# 拓扑学初步

苏步青 著

复旦大学出版社

# 拓扑学初步

苏步青著

复旦大学出版社

**拓 扑 学 初 步**

复 旦 大 学 出 版 社 出 版
新 华 书 店 上 海 发 行 所 发 行
复 旦 大 学 印 刷 厂 印 刷
字数 76 千字 开本 850×1168 1/32 印张 2.625
1986 年 4 月第一版 1986 年 4 月第一次印刷
印数：1——20,000

书号：13253·037 定价：0.70元

# 简　引

拓扑学是数学的极其重要的分科，从前隶属于几何学，而现在则成了一门渗透于各数学分科中的学问。拓扑学的起源，要回溯到18世纪中叶Euler的发现。Euler 1736年处理了著名的皇堡(Koenigsberg)过桥问题，1750年又发现了以他的名字命名的重要公式——Euler多面体公式。应用这公式到多面体论中去，我们将证明一个古典的定理：正多面体只有五种，就是I. 正四面体，II. 立方体，III. 正八面体，IV. 正十二面体，V. 正二十面体。

本书的内容是从Descartes和Euler关于多面体的研究开始，涉及到皇堡过桥、Hamilton周游世界、地图绘色等问题，叙述形式不拘一格，说到那里，就算是那里。用语力求通俗，不求严密。类似趣味数学，但也不是完全如此。用到一点立体几何、球面三角的知识，但偶然也添进一些略带近代色彩的东西，装点门面。除此而外，还将谈到近代发展的情况。

# 目　录

# 第一部分 Euler 公式

## §1 多面体与 Euler 公式

多面体是指若干张平面所围成的立体，这些平面称为多面体的面。两邻接平面相交于一直线，这直线称为多面体的棱。三张以上的平面相会于一点时，称这点为多面体的顶点。理论上说来，最单纯的多面体是四面体。它的面是由四只三角形形成的，每对面相会于一条棱，共有六条棱。四个顶点中，每两个顶点是一条棱的端点。有四个面的多面体只有一个类型，简称四面体（图 1)。以下，以 $a_0$ 表示一个多面体的顶点个数，$a_1$ 表示棱的条数，$a_2$ 表示面的张数，那末，在四面体里，我们有

$$a_0 = 4, \qquad a_1 = 6, \qquad a_2 = 4。$$

古代希腊人把四面体看做在它的一个面上建立着的金字塔，而我们现在却称它为三角锥。人们能将巨大的金字塔翻成微小的尖锥，这样抓住形象的要点，可以说是伟大的吧！

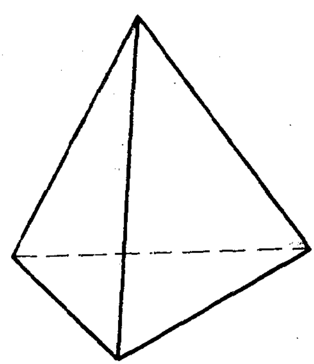


图 1

闲话少谈。四角锥（图 2[a]）是五面体。五个面中，只有底面是四角形，其侧面都是三角形。这时，我们有

$$a_0 = 5, \qquad a_1 = 8, \qquad a_2 = 5。$$

可是，在五面体中，最常见的是三棱柱（图 2[b]）。对于它就有

$$a_0 = 6, \qquad a_1 = 9, \qquad a_2 = 5。$$

同样，把一个四面体的顶点附近砍掉，便得到一个五面体（图 2[c]）。对于这个五面体显然也是

$$a_0=6, \qquad a_1=9, \qquad a_2=5。$$

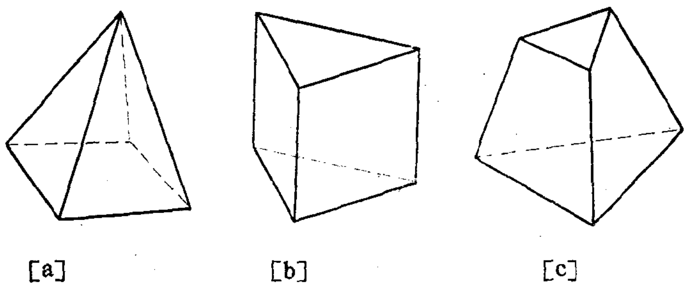


图 2

在六面体里，最常见的是立方体和五角锥。如果把两个四面体贴合在一起，也可造出一个六面体来（六三型）。如果把一个四面体的两个顶点附近劈平，得到的是一个难看的六面体。又比如，把四角锥的顶点附近劈平，也可以得到一个六面体，不过它是一个由六个四角形围成的、不端正的立方体，在形象上，同立方体没有两样。

又比如，把四角锥在底的一个顶点附近切除掉，也可得到六面体。如果切得深些，便产生这样六面体，好比把四角锥的底面折起来的六面体，但是它不过是六三型横摆的六面体而已（图3）。

如上所述，多面体是多种多样，可是它的顶点数 $a_0$、棱数 $a_1$ 和面数 $a_2$ 之间却存在着一定的关系，那就是 Euler 公式

$$a_0+a_2=a_1+2。 \tag{1}$$

从上面的例子中，可以看出：公式（1）对于所举的四面体、五面体、六面体都成立。但是，这不能作为一种证明。

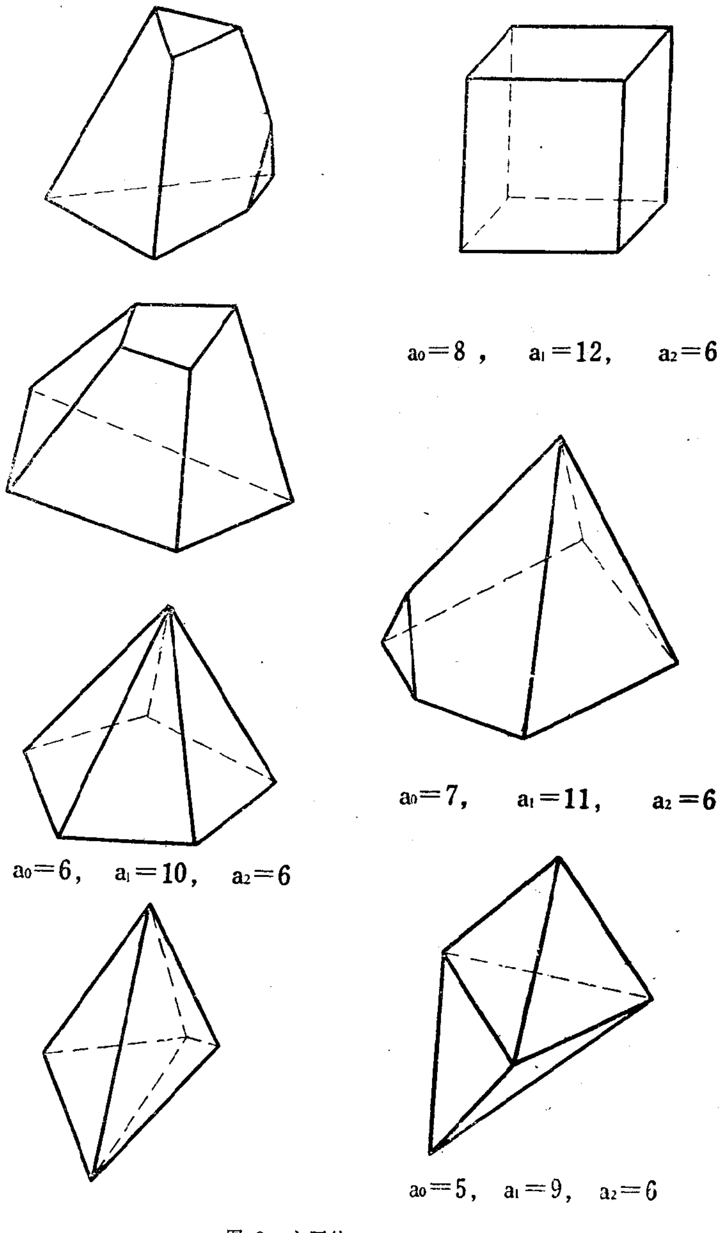



图 3　六面体

## §2 Euler公式的证明

证明的方法有多种，这里为了尽可能平易化，把它改成为平面的问题。

我们从语言简炼出发而说这是与多面体有关的问题，但其实问题在于多面体的表面上。如果把多面体的模型看为由伸缩自如的假想的橡皮膜做成的，在它的一个面上穿个小洞，用指头插进去，将整个多面体的表面拉平到平面上来。这时，假设不撕破橡皮膜，也不使它起皱纹。各条棱当然要变为弯曲的难看的曲线，但利用伸缩性也可修整为顺眼的形状。

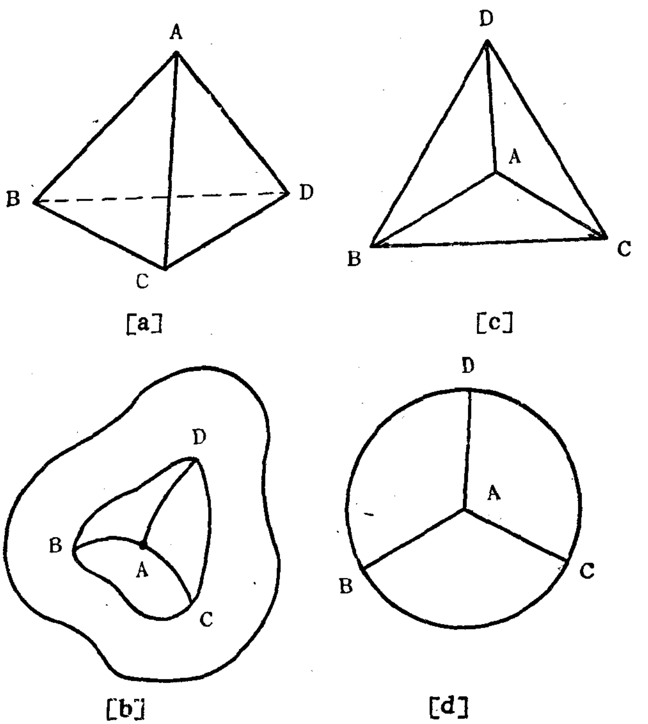



图 4

举例来说明：在图 4[a]所示的四面体 $ABCD$ 的底面 $BCD$ 内挖一个洞，如上操作之后，它就变成如同图4[b]所示的东西，最外面的毛糙境界就是洞的轮廓。如果除去开洞的面，并且修整一下棱的形状，便得到 4[c] 或 4[d] 那样的图。我们也可作另一种看法，即：不是把开洞的一面丢掉，而是把它拓广到纸面以外去了。这样一来，四面体的底面变为 4[c] 里三角形 $BCD$ 的外部。我们的问题不是要对多面体各面的面积、各棱的长度作考察，而是要考虑顶点、棱、面之间的关联情况，换言之，仅关心多面体表面的结构。因此，这样作成的拓扑图非常宝贵。

再举立方体的拓扑图为例。

如果怕橡皮膜的拉开靠不住，便可另取妥善的办法。现在用铅丝做立方体的骨骼或框架模型，也即仅由棱的部分构成的模型。把立方体的一个面摆做水平面，而且在这个面的中心附近上方放置一个光源，然后把框架投影到纸上，便获得如图 5 上方的拓扑图。图中，大正方形是接近光源的一个面的周围的投影。因此，在必须考虑面的场合，有一个面重合其余的五个面上。

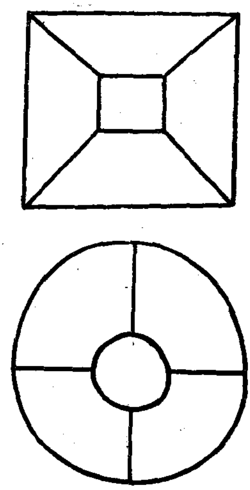


图 5

这样的图形是一个线状图。这是一个特殊的线状图，而我们却需要一般线状图去进行对 Euler 公式的考察。所谓线状图是指这样的图形，其中有若干个点和连接它们的若干条线，不过两点之间不限于一条连线，而相反，所有点之间一定有联络，就是说，从任何一点到另外一点总是可以沿着某条线到达的。由于我们要考察 Euler 公式，对线状图还必须处理区域问题。什么叫区域？是指由线状图中的线围成的平面的一部分。当然，这个部分再也不能由线状图里的别的线分割，就是连通的平面部分。

设 $k$ 为一个线状图中的区域数。在多面体的拓扑图里，因为除去

一个面，所以在它的线状图里 $k=a_2-1$，用这改写 Euler 公式，便有

$$a_0+k=a_1+1。\qquad (2)$$

式中，$a_0$ 和 $a_1$ 如前分别表示线状图的点和线的数目。现在，我们将对线状图证明公式（2）成立。

在线状图里把一个区域的一条境界拆除后，区域的个数减少一个，但点的个数不变，而且线状图的联络依然保持着。只要区域存在着，这个操作便可继续下去，经过 $k$ 条线的拆除，我们可不破坏线状图的联络，也不减少点的个数，而消灭区域。

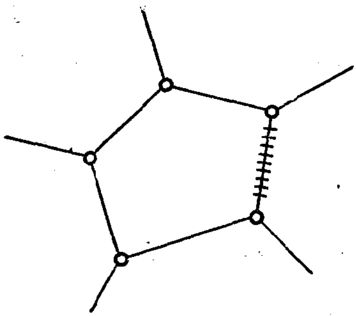


图 6

在没有区域的线状图里，线是联络着的，但不成环路，即所谓树（Tree）。它有枝有节，但枝不成环路。在一个树木型的线状图（图7）里，从一个端点取下一条一条的线，同时，点也一个一个地减下去，终于到达一条线和它的两个端点。所以，在树木型的线状图里，线的数目比点要少一个。

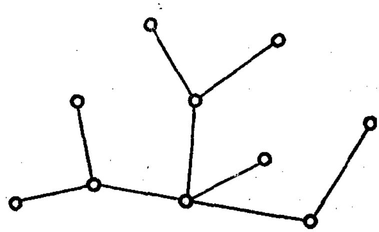


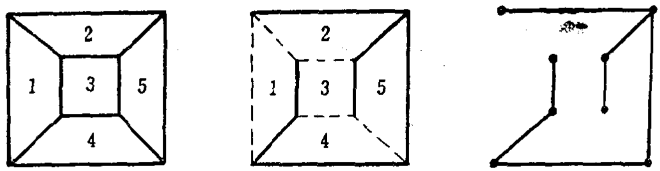
图 7

现在，让我们回顾一下原先的线状图，首先是为了消灭区域拆了 $k$ 条线。在剩下来的树木型线状图里，点仍然有原来的 $a_0$ 个，所剩下来的线有 $a_0-1$ 条。因此，原先的线状图的线的总数即 $a_1$ 等于拆去的 $k$ 和剩下的 $a_0-1$ 两者之和：

$$a_1=k+a_0-1。$$

这就是（2）。这样，证明了 Euler 公式。

图 8 是立方体的拓扑图。区域有五个，该拆的线也是五条。如[b]所示，拆掉五条线，剩下来的树木型便成了[c]。




〔a〕　〔b〕　〔c〕

图 8

再举一个例子（图 9）。这好象是很怪的树木，但是不能说没有这种树木。如果没有，可用盆景搞它一个嘛！这个线状图并非多面体的拓扑图。这里首先是面 2 和 5 相邻于两条线，还有面 2 是二角形，这样的情况在我们所谓的多面体上不可能出现。但是，如果容许由曲面所围成的多面体，那末该是相当可能的。在这样的场合，Euler 公式也成立。

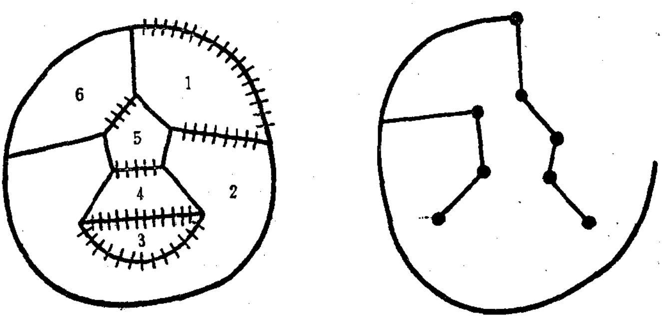



图 9

但是，多面体的意义可不能无限制地给以拓广，否则，就会导致 Euler 公式的不成立。例如，在一个立方体的一个面（称 $a$）上放置一个小立方体，用它们合成一个立体（图10）。这个立体固然是由平面围成的，是两个立方体，顶点各有八个，二八 16。棱各有十二条，共 24 条。但是面呢，虽则原先各六个面，而由于小立方体的一面被消灭了，所以面的总数为 11。就是

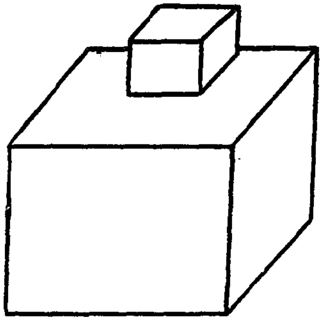


图 10

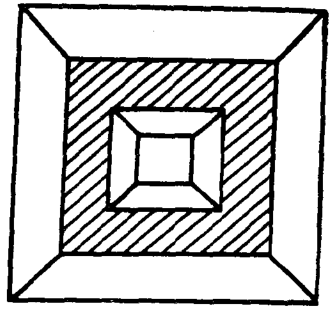


图 11

$$a_0 = 16, \qquad a_1 = 24, \qquad a_2 = 11,$$
$$a_0 + a_2 = 16 + 11 = 27,$$
$$a_1 + 2 = 24 + 2 = 26。$$

因此，这时 Euler 公式不成立。这个立体的拓扑图如图 11 所示，内外两部分由有阴影的中间部分所隔断而失去联络。所以 Euler 公式不适用于这里。这个环形部分就是从下一立方体的顶面挖掉上一立方体的底面后剩下的多角形。我们说过多面体的面是多角形，那是在单纯多角形的意义上讲的，决不允许象图 12 所示的由内外完全分离的二折线所围成的广义"多角形"（在凸多面体的场合，不发生这样的面）。就是说，多面体的所有顶点必须满足"由棱来联络"这一条件。如果不是这样，就不符合我们的线状图的定义，问题又当别论。

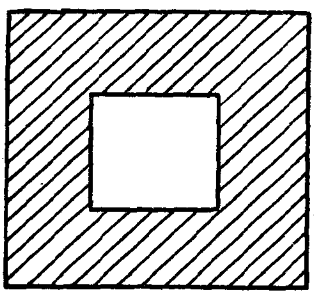


图 12

## § 3 Descartes的手稿

Descartes 关于多面体的一般理论曾经写过一篇短稿，这份手稿为他的友人克勒鲁斯里厄所珍藏，当时（1675—76)在巴黎的 Leibniz

把手稿的一部分抄写了去。这个抄本中，包括了Descartes的多面体概论的遗稿。整个遗稿一度失传，后来幸亏重新找到Leibniz的拉丁文抄本，立即出版。不久又添加注解，翻成法文。

Descartes的手稿中所处理的问题，和Euler定理有密切关系。本节将讲这个问题。

首先讲一讲立体几何中的一些术语。我们在欧几里得《原本》十一卷立体几何中看到多面体的术语，但没有定义。在定义11里说，立体角是指在一点所作的三个或三个以上不同平面的平面角围成的角。又在定义6里定义了二半平面所做成的面角。

如图13所示，用$O$-$ABC$表示具有三个平面角的立体角。三个平面角$AOB$，$AOC$，$BOC$称为立体角的平面角。每个平面角是用有关平面和以$O$为中心的单位球的交圆弧$AB$,$AC$,$BC$来测量的。因此，以$c$,$b$,$a$分别表示这三圆弧的长。三个平面角分别是球面三角形$ABC$的三个角$\alpha,\beta,\gamma$。

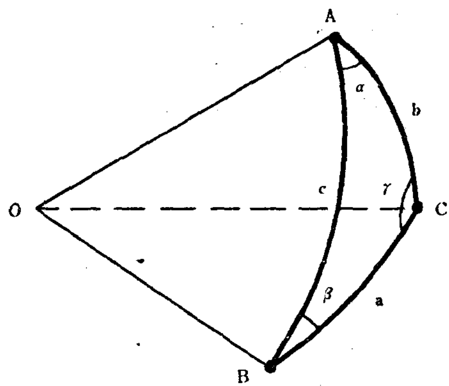


图 13

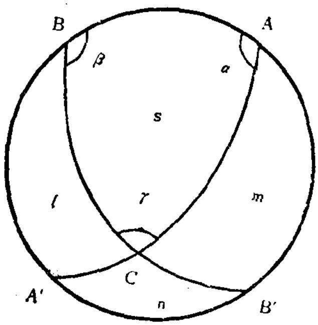


图 14

立体角的大小是由上述单位球上所截下的球面多角形的面积来量的。在图13中，就是球面三角形$ABC$的面积。容易知道，这块面积等于$\alpha+\beta+\gamma-\pi$。

实际上，在单位球面三角形$ABC$里，设$A'$和$B'$分别是$A$和$B$的对径点，过$A$，$B$的大圆，也过$A'$,$B'$，且平分球面。设在包含$C$的半球面

上，如图 14 所示的领域的面积分别是 $s,l,m,n$。由于

$$s+l=\frac{\alpha}{2\pi}\times\text{球面的面积}=\frac{\alpha}{2\pi}\times 4\pi=2\alpha,$$

同样 $s+m=2\beta$，$s+n=2\gamma$，而且

$$s+l+m+n=2\pi,$$

所以

$$s=\alpha+\beta+\gamma-\pi。$$

一个立体角必有它的补立体角，这恰恰相当于平面图形中一个角的外角。现在作定义如下：

在立体角 $O\text{-}ABC$ 中，设平面 $OAB\perp OC'$（$C'$ 是在 $C$ 关于 $OAB$ 的反对一侧），$OCB\perp OA'$，$OAC\perp OB'$（$A'$，$B'$ 也有同样的限制）。那末，立体角 $O\text{-}A'B'C'$ 称为立体角 $O\text{-}ABC$ 的补立体角。以 $O$ 为中心引单位球面，使它和 $O\text{-}ABC$，$O\text{-}A'B'C'$ 相交于两个球面三角形 $ABC$，$A'B'C'$。边 $a',b',c'$ 分别与角 $A,B,C$ 互为补角，角 $A',B'$，$C'$ 分别与 $a,b,c$ 也互为补角，就是各面角和对应的平面角互为补角（图 16）。

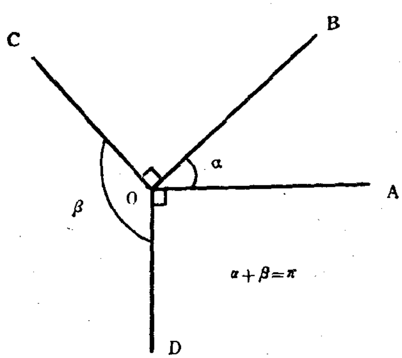



图 15

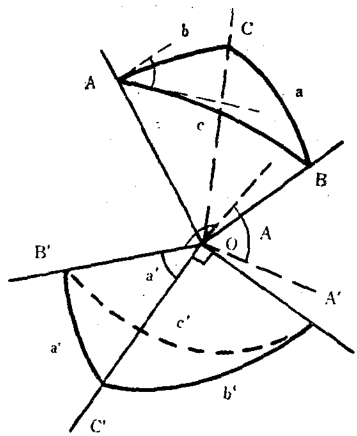



图 16

$$A+a'=B+b'=C+c'=\pi,$$

$$a+A'=b+B'=c+C'=\pi。$$

设立体角 $O\text{-}ABC$ 和 $O\text{-}A'B'C'$ 的大小分别为 $M$ 和 $M'$，它们是球

面三角形 $ABC$ 和 $A'B'C'$ 的面积，从上式得出

$$\begin{cases} M = A+B+C-\pi \\ \quad = 2\pi-(a'+b'+c'), \\ M' = A'+B'+C'-\pi \\ \quad = 2\pi-(a+b+c), \end{cases} \tag{1}$$

就是说，一个立体角的补立体角等于 $2\pi$ 减去它的平面角之和。

即使在不是三面角而是凸立体角的场合，同样的结果对任何立体角也是成立的。

其次，我们来讲 Descartes 的手稿。

这份手稿中，使用了在著作《方法叙说》（1637）里已经不用的记号代数的遗留文字，从此推定手稿可能是 1630 年前后的著作。

在 17 世纪初叶，人们关于多面体的知识还停留在欧几里得的《原本》的水平，而这份手稿作为多面体的一般理论确是最初的尝试。

Descartes 在这手稿里把平面图形当作拓广的基础。从“凸多角形的外角之和等于 $2\pi$（单位圆的周长）”这一命题出发，无证明地推出下述事项：“凸多面体的补立体角之和等于 $4\pi$（单位球面的表面积）”。这为下一个基本命题起到了引理的作用。

如图 17 所示，立体角 $O$–$ABC$ 的补立体角有如下的作图，就是：从 $O$–$ABC$ 内的一点 $O'$ 向各面 $BOC$, $AOC$, $AOB$ 分别引垂线 $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$，立体角 $O'$–$A'B'C'$ 就是立体角 $O$–$ABC$ 的补立体角（设 $ABC$ 为立体角 $O$–$ABC$ 与中心 $O$ 的单位球面相交而成的球面三角形，那末角 $C$ 是面角 $A'FB'$，它与 $A'O'B'$ 互为补

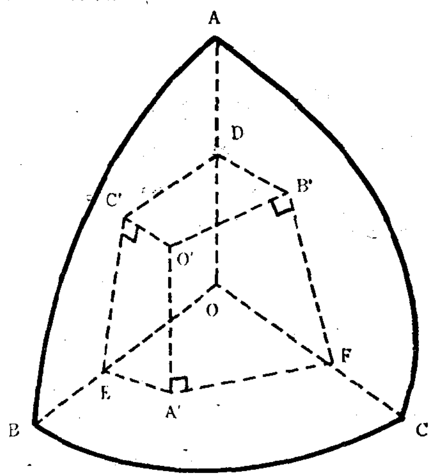


图 17

角，角 $A$、角 $B$ 也同样）。

在平面上，我们对一个凸多角形采取从内部一点 O 引各边的垂线的办法，立刻可证外角之和等于 $2\pi$（图18）。同样，对凸多面体也可以取内部的一点 $O$，作单位球面，而把多面体投影到这球面。那末，从上述的补立体角的作图法得知，它的总和恰恰一回遮盖了全球面。因此，多面体的补立体角的总和是 $4\pi$。

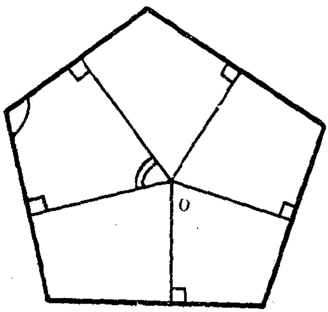


图 18

我们为简便而讨论了立体角是三面角的情况，但只要是凸立体角，便可得出同一结果。现在，设

$S=$ 立体角的个数，

$F=$ 面的个数，

$P=$ 平面角的个数，

$\Sigma=$ 所有平面角的大小之和，

$\Delta=\dfrac{\pi}{2}$。

对于多面体的各立体角一定成立关系式（1），把它关于所有立体角总加起来，从上述结果得出

$$8\Delta=4S\Delta-\Sigma。$$

所以得出下列“基本命题”：

$$\frac{\Sigma}{\Delta}=4S-8。\qquad (2)$$

其次，设各面的平面角（边）的个数为 $n_i$，那末内角之和是

$$2(n_i-2)\Delta=2n_i\Delta-4\Delta。$$

把这样的 $F$ 个面的式子加起来，便有

$$\Sigma=(2P-4F)\Delta,\qquad (3)$$

式中

$$P=\sum_i n_i。$$