复合映射．于是，有如下命题成立．

命题 2.1.1　φ是拓扑动力系统的充要条件是拓扑空间X上的同胚映射簇$\{\varphi^t\mid t\in G\}$按复合运算"$\circ$"构成加群$(\{\varphi^t\mid t\in G\},\circ)$．

由此可知，拓扑空间X上的一个动力系统实质上是一个单参数的同胚变换群．于是有如下与定义2.1.1等价的定义．

定义 2.1.2　设$G\in\{\mathbf{R},\mathbf{Z}\}$，连续映射$\varphi:G\times X\to X$称为拓扑动力系统，