职工大学

高等数学复习指导

北京市成人教育学院 编

北京出版社

职工大学

高等数学复习指导

北京市成人教育学院 编

北京出版社

职 工 大 学

高等数学复习指导

北京市成人教育学院 编

*

北 京 出 版 社 出 版

（北京北三环中路6号）

新华书店北京发行所发行

房 山 区 印 刷 厂 印 刷

*

787×1092毫米 32开本 6.75印张 146,000字

1987年8月第1版 1987年8月第1次印刷

印数1—3,200

ISBN 7-200-00232-1/G·48

书号：7071·1155 定价：1.05元

前　言

本书是根据职工大学高等数学教学大纲和高等教育自学考试的要求，紧密结合教材，为提高学员的复习效果而编写的复习指导用书。可供职工大学师生和自学者在学习高等数学过程中，进行阶段复习和总复习时使用。

本书在编写中，针对成人学习高等数学的特点，力求做到精选复习内容和练习，抓住关键，突出重点，着重巩固基本知识，掌握基本技能，提高分析问题和解决问题的能力。

本书由北京市成人教育学院数学组主编，组织有实践教学经验的教师林士中、胡修伟、周国树、张连城、黄显炘、蔡舜琴等讨论编写，林士中统一整理，张世魁、赵学信、邱华吉、励金华、张学忠等审阅。

由于编写时间仓促，水平有限，有不妥之处，请读者指正。

一九八六年三月

目　录

第一部分　函数，极限与连续

一　函　　数

（一）内容提要

1. 函数的定义

设在某一过程中，有两个变量 x 与 y，x 的取值范围是 D，如果按照一定的规律，对于 x 在取值范围 D 内的每一个数值，都有唯一确定的 y 值与之对应，我们就称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$.

并且称 x 为自变量，y 为因变量或函数.

关于函数的概念要注意以下三点：

（1）自变量的取值范围 D，即函数的定义域；

（2）因变量 y 与自变量 x 之间的对应规律；

（3）因变量 y 的取值范围，即函数的值域.

其中(1)和(2)两点特别重要，称为函数的二要素.

2. 函数的性质

（1）函数的单调性：若函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内随 x 的增加而增加，即若 $x_1, x_2 \in (a,b)$，而且 $x_1 < x_2$，则必有 $f(x_1) < f(x_2)$，就说函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加；若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内随 x 的增加而减少，即若 $x_1, x_2 \in (a,b)$，而且 $x_1 < x_2$，则必有 $f(x_1) > f(x_2)$，就说函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调减少；

（2）函数的有界性：设 I 为某区间，若存在一正数 M，使得对一切 $x \in I$ 都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

就说函数 $f(x)$ 在区间 I 内有界;

(3) 函数的奇偶性:

若函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)=f(x)$,就说 $f(x)$ 是偶函数.

若函数 $f(x)$ 满足 $f(-x)=-f(x)$, 就说 $f(x)$ 是奇函数;

(4) 函数的周期性: 若存在正数 T, 使得 $f(x+T)=f(x)$,就说函数 $f(x)$ 是周期函数.

满足关系 $f(x+T)=f(x)$ 的最小正数 T, 称为周期函数 $f(x)$ 的周期.

3. 反函数的概念

设 y 是 x 的函数 $y=f(x)$,若将 y 作为自变量, x 当作因变量,所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数.

习惯上用 $y=\varphi(x)$ 表示函数 $y=f(x)$ 的反函数.

4. 复合函数的概念

设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$, 而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$, 则 $y=f[\varphi(x)]$ 是 x 的函数,称此函数为由 $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数,并称 u 为中间变量.

5. 初等函数由基本初等函数经有限次四则运算和复合运算而成的函数.

(二) 本章教学要求和重点

1. 深刻理解函数的概念以及复合函数, 初等函数的概念.

2. 熟练地掌握基本初等函数的定义和特性,牢固掌握初等函数由基本初等函数复合的过程.

3. 掌握函数的简单性质,会求直接函数的反函数.

重点是函数的概念和初等函数.

(三) 例题分析

1. 求函数的定义域和函数值

例1 设 $f_1(x)=\sqrt{(x+2)(x-1)}$;

$$f_2(x)=\sqrt{\frac{x+2}{x-1}};$$

$$f_3(x)=\ln(x+2)(x-1)(x-2).$$

分别求 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ 的定义域和函数值 $f_1(3)$, $f_2(3)$, $f_3(3)$.

解: $f_1(x)$的定义域为$(x+2)(x-1)\geqslant 0$,为解此不等式,可分三步进行

第一步:解方程$(x+2)(x-1)=0$,其根分别为-2, 1.

第二步:将根-2, 1顺序描在数轴上,如图1-1所示,根-2, 1将整个数轴分为三部分,即$(-\infty,-2)$, $(-2,1)$, $(1,+\infty)$.

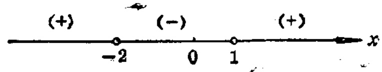

图 1-1

第三步,由于在该三区间内代数式$(x+2)(x-1)$是不变号的,而且任意两相邻区间上原代数式$(x+2)(x-1)$异号,因此,我们只要在某一区间上取一点求该代数式的值,根据该点代数值的正负性即可判定该代数式在各区间上取值的正负性.

例如: $0\in(-2,1)$, 将0代入$(x+2)(x-1)$式中,得$(0+2)(0-1)=-2<0$,所以代数式$(x+2)(x-1)$在$(-2,1)$内取负值,因而在相邻区间$(-\infty,-2)$, $(1,+\infty)$上取正值,如图1-1所示.

故$f_1(x)=\sqrt{(x+2)(x-1)}$的定义域为$(-\infty,-2]$, $[1,+\infty)$.

求$f_2(x)$的定义域的步骤和方法与$f_1(x)$基本相同,唯一

要注意的是分式的分母不能为 0，故 $x=1$ 是 $f_2(x)$ 的无意义点，所以函数 $f_2(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -2]$，$(1, +\infty)$。

$f_3(x)=\ln(x+2)(x-1)(x-2)$，根据对数函数的性质，定义域为 $(x+2)(x-1)(x-2)>0$，它与 $f_1(x)$ 的唯一区别是不带等号，其步骤也是：

第一步，求多项式 $(x+2)(x-1)(x-2)$ 的根，分别为 -2，1，2.

第二步，将这些根顺序描在数轴上，以它们为分界点，将整个数轴分为四个区间 $(-\infty,-2)$ $(-2,1)$ $(1,2)$ $(2,+\infty)$ 如图 1-2 所示.

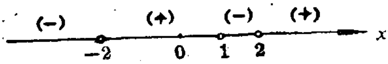

图 1-2

第三步，在某一区间例如 $(-2,1)$ 内任取一点 0，将其值代入代数式 $(x+2)(x-1)(x-2)$ 中得 $(0+2)(0-1)(0-2)=4>0$，故知代数式 $(x+2)(x-1)(x-2)$ 在 $(-2, 1)$ 内取正号，根据符号的交错性，可以判断该代数式在 $(-\infty,-2)$ $(1, 2)$ 内取负号，在 $(2,+\infty)$ 内取正号，如图 1-2 所示.

所以 $f_3(x)=(x+2)(x-1)(x-2)$ 的定义域为 $(-2, 1)$，$(2,+\infty)$.

$$f_1(3)=\sqrt{(3+2)+(3-1)}=\sqrt{10};$$

$$f_2(3)=\sqrt{\frac{3+2}{3-1}}=\sqrt{\frac{5}{2}};$$

$$f_3(3)=\ln(3+2)(3-1)(3-2)=\ln 10.$$

例 2 求 $f(x)=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$ 的定义域.

解： 因为正弦值在 -1 和 1 之间，所以有

$$-1\leqslant\frac{x-1}{2}\leqslant 1$$

得 $$-2\leqslant x-1\leqslant 2,$$
即 $$-1\leqslant x\leqslant 3.$$
故 $\arcsin\frac{x-1}{2}$ 的定义域为 $[-1,3]$.

例 3 若 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4}\right) \\ x+1, & \left[\frac{\pi}{4},\ 1\right] \\ \ln x, & (1,2)\end{cases}$

求 $f(x)$ 的定义域和 $f(0)$，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f(1)$.

解: 因为 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$, $\left[\frac{\pi}{4},1\right]$, $(1,2)$ 上均有定义，故 $f(x)$ 的定义域为 $\left[-\frac{\pi}{2},2\right)$, 所以有

$$f(0)=\sin 0=0,$$
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+1=\frac{\pi+4}{4},$$
$$f(1)=1+1=2.$$

例 4 $f(x)=x^2+2x+3$，求 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 和 $f[f(x)]$.

解: $$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2+2\left(\frac{1}{x}\right)+3=\frac{1+2x+3x^2}{x^2}$$
$$\begin{aligned}f[f(x)]&=(x^2+2x+3)^2+2(x^2+2x+3)+3\\&=x^4+4x^3+12x^2+16x+18.\end{aligned}$$

2. 求函数的复合过程

例 5 求下列函数的复合过程:

(1) $y=\ln\operatorname{arctg}(x^2+1)$;

(2) $y=e^{(\sin x)2}$.

解：(1) $y=\ln u, u=\operatorname{arctg} v, v=x^2+1$.

(2) $y=e^u$, $u=v^2, v=\sin x$.

(四) 复习练习题

1-1 求下列函数的定义域:

(1) $f(x)=\ln(x^2-4x-5)$;

(2) $f(x)=\arcsin\frac{x-2}{3}$;

(3) $f(x)=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+4}$.

1-2 若 $f(x)=x^2+4x+8$ 求 $f(x-2)$.

1-3 若 $f(x)=x^4\sin x, g(x)=x^2\cos x$，判别函数 $f(x)$，$g(x)$ 的奇偶性.

1-4 判别函数 $f(x)=\ln x(x+1)$ 和 $g(x)=\ln x+\ln(x+1)$ 是否为相同的函数.

1-5 写出下列函数的复合过程:

(1) $y=\operatorname{arctg} e^{\frac{1}{x}}$;　　(2) $y=\ln\sin 2x$.

二　极限与连续

(一) 内容提要

1. 函数极限的概念

(1) $x\to\infty$型

任给 $\varepsilon>0$,总存在正数 N，当 $|x|>N$ 时，不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立,就说在 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 以常数 A 为极限,记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$;

(2) $x\to a$ 型

任给 $\varepsilon>0$,总存在正数 δ,当 $|x-a|<\delta$ 时，不等式 $|f(x)

$-A|<\varepsilon$ 恒成立，就说在 $x\to a$ 时函数 $f(x)$ 以常数 A 为极限，记作 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$.

2. 函数连续性的概念

若函数满足 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，就说 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

若函数 $f(x)$ 在某区间上处处连续，就说函数 $f(x)$ 在该区间上连续.

3. 无穷小、无穷大的定义及其关系

(1) 无穷小：若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$），则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ ($x\to\infty$) 时是无穷小；

(2) 无穷大：对于给定任意大的正数 M，总存在正数 δ，使得只要 $0<|x-x_0|<\delta$，都有 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时是无穷大，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，相似地，可以定义 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 是无穷大的 M-N 语言；

(3) 无穷小、无穷大的关系

无穷小的倒数是无穷大；无穷大的倒数是无穷小.

4. 极限的运算法则

(1) 无穷小乘有界变量仍为无穷小；

(2) 极限的四则运算：若 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 分别存在，则：

① $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$.

② $\lim f(x)g(x)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$.

③ $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$　　（当 $\lim g(x)\neq 0$ 时）.

(3) 罗必达法则：若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足：

① $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$　（或 ∞），

② 在$(x_0-\delta, x_0+\delta)$内(除 x_0 外)可导，而且 $g'(x)\neq 0$,

③ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (或∞).

则有:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

相应地，当 $x\to\infty$ 时也有相应的罗必达法则

① $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$(或$\infty$),

② 在$|x|>N$ 时 $f(x)$, $g(x)$可导，且 $g'(x)\neq 0$,

③ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (或∞).

则 $$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

5. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ 或 $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$.

6. 函数的间断点，即函数的不连续点

(1) 若 $f(x)$ 在 x_0处有极限但不等于 $f(x_0)$，则称 x_0 为 $f(x)$的可去间断点;

(2) 若 $f(x)$在 x_0处有左极限，右极限，但左右极限不相等，则称 x_0为 $f(x)$的第一类间断点；否则称为第二类间断点，即左右极限不全存在时的间断点称为第二类间断点.

(二) 教学要求和重点

1. 深刻理解极限、无穷小和无穷大以及函数连续的概念.

2. 掌握极限的四则运算，会用两个重要极限，熟练运用

罗必达法则.

3. 会求函数的间断点,对于可去间断点会补充或修改定义使之连续.

4. 了解无穷小的阶,等价无穷小.

5. 了解初等函数的连续性.

重点是极限概念和极限计算方法. 主要是极限四则运算和罗必达法则以及连续函数的概念.

说明:

(1) 要求会用“$\varepsilon-N$”、“$\varepsilon-\delta$”语言叙述极限定义,但不要求寻求N或δ;

(2) 会求函数(包括分段函数)的左右极限,会判断分段函数在分段点处的连续性. 会利用函数的连续性求极限.

(三) 例题分析

1. 利用极限的四则运算求极限

例1 计算$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

解: 当 $x\to 1$ 时,分子分母的极限都是 0,不能直接用极限的四则运算,可先进行代数化简,一般方法是消去公因式. 若自变量的变化过程为 $x\to a$,则必有公因式$(x-a)$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{x(x+1)}=0.$$

例2 计算 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$.

解: 当 $x\to 2$ 时,分母的极限为 0,不能直接用极限的四则运算.

因为$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x+1}=0$，根据无穷小的倒数是无穷大的结论．有

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x^2-5x+6}=\infty.$$

一般地，若分母的极限为0，而分子的极限不为零时，则可直接判断该分式为无穷大.

注意：下列几种写法都是错误的，应当注意避免.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x^2-5x+6}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-5x+6)}=\frac{3}{0}=\infty.$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x^2-5x+6}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-5x+6)}=\infty.$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x^2-5x+6}=\frac{3}{0}=\infty.$$

错误的原因是违反了分母极限为零时不能用极限的除法运算．因此，上述三式第一步就错了.

例3　计算：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2+2x+2}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x^2+2x+2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x+1}$.

解：当$x\to\infty$时，上述分式分子分母的极限都不存在，不能直接运用极限的四则运算法则，需先进行代数变形，变形的方法是用分式的最高幂遍除各项，然后取极限.

(1) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2+2x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{0}{1}=0;$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^2+2x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=\dfrac{2}{1}=2;$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\infty.$

一般地，当 $x\to\infty$ 时，有理分式的极限有下列普遍结果，可以作为重要结论加以应用.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}0 & (m>n),\\ a_0/b_0 & (m=n),\\ \infty & (m<n).\end{cases}$$

根据上述结论，可直接写出下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}=0 \qquad (m>n)$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^2+2x+2}=2 \qquad (m=n)$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{x+1}=\infty \qquad (m<n).$

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+ax}-x) \quad (a\neq 0).$

解：当 $x\to+\infty$ 时，$\sqrt{x^2+ax}$ 和 x 都是无穷大量，不能直接用极限的四则运算，而必须先用有理化方法将函数代数化简后再求极限.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+ax}-x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+ax}-x)(\sqrt{x^2+a}+x)}{\sqrt{x^2+a}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{\sqrt{x^2+ax}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1}=\frac{a}{2}.$$

注意： 本题不能写作

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+ax}-x=\infty-\infty=0.$$

其错误在于$\infty-\infty$属于未定型，不能用极限的四则运算。

2. 利用两个重要极限求其它函数的极限.

例5 计算：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin mx}{x}$; (2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin mx}{\sin nx}$; (3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin mx}{\operatorname{tg} nx}$.

解：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin mx}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin mx}{mx}\cdot m=m$;

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\lim_{x\to0}\frac{\sin mx}{mx}\cdot\frac{nx}{\sin nx}\cdot\frac{mx}{nx}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin mx}{mx}\cdot\lim_{x\to0}\frac{nx}{\sin nx}\cdot\lim_{x\to0}\frac{mx}{nx}=\frac{m}{n};$$

(3) $$\lim_{x\to0}\frac{\sin mx}{\operatorname{tg} nx}=\lim_{x\to0}\frac{\sin mx}{\sin nx}\cdot\cos nx$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin mx}{\sin nx}\cdot\lim_{x\to0}\cos nx=\frac{m}{n}.$$

例5的结果可以作为公式加以应用. 例如

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\frac{3}{2}.$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 4x}=\frac{3}{4}.$$

例6 计算：