高等数学

白富多　王维生　张少太　主编

哈尔滨工业大学出版社

高　等　数　学

Gaoden Sunxue

主编　白富多　王维生　张少太

哈尔滨工业大学出版社

高等数学

主编 白富多 王维生 张少太

*

哈尔滨工业大学出版社出版

新华书店首都发行所发行

东北农业大学印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/16 印张 20 插页 字数 460 千字

1995 年 6 月第 1 版 1995 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 7-5603-1090-7/O·74 定价:18 元

前　言

我国高等专科教育事业发展迅速，而在其教材编写方面显得很不适应，处于刚刚起步阶段，相当缺乏，即使有一些，也往往是本科教材的“压缩本”；《高等数学》作为基础课，其内容、体系还存在陈旧问题。针对这一现实，作者参考1994年的《关于工科数学系列课程教学改革的建议》，对作者的试用教材进行了较大的修改。既注意了大专生与本科生的区别，又加强了应用环节的综合训练，使之适用于各类工科大专生的需要，当然也可作为夜大、函授、电大的教学用书。

在编写中，作者力图使本书结构严谨、叙述简明，以便于自学。同时，每小节都配有数量足够、难度较为适宜的习题，供读者选做。考虑到读者和专业的不同需要，对某些章节加了“*”号，讲授时可适当选择。本教材所需学时为120±20。

本书由白富多、王维生、张少太主编，参加编写工作的还有张宗达、白红、焦光虹、李冬松、蒋卫华等老师，富景隆、杨克劭两位教授对本书的编写给予了热情的指导，并认真审阅了全书。在此，谨向这两位教授和曾对本书提供许多宝贵修改意见的哈尔滨工业大学高等数学教研室的老师们致以深深的谢意！

虽然本书融入了作者多年大专教学的经验，几经修改，但疏漏之处在所难免，恳请指正！

作者

1995年3月

目　　录

第一章　函数及其图形

函数是高等数学研究的对象，本章在初等数学的基础上对函数的概念以及函数的性质作进一步的讨论，以便于今后的学习。

1.1　常量与变量

在观察自然现象或技术过程时，常常会遇到各种不同的量，其中有的量在过程中不起变化，也就是保持一定的数值，这种量叫做常量；还有些量在过程中是变化着的，也就是可以取不同的数值，这种量叫做变量。

例如，把一个密闭容器内的气体加热时，气体的体积和气体的分子个数保持一定，它们是常量。而气体的温度和压力则是变量，它们取得越来越大的数值。

常量和变量并不是绝对的，情况变了，变量可能转化为常量，常量也可能转化为变量，并且有的时候，变化微不足道并不影响结论时，也可以把变量当作常量来处理。例如，就小范围地区来说，重力加速度可以看作常量，但就广大地区来说，重力加速度则是变量。

通常用字母 a、b、c 等表示常量，用字母 x、y、t 等表示变量。

任何一个变量，总是有一定的变化范围。例如，某地区某天的最高温度是 24℃，最低温度是 10℃，那么，这一天的气温 T 的变化范围就是 10～24℃。

如果变量的变化是连续的，常用区间来表示变量的变化范围。下面引进各种区间的记号和名称。

设 a 和 b 是两个实数，且 $a<b$，凡满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一切实数 x 的全体叫做闭区间，用记号 $[a,b]$ 表示。

凡满足不等式　$a<x<b$ 的一切实数 x 的全体叫做开区间，用记号 (a,b) 表示。

凡满足不等式　$a\leqslant x<b$ 或 $a<x\leqslant b$ 的一切实数 x 的全体叫做半开、半闭区间，分别用记号 $[a,b)$ 或 $(a,b]$ 表示。

以上区间均称为有限区间。在数轴上，这些区间都可以用一有限线段来表示，$b-a$ 称为区间的长度。a 和 b 分别称为区间的左端点和右端点。

除此之外，还有无限区间。

满足不等式 $a\leqslant x$ 的一切实数 x 的全体用记号 $[a,+\infty)$ 表示，有时也写作 $a\leqslant x<+\infty$。

满足不等式 $a<x$ 的一切实数 x 的全体用记号 $(a,+\infty)$ 表示，有时也写作 $a<x<+\infty$。

满足不等式 $x<b$ 或 $x\leqslant b$ 的一切实数 x 的全体分别用记号 $(-\infty,b)$ 或 $(-\infty,b]$ 表示。

全体实数用记号 $(-\infty,+\infty)$ 表示，有时也写作 $-\infty<x<+\infty$。“$-\infty$”与“$+\infty$”，分别读作负无穷大与正无穷大，它们不是数，仅是一个记号。

特别地，在数轴上以 x_0 为中心，长度为 $2\delta(\delta>0)$ 的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$，称为点 x_0 的 δ 邻域。

1.2 函数的概念

在同一个自然现象或技术过程中，往往同时有几个变量在变化着。这几个变量并不是孤立的在变，而是相互联系并遵循着一定的变化规律在变。我们先从两个变量之间依赖关系的具体例子谈起。

例 1 在一个边长为 48 厘米的正方形铁皮的四角上，各截去一个边长为 x 的小正方形后(如图 1-1)，做一个无盖的盒子，试求这盒子的容积 V 和小正方形边长 x 之间的关系。

解 由题意知这个盒子的底是一个正方形，其边长为 $48-2x$，盒子的高为 x，于是可得盒子的容积：

$$V=x(48-2x)^2$$

在这个例子中，变量 V 与变量 x 之间的关系，通过一个数学式子来表示，当变量 x 在区间 $(0,24)$ 中任意取定某一数值时，按上式就可以确定盒子容积 V 的相应数值。

例 2 已知一个单三角脉冲电压，其波形如图 1-2 所示。这里 u 和 t 分别表示电压和时间，它们都是变量，图 1-2 表示了变量 u 和 t 之间的关系。当时间 t 在 $[0,\tau]$ 上任意取定

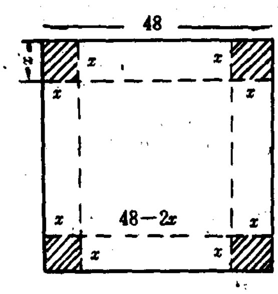

图 1-1

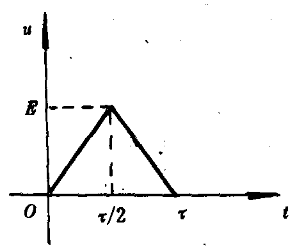

图 1-2

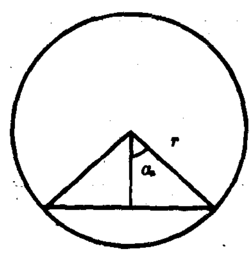

图 1-3

某一数值时，由图 1-2 就可以确定脉冲电压 u 的相应数值。

例 3 设有半径为 r 的圆，考虑内接于该圆的正 n 边形的周长 s_n。

由图 1-3 容易看出，$s_n=2nr\sin\alpha_n$，其中 $\alpha_n=\pi/n$。所以内接正 n 边形的周长 s_n 与边数 n 之间的相互关系由公式

$$s_n=2nr\sin\frac{\pi}{n}$$

给定。当边数 n 在 3、4、5…等自然数中任意取定一个数值时，由上式就可以确定周长 s_n 的相应数值。

从上述几个例子可以看出，虽然它们反映的客观事物和实际意义各不相同，但它们却有共同的本质，就是都反映了两个变量之间的相依关系，这种相依关系给出了一种对应法则。根据这一法则，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有确定的值与之对应。两个变量的这种对应关系就是函数概念的实质。

定义 设x和y是两个变量，如果当变量x在某一范围内，任意取定一值时，变量y依据一定规律或法则，总有唯一确定的值与之对应，则变量y叫做变量x的函数。记作$y=f(x)$。

其中变量x叫做自变量，变量y叫做因变量；自变量的取值范围叫做函数的定义域，因变量的取值范围叫做函数的值域。

在上面的例子中，x、t、n均为自变量；V、u、s_n均为因变量。

如果自变量取某一数值x_0时，函数有确定的值与之对应，则就称函数在x_0处有定义，因此函数的定义域也就是使函数有定义的实数的全体。

关于函数的定义，再作如下说明：

1.2.1 关于函数记号

函数记号$f(x)$并不是"f"乘"x"，"f"表示变量y对于变量x的那个确定的依赖关系。例如：

$$y=f(x)=x^2-7$$

这里"f"表示"自变量x的平方减7"这一具体的依赖关系。今后用符号$f(x_0)$或$y|_{x=x_0}$表示函数$y=f(x)$在自变量取$x=x_0$时的数值。例如，对于函数

$$y=f(x)=x^2-7\text{，有：}$$

$$y|_{x=1}=1^2-7=-6$$

$$y|_{x=a+1}=f(a+1)=(a+1)^2-7=a^2+2a-6$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=\left(\frac{1}{a}\right)^2-7=\frac{1}{a^2}-7$$

在同一问题中，如果要同时讨论几个不同的函数，为了避免混淆起见，要用不同的函数记号表示。例如同时讨论函数

$$y=x^2-7,\ y=\sin x$$

时就分别记作

$$f(x)=x^2-7,\ \varphi(x)=\sin x$$

"f"与"φ"表示不同的对应关系，前者表示"自变量x的平方减7"这样的对应关系，后者则表示"对自变量x取正弦"这样的对应关系。

1.2.2 关于函数定义域

由于只有当自变量在定义域内取值时，才有确定的因变量的值。即定义域是函数关系存在的前提，因此在研究函数时，必须首先弄清它的定义域。确定定义域要注意两点：①若函数关系由数学式子给出，由于现在我们只限定在实数范围内考虑问题，故只要注意到"零不能做除数、负数不能开平方、负数和零不能取对数"几条原则。如果算式中含有若干项，则函数的定义域应是各项中自变量允许取值的公共部分。②在求函数定义域时，如果该函数具有实际意义，则除了要考虑计算上的要求外，还必须考虑到问题的实际意义。例如，例1中的函数$V=x(48-2x)^2$，它的定义域应为区间$(0,24)$；如果抛开它的实际意义，则在$(-\infty,+\infty)$上任取一个x值均有相应的V值与之对应，故其定义域应为$(-\infty,$

$+\infty$)。

例 4 求函数 $y=\frac{3x}{4x-1}$的定义域。

解 因为分母不能为零，所以 $x\neq\frac{1}{4}$，故所求定义域为$(-\infty,\frac{1}{4})$与$(\frac{1}{4},+\infty)$。

例 5 求函数 $y=\sqrt{x+1}+\frac{1}{\lg(3x-2)}$的定义域。

解 解不等式组 $\begin{cases}x+1\geqslant 0\\ 3x-2>0\\ 3x-2\neq 1\end{cases}$ 即$\begin{cases}x\geqslant -1\\ x>\frac{2}{3}\\ x\neq 1\end{cases}$

故所求定义域为$(\frac{2}{3},1)$与$(1,+\infty)$。

1.2.3 单值函数与多值函数

现在讲的都是当自变量在定义域中任取一值时，因变量只有一个确定的值与之对应，这种函数称为单值函数。如果对一个自变量的值有多个因变量的值与之对应，则称这种函数为多值函数。例如，$y=x^2$ 是单值函数，$y^2=x$是多值函数。今后若无特殊声明，所研究的函数均为单值函数。

1.3 函数的表示法

1.3.1 公式法

用公式表示 y和 x之间函数关系的方法叫做公式法或解析法。例如，$y=3x^2$，$y=1/1+x^2$等。这种方法便于进行理论研究，但直观性不好，并且在有些实际问题中遇到的函数关系，很难甚至不能用公式法表示。

值得注意的是，有些问题中涉及的两个变量的对应规律不能用同一个表达式给出，而是在不同的范围内用不同的式子给出，例如

$$y=\begin{cases}\frac{2E}{\tau}t,0\leqslant t\leqslant\frac{\tau}{2}\\ -\frac{2E}{\tau}t+2E,\frac{\tau}{2}<t\leqslant\tau\end{cases}$$

其图形如图 1-2 所示。像这样的函数称为分段函数。分段函数就是用几个式子合起来表示的函数，而不是表示几个函数。

1.3.2 表格法

在实际问题中，常将一系列的自变量值与对应的函数值列成表，如平方表、对数表、三角函数表等等。这种表示函数的方法叫表格法。表格法的优点是可以直接从自变量的值查到对应的函数值。但表中所列数值不完全，同时用表格法表示的函数不便于进行理论分析。

1.3.3 图示法

对于 $y=f(x)$，在其定义域内取一个 x 值时，对应地就有一个 y 值。在平面直角坐标系 xOy 中，以这一对 x,y 值为坐标定出一个点 $M(x,y)$，一般地，当 x 变化时，点 M 就在平面上运动并描出一条曲线，这条曲线叫做函数 $y=f(x)$ 的图形。反过来，如果坐标平面上的曲线与任何一条平行于 y 轴的直线至多只有一个交点，那么这条曲线表示一个单值函数，当自变量的值等于曲线上的点的横坐标时，对应的函数值即等于该点的纵坐标值。因此函数也可以由坐标平面上的曲线来表示。这种表示函数的方法叫做图示法。图示法优点是直观，但它不便于作理论分析。

习　　题 1-1

1. 计算下列各题：

(1)若 $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$，求 $f(2)$，$f(-2)$，$f(a+b)$，$(a+b\neq 1)$；

(2)若 $f(x)=\sin x$，求 $f(x+\Delta x)-f(x)$；

(3)若 $f(x)=2x-3$，求 $f(x^2)$，$(f(x))^2$；

(4)若 $f(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x<1\\ \dfrac{1}{2} & x=1\\ 1 & 1<x\leqslant 2\end{cases}$ 求 $f(0)$，$f(\dfrac{1}{2})$，$f(1)$，$f(\dfrac{5}{4})$，$f(2)$。

2. 求下列函数的定义域：

(1)$y=\dfrac{1}{|x|-x}$；　(2)$y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；

(3)$y=\sqrt{\sin x-1}$；　(4)$y=\arcsin\dfrac{x}{1+x^2}$

(5)$y=\arcsin(\lg\dfrac{x}{10})$；　(6)$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & x<0\\ x & 0<x<1\\ 2 & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$

3. 下列函数是否相等？为什么？

(1)$f(x)=\dfrac{x}{x}$，$g(x)=1$；

(2)$f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$；

(3)$f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(4)$f(x)=\sin(\arcsin x)$，$g(x)=\arcsin(\sin x)$；

(5)$f(x)=x$，$g(x)=\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}x)$。

4. 已知 $f(\dfrac{1}{x})=x^2+2x+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$。

5. 已知 $f(x+\dfrac{1}{x})=\dfrac{x^2}{1+x^4}$，求 $f(x)$。

1.4 函数的几种简单性质

本节介绍函数的几种特性。实际上，这里也给出了判断函数是否有这几种特性的方法。

1.4.1 函数的有界性

定义 设函数 $y=f(x)$ 在 X 上有定义(X 可以是函数 $f(x)$ 的整个定义域，也可以只是定义域的一部分)。若存在常数 $M>0$，使得对于任意的 $x\in X$ 恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上是有界的。或者说 $f(x)$ 是 X 上的有界函数。否则说 $f(x)$ 在 X 上是无界的。

例如 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 上是有界的，这是因为 $|\sin\frac{1}{x}|\leqslant 1$，$(x\neq 0)$；而函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是无界的，这是因为对任给的 $M>0$，在区间 $(0,+\infty)$ 上总能找到使 $|f(x)|=|\frac{1}{x}|>M$ 成立的 x(只要取 $0<x<\frac{1}{M}$)。

1.4.2 函数的单调性

定义 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上有定义，对于任意的 x_1、$x_2\in(a,b)$，若当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上是单调上升的；若当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上是单调下降的。

单调上升，单调下降的函数统称为单调函数。一般来说，一个函数不一定在整个定义域上是单调的，在定义域中函数是单调的区间称为这个函数的单调区间。

例如，$y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调函数，但它在 $(-\infty,0)$ 上是单调下降的；在 $(0,+\infty)$ 上是单调上升的。所以，区间 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 均为函数 $y=x^2$ 的单调区间。

从直观上看，单调上升函数的图形是从左至右上升的曲线；单调下降函数的图形是从左至右下降的曲线。

1.4.3 函数的奇偶性

定义 设函数 $y=f(x)$ 在 $(-l,l)$ 上有定义 $(l>0)$，如果对于任意的 $x\in(-l,l)$，恒有 $f(x)=f(-x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为 $(-l,l)$ 上的偶函数；如果对于任意 $x\in(-l,l)$ 恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为 $(-l,l)$ 上的奇函数。

例 1 判断 $y=\sin x+\cos x$ 的奇偶性。

解 因为 $f(-x)=\sin(-x)+\cos(-x)=-\sin x+\cos x$，可见 $f(-x)$ 既不等于 $f(x)$，也不等于 $-f(x)$。故 $y=\sin x+\cos x$ 既不是奇函数也不是偶函数。

例 2 判断 $f(x)=x^3$ 的奇偶性。

解 因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$，故 $f(x)=x^3$ 是奇函数。

显然奇函数的图形关于原点是对称的；偶函数的图形关于 y 轴是对称的。

1.4.4 函数的周期性

定义 对于函数 $f(x)$，如果存在一个不为零的数 T，使得关系式

$$f(x)=f(x+T)$$

对于定义域内任何 x 都成立，则 $f(x)$ 叫做周期函数，T 叫做 $f(x)$ 的周期。通常，我们说周期函数的周期是指最小正周期。

例如 $y=\sin x, y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；而 $y=\operatorname{tg}x$ 是以 π 为周期的周期函数。

显然，对于以 T 为周期的周期函数，只要作出它在一个周期内的图形，然后逐步以 T 为周期向左、右平移即可得到整个定义域上函数的图形。

习　　题 1-2

1. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=2^x-\dfrac{1}{2^x}$　　　(2) $y=(1-x)^{\frac{1}{2}}+(1+x)^{\frac{1}{2}}$

(3) $y=\log_a(x+\sqrt{1+x^2}$

(4) $y=\begin{cases}1 & x\text{为有理数}\\ -1 & x\text{为无理数}\end{cases}$

2. 设下面所考虑的函数都是定义在 $(-l,l)$ 内，证明：

(1)两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

(2)两个偶函数的积是偶函数，两个奇函数的积是偶函数；

(3)奇函数与偶函数的积是奇函数。

3. 证明定义在 $(-l,l)$ 内任意函数 $f(x)$，都可唯一表示成一个奇函数与一个偶函数之和。

4. 确定下列函数的周期：

(1) $y=\sin\pi x$　　　(2) $y=|\sin x|$

(3) $y=\sin^2 x$　　　(4) $y=\begin{cases}1 & x\text{为有理数}\\ 0 & x\text{为无理数}\end{cases}$

5. 指出下列函数的增减区间：

(1) $y=|x|-x$　　　(2) $y=x^2-3x+2$

1.5 显函数、隐函数、反函数

1.5.1 显函数与隐函数

有时，变量 y 与变量 x 之间的函数关系不是由表达式

$$y=f(x) \tag{1}$$

给出，而是由方程

$$F(x,y)=0 \tag{2}$$

给出。这里 $F(x,y)$ 是表示含有 x、y 的一个数学表达式，这时称 y 是 x 的隐函数。而表成 $y=f(x)$ 形式的函数称为显函数。在显函数的表达式中 x 是自变量，y 是因变量，这是很明显的；而在隐函数的表达式中，x 与 y 处于同等地位，它可能确定 y 是 x 的函数，也可能确定 x 是 y 的函数。

例如，方程 $x^2+y^2-1=0$ 可以给出 y 是 x 的隐函数，且由方程可解得

$$y=\pm\sqrt{1-x^2}, \quad |x|\leqslant 1$$

相当于两个显函数。同样，方程 $x^2+y^2-1=0$ 也可以给定 x 是 y 的隐函数，即

$$x=\pm\sqrt{1-y^2}, \quad |y|\leqslant 1$$

注意，并非所有隐函数都可转化为显函数的形式，否则引入隐函数就毫无意义了，实际上大量的隐函数是不能转化为显函数的，例如

$$x+y+e^x-e^{2y}=0$$

就给出了一个隐函数，但无法将其中一个变量表成另一个变量的显函数。

1.5.2 反函数

上一段已指出，两个变量 x 与 y 之间的函数关系可能由方程

$$F(x,y)=0 \tag{2}$$

给出，这里由方程(2)可能确定 y 是 x 的函数 $y=f(x)$，也可能确定 x 是 y 的函数 $x=\varphi(y)$ 在研究两个变量 x 和 y 之间的函数关系(2)时，究竟将哪一个变量当作自变量，这要根据具体情况而定。例如

$$s=\frac{1}{2}gt^2 \tag{3}$$

表示自由落体运动的位移 s 与时间 t 的函数关系，其中 g 是重力加速度，它是一个常数。若已知下落的时间为 t，求位移 s，则在(3)中可视 s 为 t 的函数 $s=f(x)$。反之，若已知位移 s，求下落的时间 t，则在(3)中可视 t 是 s 的函数 $t=\varphi(s)$。函数 $s=f(t)=\frac{1}{2}gt^2$，

$$t=\varphi(s)=\sqrt{\frac{2s}{g}}$$

是变量 s 和 t 之间的相互依赖关系的不同表达形式。现在我们分析这两种依赖关系，即“f”和“φ”之间的关系。在这里

“f”表示自变量先平方后乘 $\frac{1}{2}g$

“φ”表示自变量先除 $\frac{1}{2}g$ 后开方

由此可见，“f”和“φ”是运算法则和运算次序相反的两种函数关系。因此，我们称其中的一个函数为另一个函数的反函数。一般地，有：

定义 设已给 y 是 x 的函数 $y=f(x)$，则由 $y=f(x)$ 所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数，亦记为 $x=f^{-1}(y)$。

习惯上，采用字母 x 表示自变量，而用字母 y 表示函数。为了与习惯上的一致，将 $x=f^{-1}(y)$ 中的自变量 y 改成 x，因变量 x 改写成 y，这样函数 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$。

在同一坐标系中，$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 有相同的图形。$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 是 x 和 y 的

互换，所以它们的图形关于直线 $y=x$ 是对称的(图 1-4)。

1.6 初等函数

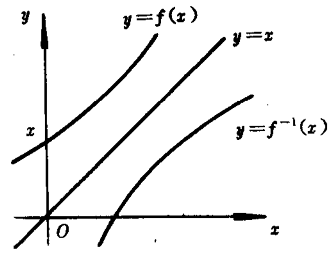

图 1-4

1.6.1 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数，这五类函数统称为基本初等函数。这些函数在初等数学中已经详细讨论过，这里简单复习一下。

1. 幂函数

形如 $y=x^\mu$(μ 是任意实数)的函数称为幂函数。

它的定义域、图形、性质随 μ 的不同而不同，但不论 μ 为何值，$y=x^\mu$ 在$(0,+\infty)$内总有定义，而且图形经过点$(1,1)$。

例如　$y=x^{1/2}$，定义域为$(0,+\infty)$。$y=x^{1/3}$，定义域为$(-\infty,+\infty)$。$y=x^2$，定义域为$(-\infty,+\infty)$。图 1-5 给出了 $\mu=\dfrac{1}{2}$，$\mu=1$，$\mu=-1$，$\mu=-2$ 的图形。

从图形上可以看出在$(0,+\infty)$上，当 $\mu>0$ 时函数是单调上升的；$\mu<0$ 时函数是单调

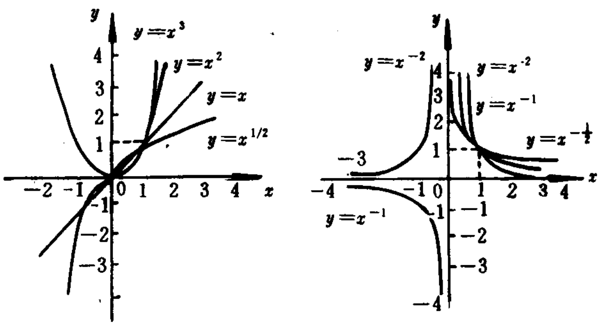

图 1-5

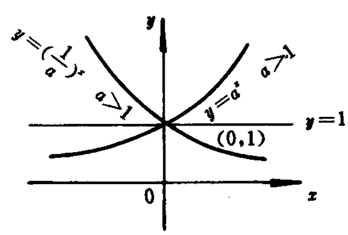

图 1-6

下降的。这些图形都是以后经常要用的，希望大家能熟悉它们。

2. 指数函数

形如 $y=a^x$($a>0$，$a\neq1$)的函数称为指数函数。

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,+\infty)$，都通过点$(0,1)$。当 $a>1$ 时，函数单调上升；当 $a<1$ 时，函数单调下降。如图 1-6 所示。

3. 对数函数

形如 $y=\log_a x$($a>0$，$a\neq1$)的函数称为对数函数。

定义域为$(0,+\infty)$它是指数函数 $y=a^x$ 的反函数。图形通过点$(1,0)$，$a>1$ 时函数单调上升；$a<1$ 时函数单调下降。在工程技术中还常用到以无理数 e 为底的对数($e=2.7182\cdots$)，称为自然对数，记为 $\ln x$，如图 1-7。

4. 三角函数