

教育部高职高专规划教材

工 程 力 学

(多学时)

陈位宫 主编

瞿志豪 胡德淦 副主编



A0938140

高等教育出版社

内容提要

本书是教育部高职高专规划教材,依据教育部《高职高专教育机械类专业力学课程教学基本要求》编写。本书紧密结合当前高职高专力学教学改革的需要,既注意学习、吸收有关院校高职高专教育力学课程改革的成果,又尽量反映著作者长期教学所积累的经验与体会,精选内容,简化公式的推导,着力贯彻高职高专教育“以应用为目的”、“以必需、够用为度”的原则,体现了高职高专教育的特色。

本书分三篇:第一篇静力学,第二篇材料力学,第三篇运动学和动力学,共计 23 章。

本书可作为高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校的机械类专业力学教材,也可供多学时的近机械类专业选用及相关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程力学(多学时)/陈位宫主编. —北京:高等教育出版社,
2000

教育部高职高专规划教材

ISBN 7-04-008825-8

I.工... II.陈... III.工程力学-高等学校:技术
学校-教材 IV.TB12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 48286 号

工程力学(多学时)

陈位宫 主编

出版发行 高等教育出版社

社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号

邮政编码 100009

电 话 010-64054588

传 真 010-64014048

网 址 <http://www.hep.edu.cn>

经 销 新华书店北京发行所

排 版 高等教育出版社照排中心

印 刷 北京印刷三厂

开 本 787×1092 1/16

版 次 2000 年 12 月第 1 版

印 张 25.75

印 次 2000 年 12 月第 1 次印刷

字 数 620 000

定 价 21.70 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

第一篇 静力学

引 言

物体在力作用下的机械运动和变形机理构成了工程力学的研究范畴。

平衡是机械运动的特殊情形。静力学研究物体在力系作用下的平衡规律,因此,静力学讨论以下三方面的问题。

1. 物体的受力分析

即给出作用于物体的力的全貌。

2. 力系的等效与简化

力系经过等效替换或简化,可清楚地刻画出它对物体的作用。主矢和主矩是力系的两个基本特征量,因而,力系对物体的作用取决于力系的主矢和主矩。

力系等效定理是力系等效替换与简化的理论基础。

3. 力系的平衡条件

归纳物体在各种力系作用下的平衡条件及相应的平衡方程,求解静力平衡问题是静力学最重要的任务。

以力系的主矢和主矩为核心的力系平衡定理是推演力系平衡条件的理论基础。

静力学中涉及的物体抽象为刚体。

第 1 章

静力学基础

1.1 静力学的基本概念

1.1.1 力和力系的概念

人们通过长期的生产劳动和科学实践,建立了力的概念。力是物体间的相互机械作用,这种作用使物体的运动状态或形状发生改变。例如用手推小车,手对小车的作用力使它由静止开始运动;置于弹簧上的重物,对弹簧的作用力使弹簧发生变形。

物体受到力的作用后,产生的效应表现在两个方面:

- (1) 外效应(运动效应)——使物体的运动状态发生变化;
- (2) 内效应(变形效应)——使物体的形状发生变化。

静力学研究的是力对物体的外效应。

力对物体的作用效应决定于以下三个要素:力的大小、方向、作用点,因此力是定位矢量。力的运算服从矢量运算法则。可以用矢量图示法表示力矢量,即用一有向线段表示力。有向线段的长度按比例表示力的大小,线段的方位和箭头指向表示力矢^①的方向,线段的起点或终点表示力的作用点,如图 1-1 所示。力所沿的直线称为力的作用线。本书中用黑体字母(如 $\boldsymbol{F}$)标记矢量,而用对应的普通字母(如 F)表示矢量的模。在国际单位制中,力的单位为 N。

作用在物体上的一组力,称为力系。按照力系中

各力作用线在空间分布的不同形式,力系可分为:

- (1) 汇交力系 各力作用线相交于一点;
- (2) 平行力系 各力作用线相互平行;
- (3) 一般力系 各力作用线既不相交于一点,又不

相互平行。

按照各力作用线是否位于同一平面内,上述三种力系各自又可分为平面力系和空间力系两类,如平面汇交力系、空间一般力系等。

工程中,物体往往同时受到一组力即力系的作用。力系对物体的效应取决于力系的两个特征量——力系的主矢和力系对一点的主矩。关于力系的主矢和对一点的主矩将在后面章节里加

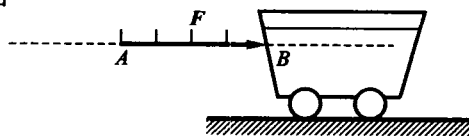


图 1-1

^① 一个力的力矢应是从任意点作出的力矢量(即不表示力的作用点,只表示力的大小和方向的矢量,是一自由矢量)。

以研究。两个不同的力系,如果对同一物体产生相同的外效应,则该两力系互为等效力系。若一个力与一个力系等效,则这个力称为该力系的合力。

1.1.2 刚体的概念

实践表明,任何物体受力后总会产生一些变形。但在通常情况下绝大多数零件和构件的变形都是很微小的,甚至需要用专门的仪器才能测量出来。研究证明,在许多情况下,这种微小的变形对物体的外效应影响甚微,可以忽略不计,即不考虑力对物体作用时物体所产生的变形。任何情况下均不变形的物体称为刚体。刚体是对实际物体经过科学的抽象和简化而得到的一种理想模型,它抓住了问题的本质。

然而当变形在所研究的问题中成为主要因素时(例如在材料力学中),一般就不能再把物体看作是刚体了。

1.1.3 平衡的概念

所谓平衡,是指物体相对于地球处于静止或作匀速直线运动的状态。显然,平衡是机械运动的特殊形式。作用在刚体上使刚体处于平衡状态的力系称为平衡力系;平衡力系应满足的条件称为平衡条件。静力学研究刚体的平衡规律,即研究作用在刚体上的力系的平衡条件。

1.2 静力学公理

静力学公理是从实践中总结得出的最基本的力学规律。这些规律的正确性已为实践反复证明,是符合客观实际的。

1.2.1 公理一 二力平衡公理

作用于刚体的两个力平衡的充分与必要条件是这两个力大小相等、方向相反、作用线相同。如图 1-2 所示,即

$$F_A = -F_B \quad (1-1)$$

对于变形体,这个条件是必要的,但是不充分。如柔索受两个等值、反向、共线的压力作用就不能平衡。

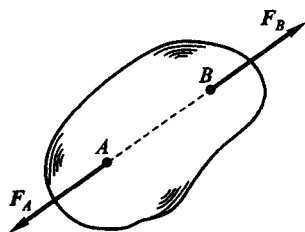


图 1-2

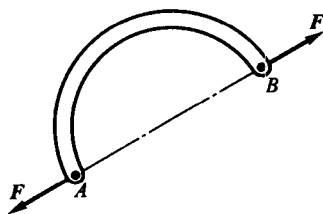


图 1-3

在两个力作用下处于平衡的物体称为二力体,若为杆件,则称二力杆。由公理一可知,作用在二力体上的两个力,它们必通过两个力作用点的连线(与杆件形状无关),且等值、反向,如图 1-3 所示。

1.2.2 公理二 加减平衡力系公理

在作用于刚体的任意一个力系上,加上或减去任意个平衡力系,并不改变原力系对刚体的效应。

推论 力的可传性原理

作用于刚体某点的力,可沿其作用线任意移动作用点而不改变该力对刚体的效应。如图 1-4 所示,作用于小车 A 点的推力 F 可沿其作用线移到 B 点,得拉力 F' 。虽然推力变为拉力,但小车的运动不会改变,即效应相同。因此,作用于刚体的力的三要素是力的大小、方向和作用线的位置。可见,作用于刚体的力是滑动矢量。

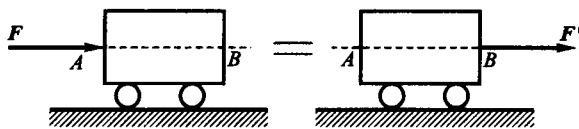


图 1-4

1.2.3 公理三 力的平行四边形法则

作用于物体同一点的两个力可以合成为一个合力,合力也作用于该点,其大小和方向由以两分力为邻边所构成的平行四边形的对角线表示,即合力矢等于这两个分力矢的矢量和,如图 1-5 所示。其矢量表达式为

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_R \quad (1-2)$$

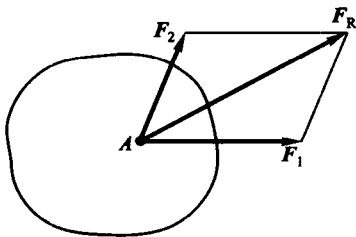


图 1-5

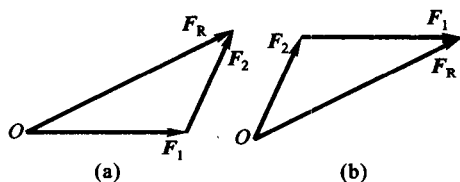


图 1-6

在求两共点力的合力时,为了作图方便,只需画出平行四边形的一半,即三角形便可。其方法是自任意点 O 先画出一力矢 F_1 ,然后再由 F_1 的终端画一力矢 F_2 ,最后由 O 点至力矢 F_2 的终端作一矢量 F_R ,它就代表 F_1 、 F_2 的合力。合力的作用点仍为力 F_1 、 F_2 的汇交点 A 。这种作图法称为力的三角形法则。显然,若改变 F_1 、 F_2 的顺序,其结果不变,如图 1-6 所示。

利用力的平行四边形法则,也可以把作用在物体上的一个力分解为相交的两个分力,分力和合力作用于同一点。工程中常把一个力分解为方向已知的两个(平面)或三个(空间)分力,特别地把一个力分解为方向已知且互相垂直的两个(平面)或三个(空间)分力。这种分解称为正交分解,所得的两个(平面)或三个(空间)分力称为正交分力。如图 1-7 所示。

推论 三力平衡汇交定理

刚体受不平行的三个力作用(其中两个力的作用线相交于一点)而平衡时,此三个力的作用线在同一平面内且必汇交于一点。如图 1-8 所示。此推论读者可用公理一和公理三自行证明。

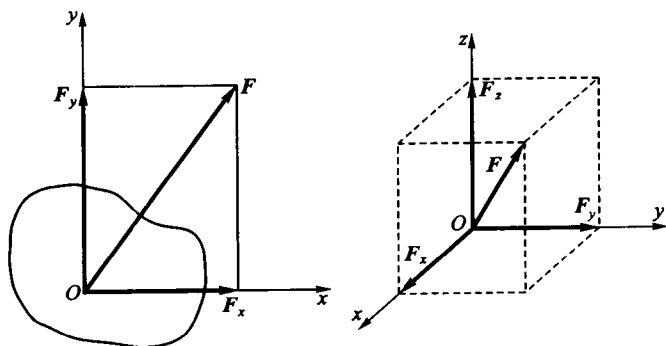


图 1-7

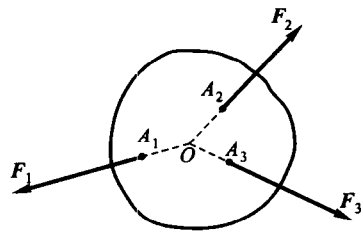


图 1-8

1.2.4 公理四 作用和反作用定律

两个物体间相互作用的一对力,总是大小相等,方向相反,作用线相同,并分别作用于这两个物体。这两个力互为作用力和反作用力。

1.3 约束和约束反力

在空间可以自由运动,其位移不受任何限制的物体称为自由体,如空中飞行的飞机、火箭等。工程中的大多数物体,其某些方向的位移往往受到限制,这样的物体称为非自由体。例如,在钢轨上行驶的火车、安装在轴承中的转轴等,都是非自由体。对非自由体某些方向的位移起限制作用的周围物体称为约束。如钢轨是火车的约束,轴承是转轴的约束等。当物体沿着约束所限制的方向有运动趋势时,约束对物体必产生一作用力。约束对被约束物体的作用力称为约束反作用力,简称约束反力或约束力。约束反力的方向总是与非自由体被约束所限制的位移方向相反。这是用以确定各种约束反力方向的原则,至于约束反力的大小则不能预先独立地确定。约束反力以外的其它力称为主动力。在静力学中,约束反力和物体所受的主动力组成平衡力系,因此可用平衡条件求出约束反力。

下面介绍几种工程中常用的约束类型,并分析其约束反力的特点。

1.3.1 柔索约束

工程中常见的钢丝绳、三角带、链条等都可以简化为柔索。当物体受到柔索的约束时,柔索只能限制物体沿柔索伸长方向的位移。因此,柔索的约束反力作用在柔索与物体的接触点,其方向沿着柔索离开被约束物体,即必为拉力。图 1-9a 所示为两根绳索悬吊一重物。根据柔索反力的特点,可知绳索作用于重物的约束反力是沿绳索的拉力 F_A 、 F_B 。图 1-9b 所示为带传动装置。带对带轮的约束反力为沿两个带轮的外公切线的 F_1 、 F_2 。

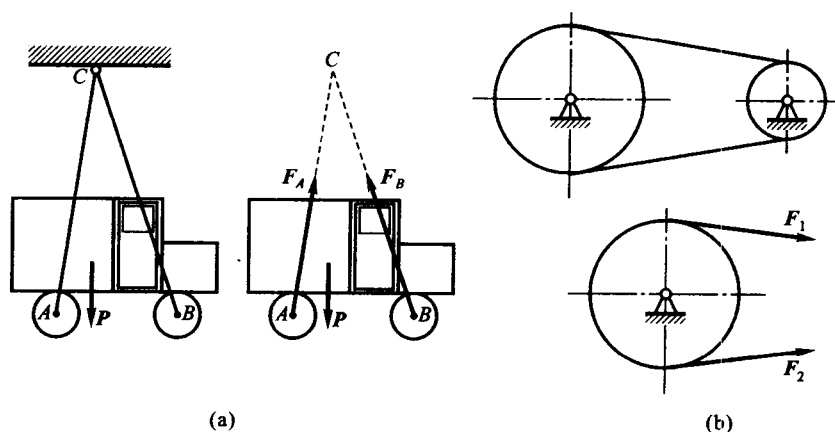
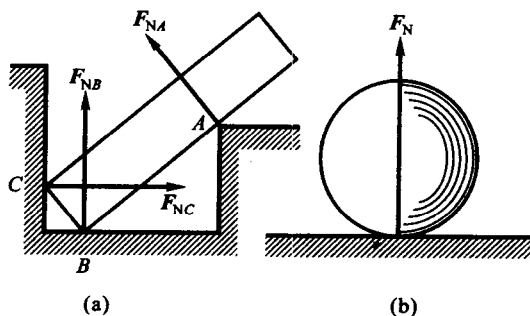


图 1-9

1.3.2 光滑接触面约束

若两接触面之间的摩擦很小,可以忽略不计时,则认为接触面是光滑的。光滑接触面对被约束物体在过接触点的切面内任意方向的位移不加限制,同时也不限制物体沿接触点处的公法线方向脱离接触面,但阻碍物体沿该公法线方向进入约束内部。因此光滑接触面的约束反力必通过接触点,方向沿着接触面在该点的公法线,指向被约束物体内部,即必为压力。通常这种约束反力称为法向反力。如图 1-10 中的 F_{NA} 、 F_{NB} 、 F_{NC} 、 F_N 所示。



1.3.3 光滑圆柱铰链约束

图 1-10

在图 1-11a 中,构件 A 通过其上的圆柱形孔套在构件 B 上的圆柱形销钉 C 上,构件 A 的运动受到销钉的限制,如果不计摩擦就构成了光滑圆柱铰链约束。由于销钉的直径一般比孔的直径小,故销钉的外表面和孔的内表面接触时为线接触。此接触线为圆柱的一条母线,可用其中点 K 来代替。按照光滑接触面约束反力的特点,销钉 C 作用于构件 A 的约束反力 F_N 应沿接触点 K 处的公法线,即沿着通过 K 点的半径方向。由于接触点 K 的位置一般不能预先确定,所以约束反力 F_N 的方向也不能确定。在实际受力分析时,可利用力的正交分解将该约束反力表示为两个正交分力 F_x 和 F_y ,如图 1-11b 所示。

光滑圆柱铰链有以下不同的结构。

(1) 固定铰支座 若构成圆柱铰链约束中的一个构件固定在地面或机架上作为支座,则称此铰链为固定铰支座,其约束反力一般用两个正交分量表示。如图 1-11b 所示。图 1-11c 为固定铰链支座的简化画法。图 1-12 中 O 为固定铰支座。

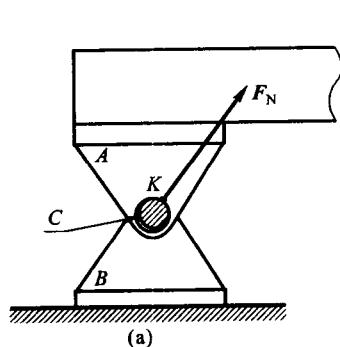


图 1-11

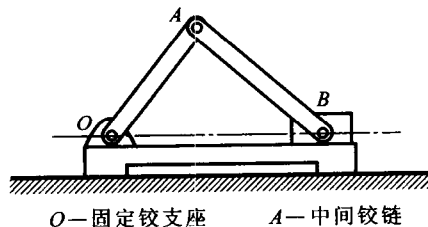
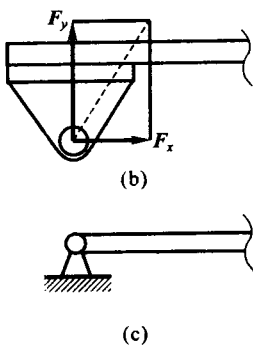


图 1-12

(2) **可动铰支座** 若在用圆柱铰链构成的支座与光滑支承面之间装有辊轴,就构成辊轴支座或可动铰支座。其约束反力垂直于光滑支承面,如图 1-13a 所示。图 1-13b、c 为可动铰支座的简化画法。

(3) **中间铰链** 将两个构件用圆柱铰链连接在一起成为中间铰链,其约束反力一般也用两个正交分量表示。如图 1-12 中 A 所示。

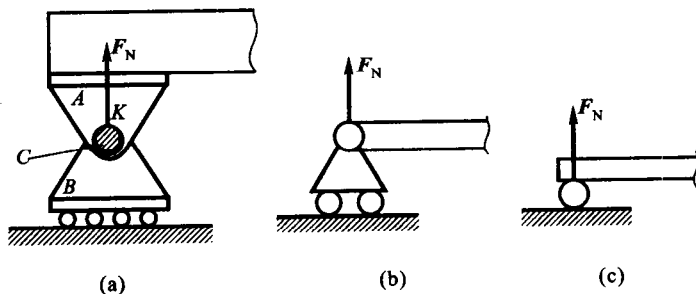


图 1-13

在工程结构中,两端用光滑铰链与其它物体连接起来的刚杆,如果不计杆的自重且杆上无其它主动力的作用,若杆处于平衡状态,则该刚杆是二力杆。显然,由光滑铰链约束的约束反力特点可知,上述刚杆两端所受到的两个约束反力必然为一对平衡力。由二力平衡公理可知,这两个约束反力必然大小相等,方向相反,作用线相同。

1.3.4 光滑球形铰链约束

构件 A 的球形部分嵌入构件 B 的球形窝内,就构成了球形铰链约束。这是一种空间的铰链约束。若两个球形表面之间无摩擦,则为光滑接触,构件 A 受到的约束反力 F_N 必通过球心沿着半径方向,但它的方位不能预先确定。通常将球形铰链的约束反力表示为正交的三个分力 F_x 、 F_y 、 F_z ,如图 1-14 所示。

除上述常见的约束以外,还有固定端等其它类型,将在以后章节里介绍。

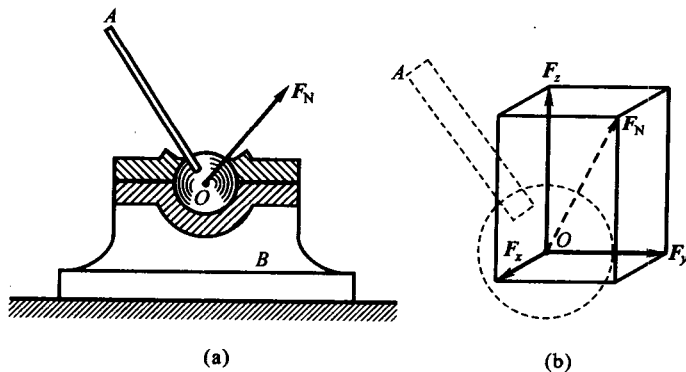


图 1-14

1.4 物体的受力分析 受力图

在求解静力平衡问题时,必须首先分析物体的受力情况,即进行受力分析。根据问题的已知条件和待求量,从有关结构中恰当选择某一物体(或几个物体组成的系统)作为研究对象。这时,可设想将所选择的对象从与周围的约束(含物体)的接触中分离出来,即解除其所受的约束而代之以相应的约束反力。这一过程称为解除约束。解除约束后的物体,称为分离体,画有分离体及其所受的全部力(包括主动力和约束反力)的简图,称为受力图。

画受力图是求解静力学问题的重要步骤。

例 1-1 重量为 G 的梯子 AB , 搁在光滑的水平地面和铅直墙上。在 D 点用水平绳索与墙相连。如图 1-15a 所示。试画出梯子的受力图。

解: 将梯子从周围的物体中分离出来,画出分离体图。先画主动力即梯子的重力 G , 作用于梯子的重心, 方向铅直向下。再画地面和墙对梯子的约束反力。根据光滑接触面约束的特点, B 、 A 处的约束反力 F_{NB} 和 F_A 分别与地面和墙面垂直并指向梯子, 绳索的约束反力 F_D 应沿着绳索的方向为一拉力。图 1-15b 即为梯子的受力图。

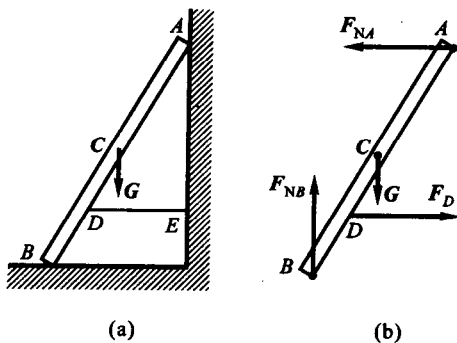


图 1-15

例 1-2 图 1-16a 所示的结构有杆 AC 、 CD 与滑轮 B 铰接组成。物体重 W , 用绳子挂在滑轮上。如杆、滑轮及绳子的自重不计, 并忽略各处的摩擦, 试分别画出滑轮 B (包括绳索)、杆 AC 、 CD 及整个系统的受力图。

解: (1) 以滑轮及绳索为研究对象, 画出分离体图。 B 处为光滑铰链约束, 杆 AC 上的铰链销钉对轮孔的约束反力 F_{Bx} 、 F_{By} ; 在 E 、 H 处有绳索的拉力 F_{TE} 、 F_{TH} , 如图 1-16b 所示。

(2) 在受力分析中, 若能先找出二力杆将有助于确定某些未知力的方位, 故先以二力杆 CD 为研究对象, 画出分离体图。设 CD 杆受拉, 在 C 、 D 处画上拉力 F_{SC} 、 F_{SD} , 且 $F_{SC} = -F_{SD}$ 。其

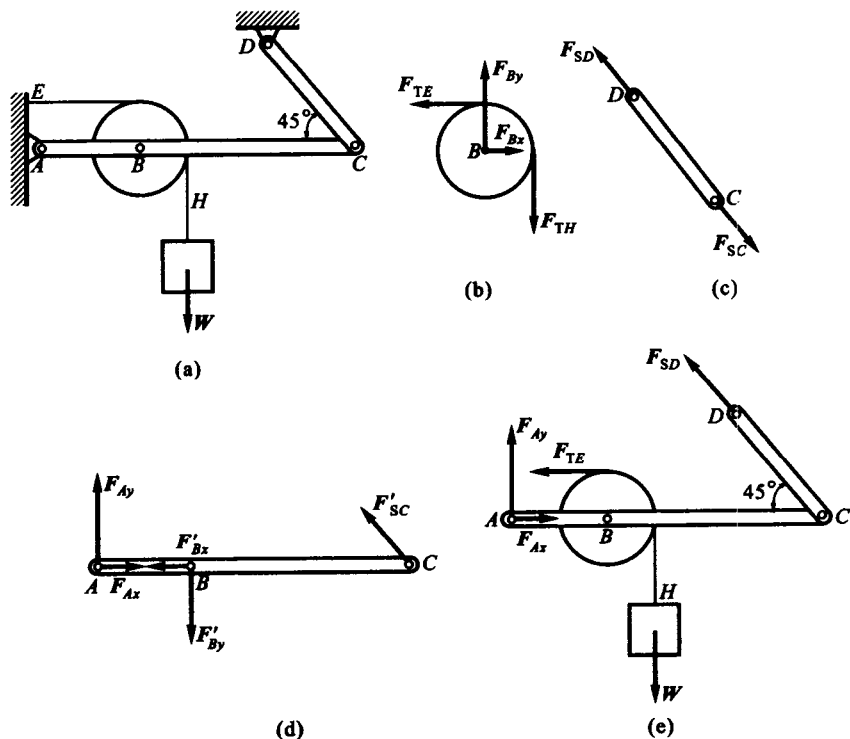


图 1-16

受力图如图 1-16c 所示。

(3) 以 AC 杆(包括销钉)为研究对象,画出分离体图。 A 处为固定铰支座,故画上约束反力 F_{Ax} 、 F_{Ay} ;在 B 处画上 F'_{Bx} 、 F'_{By} ,它们分别与 F_{Bx} 、 F_{By} 互为作用力与反作用力。在 C 处画上 F'_{SC} ,它与 F_{SC} 互为作用力与反作用力。其受力图如图 1-16d 所示。

(4) 以整个系统为研究对象,画出分离体图。此时 AC 杆与 CD 杆在 C 处铰接,滑轮 B 与杆 AC 在 B 处铰接,这两处的约束反力互为作用力与反作用力,并成对出现,在研究系统平衡时将自动消去,因此不必画出。这样,系统所受的力有:主动力 W ,约束反力 F_{SD} 、 F_{TE} 、 F_{Ax} 及 F_{Ay} 。其受力图如图 1-16e 所示。

在上例中,当取整个系统为研究对象时, AC 杆与 CD 杆在 C 处不分开,此时这两根杆之间的相互作用力称为内力。一般来说,当取某个系统为研究对象时,该系统内构件之间的内力都不必画出,而只画作用在系统上的外力。需要指出的是,内力和外力的区分不是绝对的,在一定的条件下,内力和外力是可以相互转化的。例如在上例中,如果要画由杆 AC 、滑轮 B 、重物和绳子所组成系统的受力图,则杆 CD 对杆 AC 的约束反力 F'_{SC} (原来整个系统中两杆之间的内力)就成了该系统的外力。

求解静力学问题,必须先画受力图。如何有针对性地选取分离体并正确地画出受力图,是解题的关键。它不仅在静力学中,而且在动力学中也很重要。

综上所述,要正确地画出受力图,必须熟练掌握以下几点:

(1) 根据题意选择恰当的研究对象。可以取单个物体为研究对象,也可以取由几个物体组成的系统为研究对象。这一点在学习了用平衡方程求解力学问题后,会有更确切的体会。

(2) 根据已知条件,画出全部主动力。

(3) 根据约束的类型,画出相应的约束反力。一个物体往往同时受几个约束的作用,应根据每个约束的特征确定约束反力的个数(一个力、两个正交分力或三个正交分力)和方位。^①切不可凭主观臆测去推断约束反力的方位。为此,可核对每一个所画出的约束反力,指出它是由哪个物体(施力体)施加的。约束反力不能多画,也不能漏画。

(4) 要熟练地使用规定的字母和符号标记各个力,对作用力和反作用力应注意它们的标记特征。要按原结构图上各构件的尺寸和几何关系作图,以免引起错误。

(5) 对系统中的二力杆应给予特别的注意。必要时还应根据有关公理或推论对某些约束反力进行分析,并确定其方位。

(6) 当以系统为研究对象时,受力图上只画研究对象所受的主动力和约束反力,而不画其成对出现的内力。

小 结

1. 力是矢量,力的运算服从矢量运算法则。

2. 各种约束的约束反力必须按照规定的画法在受力图上准确地表示。

3. 在画受力图时,选定研究对象后,每解除一个约束,就必须加上该约束能够产生的约束反力,而不要事先判断该约束在此时有没有这些约束反力,以免引起不必要的错误;对系统中的二力杆必须准确无误地给以确定,以便简化解题过程。

思 考 题

1-1 二力平衡条件与作用和反作用定律中的两个力都是等值、反向、共线,试问二者有何区别,并举例说明。

1-2 什么是二力杆?为什么在进行受力分析时要尽可能地找出结构中的二力杆?

1-3 什么是刚体?

1-4 什么是平衡?

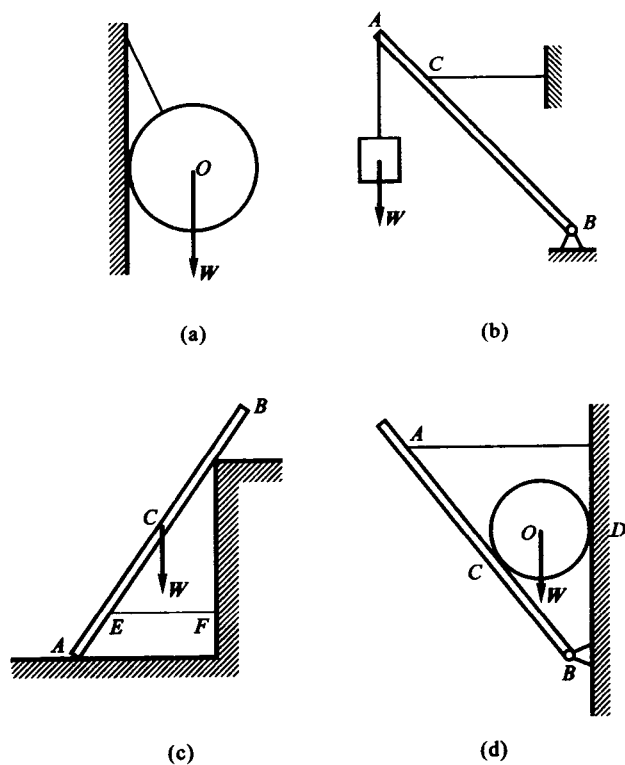
1-5 画物体的受力图时应注意些什么?

习 题

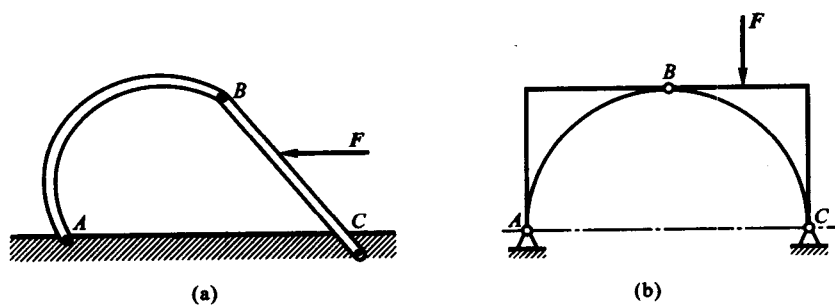
1-1 画出图中有字符标注的物体的受力图。设各接触面皆为光滑面,未画重力的物体重量不计。

1-2 试分别画出图示结构中构件 AB 与 BC 的受力图。

^① 在学习了固定端约束后,将增加一个集中力偶的约束反力偶。

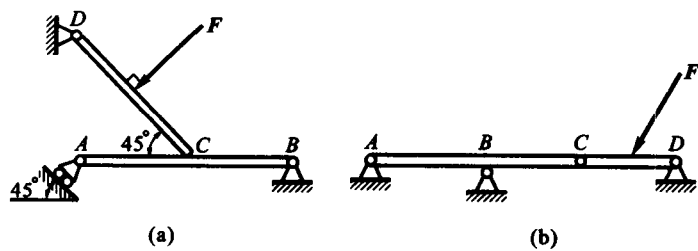


题 1-1 图



题 1-2 图

1-3 分析图中组合梁各杆件的受力情况,画出其受力图。梁的自重不计。



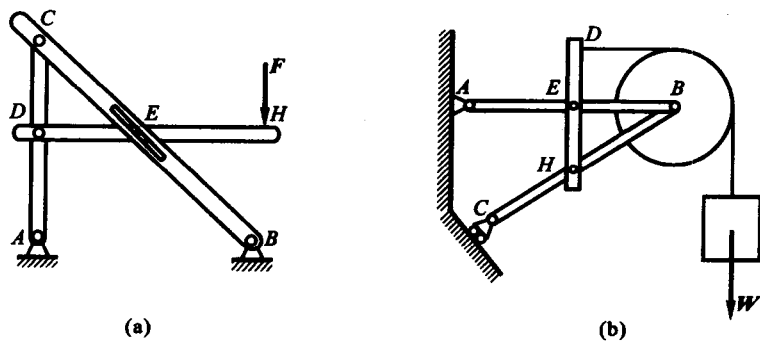
题 1-3 图

1-4 画出图中下列物体及整个系统的受力图(各杆件的自重不计,摩擦不计):

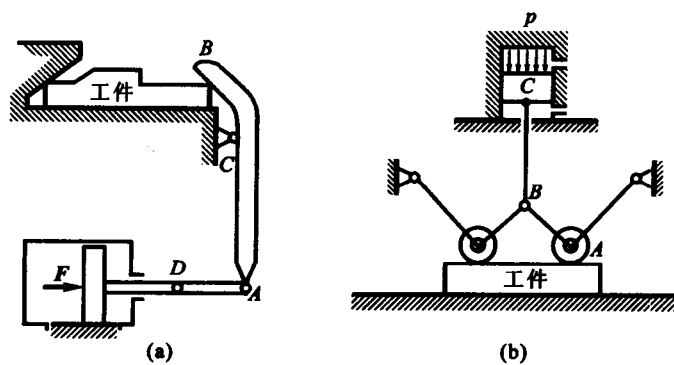
(1) 图 a 中的杆 DH 、 BC 、 AC 及整个系统;

(2) 图 b 中的杆 DH 、 AB 、 CB 及整个系统。

1-5 画出图中各标注物体的受力图。



题 1-4 图



题 1-5 图

第2章

力系等效定理

力系的主矢和主矩是力系的两个基本特征量。本章将首先介绍力在轴及平面上的投影、力矩的概念。进而给出以主矢和主矩为核心的力系等效定理和力系平衡定理,以此作为静力学的理论基础。

2.1 力在轴及平面上的投影

2.1.1 力在直角坐标轴上的投影

力在坐标轴上的投影是一代数量。其大小等于力的始端与末端在该轴上的投影(垂足)间线段的长度;正负号为:若自力的始端投影至末端投影的指向与轴的正向一致时,取正号;反之为负。

以 F_x 、 F_{x1} 表示力 F 、 F_1 在 x 轴上的投影。由图 2-1,则有

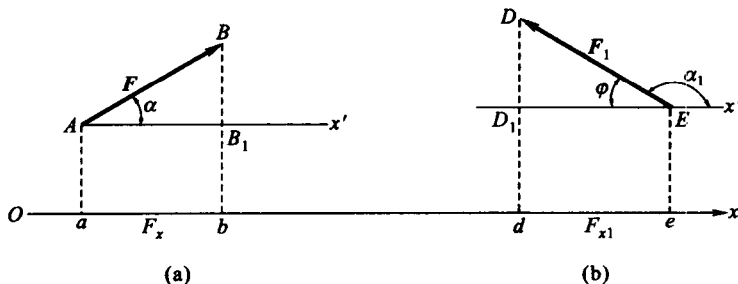


图 2-1

$$F_x = AB_1 = ab, \quad F_{x1} = -ED_1 = -ed$$

而

$$AB_1 = F \cos \alpha, \quad ED_1 = F_1 \cos \varphi = -F_1 \cos \alpha_1$$

故

$$F_x = F \cos \alpha, \quad F_{x1} = -F_1 \cos \varphi = F_1 \cos \alpha_1 \quad \text{①}$$

① 力 F 及 F_1 的模为 $F(|F|)$ 及 $F_1(|F_1|)$, 它们与力的投影 F_x 、 F_{x1} 的意义不同。

α, α_1 为力与轴正向间所夹的角, 称为方向角。

因此, 力在坐标轴上的投影等于力的大小乘以力与坐标轴正向间夹角(方向角)的余弦(方向余弦)。

当力与坐标轴正向间夹锐角时, 投影为正(图 2-1a); 夹钝角时, 投影为负(图 2-1b)。若力垂直于坐标轴, 则力在该轴上的投影为零。

由图 2-2, 力 F 在空间直角坐标轴上投影为

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F \cos \alpha \\ F_y &= F \cos \beta \\ F_z &= F \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

其中 F_x, F_y, F_z 分别为力 F 在 x, y, z 轴上的投影, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为对应于方向角 α, β, γ 的方向余弦。

引进沿 x, y, z 轴的单位矢量 i, j, k , 则力 F 表示为

$$F = F_x i + F_y j + F_z k \quad (2-2)$$

等式右端各项分别为力 F 在三个坐标轴上的分力 F_x, F_y, F_z 。显然, 力在坐标轴上的投影与力沿相应轴向的分力的概念是不同的。

若已知力 F 在直角坐标轴上的投影 F_x, F_y, F_z , 则该力的大小与方向可由下式确定

$$\left. \begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \\ \cos \alpha &= \frac{F_x}{F}, \cos \beta = \frac{F_y}{F}, \cos \gamma = \frac{F_z}{F} \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

在平面情形中, 分别有

$$F = F_x i + F_y j \quad (2-4)$$

$$\left. \begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \\ \cos \alpha &= \frac{F_x}{F}, \cos \beta = \frac{F_y}{F} \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

为了便于计算, 通常取力与坐标轴所夹的锐角计算其余弦。投影的正负号则按力始端投影至力末端投影的指向与坐标轴正向是否一致的原则确定。

不难发现, 以上讨论也适用于其它矢量(主矢、力矩矢、速度、加速度等)。

2.1.2 力在平面上的投影

力在平面上的投影是一矢量, 它由力的始端及末端在该平面上的投影所构成的矢量表示, 如图 2-3 所示。

若力 F 与 z 轴间的夹角为 γ , 则力 F 在 xy 平面上的投影为 F_{xy} , 其大小为

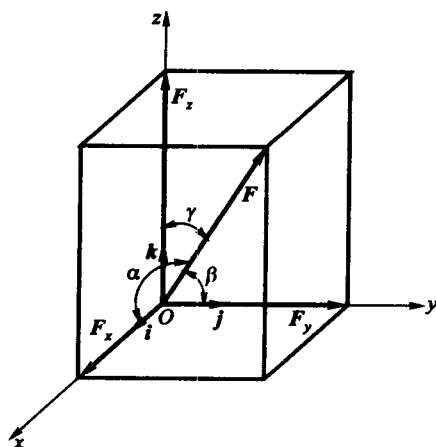


图 2-2

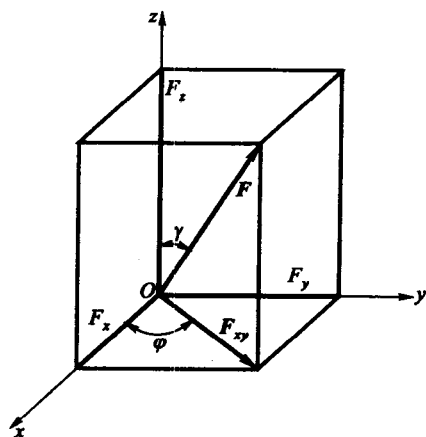


图 2-3

$$F_{xy} = F \sin \gamma \quad (\text{a})$$

有时可由力在某坐标平面上的投影,进而求得在坐标轴上的投影。由图可见,力 F_{xy} 在 x 、 y 坐标轴上的投影为

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F_{xy} \cos \varphi \\ F_y &= F_{xy} \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (\text{b})$$

结合式(a)、(b)可得

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F \sin \gamma \cos \varphi \\ F_y &= F \sin \gamma \sin \varphi \\ F_z &= F \cos \gamma \end{aligned} \right\} \quad (2-6)$$

上述确定力在坐标轴上的投影的方法称为二次投影法。

例 2-1 一力 F 自原点始通过点 $(2, -4, 1)$ (图 2-4 示), 其模为 $F = 100 \text{ N}$ 。求该力沿 x 、 y 、 z 轴向分力的大小。并以单位矢量 i, j, k 表示该力。

解: 力 F 的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{21}} = 0.437$$

$$\cos \beta = \frac{-4}{\sqrt{21}} = -0.873$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{21}} = 0.218$$

力 F 在 x 、 y 、 z 轴上的投影为

$$F_x = F \cos \alpha = 43.7 \text{ N}$$

$$F_y = F \cos \beta = -87.3 \text{ N}$$

$$F_z = F \cos \gamma = 21.8 \text{ N}$$

力沿坐标轴向分力的大小为

$$|F_x| = 43.7 \text{ N}, |F_y| = 87.3 \text{ N}, |F_z| = 21.8 \text{ N}$$

力 F 表示为

$$\begin{aligned} F &= F_x i + F_y j + F_z k \\ &= (43.7 \text{ N}) i - (87.3 \text{ N}) j + (21.8 \text{ N}) k \end{aligned}$$

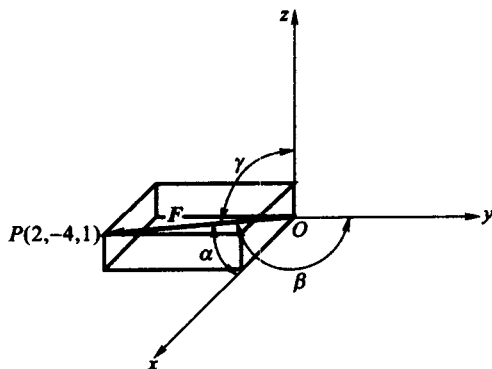


图 2-4

2.2 力系的主矢

设 $F_1, F_2, \dots, F_n$ 为作用于刚体的某力系(图 2-5)。力系中各力矢的几何(矢量)和称为力系的主矢,记以 F'_R 。即

$$F'_R = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum F_i \quad (2-7)$$

若采用几何法,则可按力多边形法则得到力系的主矢:在空间任选一点 a_0 为起点,首尾相接地作矢量 $\overrightarrow{a_0 a_1}, \overrightarrow{a_1 a_2}, \dots, \overrightarrow{a_{n-1} a_n}$ 使这些矢量的模及方向分别和力系中各力 $F_1, F_2, \dots, F_n$ 的模及方向相同。一般地可得一“开口”的空间力多边形,则自起点 a_0 至终点 a_n 连接所得的矢量 $\overrightarrow{a_0 a_n}$,