

高等学校教学参考书 彭匡鼎 李湘如 编

热力学与统计物理学

例题和习题 (统计物理学分册)

高等教育出版社

0414-44
7.12 (2)

热力学与统计物理学

例题和习题

(统计物理学分册)

彭匡鼎 李湘如 编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书系作者根据其多年教学工作中积累的材料选编而成。

全书共九章，每节开头有内容摘要，介绍基本物理概念及主要公式。所举例题都具有一定典型性，并适当阐述解题思路和解题技巧，这对指导初学者解答统计物理学习题有一定实际意义。书中还编排了 654 个习题可供读者练习，以巩固所学内容。

本书是一本教学参考书，可供大专院校物理专业及有关专业的师生参考。

热力学与统计物理学例题和习题

(统计物理学分册)

彭匡鼎 李湘如 编

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 7.5 字数 177,000

1989年8月第1版 1989年8月第1次印刷

印数 00 001-- 2 475

ISBN 7-04-000003-2/O.3

定价 2.40 元

前 言

编者从长期教学中积累的三千多道例题和习题中精选出例题 92 道和习题 654 道,并结合自己的教学实践经验编成本书。不少师生反映,统计物理学的习题比较难解,而习题课也没有合适的参考书。编者希望本书能同时起到习题指导书、习题集及补充教材的作用。

本书各章开头都有内容摘要,介绍主要的物理概念及公式。这些内容密切结合我国现行教材,同时又前后呼应自成系统。在例题中系统介绍各类型习题的解题方法和技巧,加深和突出有关内容,并指出学生容易出错的地方和容易混淆的概念。编者在注意基本理论学习的同时,力求反映统计物理学的现代应用,选编了一些与此有关的例题和习题。

郑智绵先生对本书的编写给予了很大的支持和帮助,提供了不少习题,并做了审稿工作。全书经陕西师范大学辛绵荣副教授校订,增色不少。云南大学物理系几位教师对本书的编写也做了许多工作,在此一并表示感谢。但由于编者水平有限,不妥之处在所难免,尚祈读者指正。

编 者

1986 年 5 月

目 录

第一章 数学准备	1
§ 1.1 排列组合 斯特令公式 一些定积分的计算 Γ 函数 误差函数	1
§ 1.2 黎曼 ζ 函数 欧勒求和公式 玻色函数	9
§ 1.3 随机事件及其几率 几率的乘法定理和加法定理	16
§ 1.4 二项式分布 泊松分布 高斯分布	23
第二章 气体分子运动论	32
§ 2.1 气体压强公式 麦克斯韦速度分布律	32
§ 2.2 气体分子碰撞的平均自由程	44
第三章 玻耳兹曼统计法	50
§ 3.1 M-B 能量分布律 理想气体	50
§ 3.2 在外势场中的理想气体 维里定理	61
第四章 经典系综法	71
§ 4.1 刘维定理 微正则系综 正则系综	71
§ 4.2 巨正则系综 非理想气体	87
第五章 量子玻耳兹曼统计法	103
§ 5.1 量子 M-B 统计法 德拜的固体比热容理论	103
§ 5.2 多原子气体的比热容	116
第六章 量子统计法	124
§ 6.1 引论 玻色-爱因斯坦统计法	124
§ 6.2 费密-狄拉克统计法	132
第七章 量子系综法	145
§ 7.1 态密度 量子正则系综	145
§ 7.2 量子巨正则系综 密度矩阵 铁磁性理论	156
第八章 涨落理论	166
§ 8.1 研究涨落的准热力学方法	166

§ 8.2 系综法求涨落 布朗运动	174
第九章 非平衡态的统计理论	185
§ 9.1 气体内的输运过程	185
§ 9.2 玻耳兹曼碰撞法 H定理 玻耳兹曼 积分-微分方程 ...	194
提示和答案	205
附录 基本物理常数表	230

第一章 数学准备

§ 1.1 排列组合 斯特令公式 一些定积分 的计算 Γ 函数 误差函数

1. 排列组合问题

a) 排列

乘法定理：做甲事有 m 种不同的方法，做乙事有 n 种不同的方法，且这 m 种方法与 n 种方法也彼此不同，则甲乙两事都做共有 $m n$ 种不同的方法。

定义 1：把 N 个不同的元素按照一定的顺序排成一列，叫做 N 个不同元素的全排列。其排列种数记为 P_N ，

$$P_N = N! \quad (1.1)$$

定义 2：从 N 个不同的元素中每次取出 $M (M < N)$ 个不同的元素，按照一定的顺序排成一列，叫做选排列。其排列种数记为 P_N^M ，

$$P_N^M = \frac{N!}{(N-M)!} \quad (1.2)$$

定义 3：在排列中允许元素重复出现，这种排列称为可重复排列。从 N 个元素中每次取出 $M (M$ 可大于 $N)$ 个元素的可重复排列的种数记为 U_N^M ，

$$U_N^M = N^M \quad (1.3)$$

b) 组合

定义 1：从 N 个不同的元素中，每次取出 $M (M \leq N)$ 个不同的元素，不管顺序并成一组，叫做组合。其方法数记为 C_N^M ，

$$C_N^M = \frac{N!}{M!(N-M)!} \quad (1.4)$$

定义 2: 在组合中允许元素重复出现, 这种组合称为可重复组合. 从 N 个元素中每次取出 M (M 可大于 N) 个元素的可重复组合的方法数记为 F_N^M ,

$$F_N^M = \frac{(M+N-1)!}{M!(N-1)!}. \quad (1.5)$$

c) 常用的分堆方法及公式

M 个全同的小球放在 N 个编号的盒子里. 每个盒子中的小球数不大于 1, $M \leq N$. 其方法数为 C_N^M .

M 个不同的小球放在 N 个编号的盒子里, 每个盒子中的小球数无限制, 其方法数为 U_N^M .

M 个全同的小球放在 N 个编号的盒子里, 每个盒子中的小球数无限制, 其方法数为 F_N^M .

把 N 个不同的小球分成 p 堆, 使第一堆有 m_1 个, 第二堆有 m_2 个, \dots , 第 p 堆有 m_p 个, 且有 $m_1 + m_2 + \dots + m_p = N$, 这样分堆的方法数记为 $V(m_1, m_2, \dots, m_p)$,

$$V(m_1, m_2, \dots, m_p) = \frac{N!}{m_1! m_2! \dots m_p!}. \quad (1.6)$$

把 N 个不同的小球分成许多堆, 使每堆有一个小球者共有 m_1 堆, 每堆有两个小球者共有 m_2 堆, \dots , 每堆有 k 个小球者共有 m_k 堆, \dots , 且有 $\sum k m_k = N$, 这样分堆的方法数为

$$N! / \prod_k m_k! (k!)^{m_k}. \quad (1.7)$$

2. 斯特令公式

$$N! = \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N e^{\frac{1}{12N}}, \quad 0 < \theta < 1. \quad (1.8)$$

一般用它的近似式

$$\ln N! \approx N \ln N - N. \quad (1.9)$$

当 N 很大时有

$$\frac{d}{dN} \ln N! \approx \ln N. \quad (1.10)$$

3. 一些定积分公式

$$\int_0^{\infty} e^{-bu^2} du = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{b}}, \quad (1.11a)$$

$$\int_0^{\infty} u^2 e^{-bu^2} du = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{b^3}}, \quad (1.11b)$$

$$\int_0^{\infty} u^4 e^{-bu^2} du = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{b^5}}, \quad (1.11c)$$

.....

$$\int_0^{\infty} u^{2k} e^{-bu^2} du = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^{k+1}} \sqrt{\frac{\pi}{b^{2k+1}}}. \quad (1.11d)$$

$$\int_0^{\infty} u e^{-bu^2} du = \frac{1}{2} \frac{1}{b}, \quad (1.12a)$$

$$\int_0^{\infty} u^3 e^{-bu^2} du = \frac{1}{2} \frac{1}{b^2}, \quad (1.12b)$$

$$\int_0^{\infty} u^5 e^{-bu^2} du = \frac{1}{2} \frac{2!}{b^3}, \quad (1.12c)$$

.....

$$\int_0^{\infty} u^{2k+1} e^{-bu^2} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{k!}{b^{k+1}}. \quad (1.12d)$$

4. Γ 函数和 B 函数

a) 定义

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad (1.13)$$

$$B(p, q) \equiv \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad (1.14)$$

式中, z, p, q 为复变数.

b) 性质

$$\Gamma(1) = 1, \quad (1.15a)$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad (1.15b)$$

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \text{ 为正整数}, \quad (1.15c)$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad (1.15d)$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)\pi/\sin \pi z. \quad (1.15e)$$

$$\beta(p, q) = \beta(q, p), \quad (1.16a)$$

$$\beta(p, q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q). \quad (1.16b)$$

5. 误差函数

$$\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy. \quad (1.17)$$

【例 1.1】 证明式(1.6)。

【解】 这类问题一般可直接用排列组合理论来解答，有些情况下也可用数学归纳法来解答。

解法 1 我们把这 N 个小球排列成序，令最前面的 m_1 个小球作为第一堆，接下来的 m_2 个小球作为第二堆，…，最后 m_p 个小球作为第 p 堆。 N 个不同小球的排列数有 $N!$ 种。但各堆内的小球互相交换并不产生新的分法。所以，总的方法数为

$$N! / m_1! m_2! \cdots m_p!.$$

解法 2 对 p 实行数学归纳法。 $p=1$ 时该式成立。

设

$$V(m_1, \dots, m_{p-1}) = \frac{(m_1 + \dots + m_{p-1})!}{m_1! \cdots m_{p-1}!}$$

成立。由于第 p 堆的 m_p 个小球可以 N 个小球中任意选出，故

$$\begin{aligned} V(m_1, \dots, m_{p-1}, m_p) &= C_N^{m_p} V(m_1, \dots, m_{p-1}) \\ &= N! / m_1! m_2! \cdots m_p!. \end{aligned}$$

【例 1.2】 证明

$$\sum_{s=0}^k C_{n_1}^s C_{n_2}^{k-s} = C_{n_1+n_2}^k,$$

式中 k, n_1, n_2 为正整数。

【解】 我们注意到高阶导数的莱布尼兹公式及牛顿二项式定

理中含有组合数, 尝试用这些公式来解。

解法 1 考虑和式

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^k C_{n_1}^s C_{n_2}^{k-s} x^{n_1+n_2-k} &= \sum_{s=0}^k \frac{1}{s!(k-s)!} \cdot \frac{d^s x^{n_1}}{dx^s} \cdot \frac{d^{k-s} x^{n_2}}{dx^{k-s}} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{s=0}^k C_k^s \frac{d^s x^{n_1}}{dx^s} \cdot \frac{d^{k-s} x^{n_2}}{dx^{k-s}} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^{n_1} x^{n_2}) \\ &= \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} x^{n_1+n_2} = C_{n_1+n_2}^k x^{n_1+n_2-k}. \end{aligned}$$

所以有
$$\sum_{s=0}^k C_{n_1}^s C_{n_2}^{k-s} = C_{n_1+n_2}^k.$$

解法 2 由二项式定理,

$$(1+x)^{n_1+n_2} = \sum_{k=0}^{n_1+n_2} C_{n_1+n_2}^k x^k, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (1+x)^{n_1} (1+x)^{n_2} &= \left(\sum_{s=0}^{n_1} C_{n_1}^s x^s \right) \left(\sum_{i=0}^{n_2} C_{n_2}^i x^i \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n_1+n_2} x^k \sum_{s=0}^k C_{n_1}^s C_{n_2}^{k-s}. \end{aligned} \quad (2)$$

比较式(1)及式(2), 故得证。

【例 1.3】 斯特令公式有如下四种常用形式:

a) $N! \approx N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N},$

b) $N! \approx N^N e^{-N},$

c) $\ln N! \approx N \ln N - N + \frac{1}{2} \ln(2\pi N),$

d) $\ln N! \approx N \ln N - N.$

问上列各式各自要求多大的 N 时, 其相对误差小于 1%。

【解】 用具体数字验算尝试求解。

当 $N_1=9$ 时, $9! = 362880$, $9^9 e^{-9} (2\pi \times 9)^{1/2} = 359537$, 第一个表达式的相对误差为 0.92%。

第二个表达式的相对误差根本不可能小于 1%。

第三个表达式, 当 $N=4$ 时, $\ln 4! = 3.1780538$,

$$4 \ln 4 - 4 + \frac{1}{2} \ln(8\pi) = 3.1572627,$$

相对误差为 0.65%。

第四个表达式, 当 $N = 90$ 时,

$$\ln 90! = 318.15262, \quad 90 \ln 90 - 90 = 314.98287$$

相对误差为 0.996%。

本题指出了斯特令近似公式的应用范围及误差, 使用各近似公式时应考虑此点。

【例 1.4】 证明(1.11a)到(1.12d)各式。

【解】 观察各式发现有如下规律:

$$f(n+2) = -\frac{\partial}{\partial b} f(n), \quad f(n) = \int_0^{\infty} u^n e^{-bu} du, \quad (1)$$

故只需要证明(1.11a)及(1.12a)两式。

令 $t = \sqrt{b}u$, 则

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{b}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt,$$

$$[f(0)]^2 = \frac{1}{b} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt \int_0^{\infty} e^{-u^2} du.$$

令 $t = \alpha \cos \beta$, $u = \alpha \sin \beta$, 则有

$$[f(0)]^2 = \frac{1}{b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\beta \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{\pi}{4b},$$

$$f(0) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{b}}. \quad (2)$$

$$f(1) = \int_0^{\infty} u e^{-bu} du = \frac{1}{2} \frac{1}{b}. \quad (3)$$

【例 1.5】 证明

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\pm x_0}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \pm \left[\frac{x_0}{\sqrt{\pi}} e^{-x_0^2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}(x_0) \right].$$

【解】 这类问题常用分部积分法来证明。

原式左边等于

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\pm x_0}^{\infty} x^2 \left(-\frac{1}{2x} \right) de^{-x^2} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\pm x_0}^{\infty} x de^{-x^2} \\
 & = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[-xe^{-x^2} \Big|_{\pm x_0}^{\infty} + \int_{\pm x_0}^{\infty} e^{-x^2} dx \right] \\
 & = \pm \frac{x_0}{\sqrt{\pi}} e^{-x_0^2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pm x_0} e^{-x^2} dx + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \\
 & = \frac{1}{2} \pm \left[\frac{x_0}{\sqrt{\pi}} e^{-x_0^2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}(x_0) \right].
 \end{aligned}$$

习 题

1.1 一批产品共有 n 个, 其中 k 个是废品. 任选 m 个产品(其中有 l 个废品), 共有几种选择方式?

1.2 求 C_n^r 为最大值时的 r 值.

1.3 N 个不同的物体排在 N 个位置上, 物体可重复取, 证明方法数为 N^N .

1.4 用 0, 1, 2, 3, 4 五个数字, 可以组成多少个不同的五位数.

1.5 N 个不同的小球放在 C 个编号的盒子里, 每个盒中的小球数不大于 1 ($N \leq C$), 求其方法数.

1.6 证明式(1.5)

1.7 证明式(1.7).

1.8 用组合理论证明牛顿二项式定理.

1.9 试求 $\sum_{M=0}^N \frac{N!}{(N-M)!M!}$ 及 $\sum_{M=0}^N \frac{(-1)^M N!}{(N-M)!M!}$.

1.10 证明: $\sum_r C_N^{2r} = \sum_r C_N^{2r+1} = 2^{n-1}$, $n > 0$, $r \geq 0$.

1.11 试求 $\sum_{M=0}^N \frac{(-1)^M N!}{(N-M)!M!} (A+BM)^k$, $k < N$.

1.12 证明: $\sum_{k=0}^N (C_N^k)^2 = C_{2N}^N$ 及 $\sum_{k=0}^N (-1)^k C_k^r C_N^k = 0$.

1.13 证明: $\sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k-1}}{k+1} C_N^k = \frac{N}{N+1}$ 及 $\sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k-1}}{k} C_N^k = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}$.

1.14 证明: $C_N^M = C_N^{M-1} + C_N^M$, $F_N^M = F_N^{M-1} + F_N^M$.

及 $P_N^M = MP_{N-1}^{M-1} + P_N^M$.

1.15 证明: $\sum_{M=0}^{N_1} \frac{(M+N)!}{M!N!} = \frac{(M_1+N+1)!}{M_1!(N+1)!}$.

1.16 证明: $C_N^M \leq \frac{N^M}{M^M(N-M)^{N-M}}$, $0 < M < N$.

1.17 当 $N=5$ 及 $N=10$ 时, 分别求出用式 (1.9) 计算 $\ln N!$ 时所产生的百分误差.

1.18 用 Γ 函数推证斯特令近似公式:

$$N! \approx \sqrt{2\pi N} (N/e)^N.$$

1.19 利用上题结果计算 $10!$, 并与精确值比较.

1.20 证明: $\frac{\pi}{2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \left[\frac{(2N)!!}{(2N-1)!!} \right]^2$.

*1.21 证明式 (1.8).

1.22 计算 $5!$, 并验证

$$\sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N e^{\frac{1}{12N+0.5}} < N! < \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N e^{\frac{1}{12N}}$$

*1.23 推导斯特令公式

$$N! \approx N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N} \left[1 + \frac{1}{12N} + \frac{1}{288N^2} + \dots \right].$$

1.24 证明式 (1.15a) 及 (1.15b), 并利用 Γ 函数的性质求解例 1.4.

1.25 证明式 (1.15e).

1.26 证明式 (1.16b).

1.27 试证明: 当 $a \ll 1$ 时,

$$\sum_{n=1}^p e^{-an} = \int_0^p e^{-an} dn.$$

*1.28 试比较

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)e^{-l(l+1)\sigma} \text{ 与 } \int_0^{\infty} (2x+1)e^{-x(x+1)\sigma} dx.$$

求出积分, 并证明两者之差小于 $\sigma^{-1/2}$.

1.29 证明:

$$a) \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\pm 0}^{\infty} e^{-x^2} dx = 1 \mp \operatorname{erf}(x_0),$$

$$b) \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\pm 0}^{\infty} x e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x_0^2},$$

$$c) \quad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\pm 0}^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx = \frac{x_0^2 + 1}{\sqrt{\pi}} e^{-x_0^2}.$$

1.30 证明:

$$\operatorname{erf}^{-1}(x_0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[x_0 - \frac{x_0^3}{1!3} + \frac{x_0^5}{2!5} - \dots \right].$$

1.31 证明:

$$\int_x^{\infty} x^{\frac{1}{2}} e^{-x} dx = x^{\frac{1}{2}} e^{-x} \left[1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^2} + \dots \right],$$

$$\int_x^{\infty} \frac{x^{s-1}}{(s-1)!} e^{-x} dx = e^{-x} \left[\frac{x^{s-1}}{(s-1)!} + \frac{x^{s-2}}{(s-2)!} + \dots + 1 \right].$$

§ 1.2 黎曼 ζ 函数 欧勒求和公式 玻色函数

1. ζ 函数及伯努利数

a) 当 $\operatorname{Re}(s) > 1$ 时, 可定义黎曼 ζ 函数

$$\zeta(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \quad (1.18)$$

当 $\operatorname{Re}(s) < 1$ 时需另外定义.

$\zeta(s)$ 的常见值如下:

$$\begin{aligned} \zeta(0) &= -0.5, & \zeta(1) &= \infty, \\ \zeta(0.5) &= -1.460, & \zeta(-0.5) &= -0.2079, \\ \zeta(1.5) &= 2.612, & \zeta(2) &= \pi^2/6, \\ \zeta(2.5) &= 1.341, & \zeta(3) &= 1.202, \\ \zeta(4) &= \pi^4/90, & \zeta(5) &= 1.037. \end{aligned}$$

另一常用公式是

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^s} = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s). \quad (1.19)$$

b) 伯努利数

$$B_m = \frac{(2m)!}{2^{2m-1} \pi^{2m}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}}, m \text{ 为正整数}, \quad (1.20)$$

$$B_1 = -\frac{1}{6}, B_2 = \frac{1}{30}, B_3 = \frac{1}{42}, B_4 = \frac{1}{30}.$$

2. 欧勒求和公式

a) 欧勒求和公式是

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n f(k) &= \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2} [f(0) + f(n)] \\ &+ \frac{B_1}{2!} [f'(n) - f'(0)] - \frac{B_2}{4!} [f''(n) - f''(0)] + \dots \\ &+ (-1)^n \frac{B_{n+1}}{(2m+2)!} \\ &\cdot [f^{(2m+1)}(n) - f^{(2m+1)}(0)] + \dots, \end{aligned} \quad (1.21)$$

式中 B_1, B_2, \dots 为伯努利数, $f', f'', f''', \dots, f^{(n)}, \dots$ 表示 $f(x)$ 的各阶导数.

b) 泊松求和公式

$$\sum_{s=1}^{\infty} f(s) + \frac{1}{2} f(0) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f(s) e^{2\pi i s r} ds, \quad (1.22a)$$

也可写为

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} f(s) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(r), \quad (1.22b)$$

式中 $\mathcal{F}(r)$ 为 $f(s)$ 的傅里叶变换象函数.

3. 玻色函数

a) 定义

$$G_s(\alpha) \equiv \sum_{l=1}^{\infty} l^{-s} e^{-l\alpha}. \quad (1.23)$$

b) 性质

$$\frac{\partial^n G_s(\alpha)}{\partial \alpha^n} = (-1)^n G_{s-n}(\alpha), \quad (1.24a)$$

$$G_s(0) = \zeta(s). \quad (1.24b)$$

【例 1.6】 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

【解】 傅里叶级数中的系数常含 n 的负幂次, 所以可用傅里叶展开法.

令 $f(x) = x^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$. 将 $f(x)$ 展开为傅里叶级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = (-1)^n \frac{4}{n^2}.$$

所以有

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \cos nx. \quad (1)$$

式(1)中含 $x=0$ 及 $x=\pi$, 得证.

【例 1.7】 证明欧勒求和公式(1.21).

【解】 设 $f(x)$ 当 $x \geq 0$ 时有定义, 且有连续的导数. 设 n 和 k 为非负整数, $k < n$, 则可写

$$f(n) - f(k) = \int_k^n f'(x) dx.$$

对 k 从 0 到 n 相加, 得

$$(n+1)f(n) - \sum_{k=0}^n f(k) = \sum_{k=0}^n \int_k^n f'(x) dx. \quad (1)$$

上式右边可展开而写为

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \int_k^n f'(x) dx &= \int_0^n f'(x) dx + \int_1^n f'(x) dx + \cdots \\ &+ \int_{n-1}^n f'(x) dx + \int_n^n f'(x) dx. \end{aligned} \quad (2)$$

上式中最后一项显然等于零. 若 m 为小于 n 的非负整数, 则上式中在区间 $(m, m+1)$ 上的积分出现 $(m+1)$ 次, 例如当 $m=1$ 时在区