线性代数

牛 莉 主编
李宝玉 主审

哈尔滨工业大学出版社

线性代数

牛　莉　主编
李宝玉　主审

哈尔滨工业大学出版社

内 容 简 介

本书共分五章，主要内容包括：行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵和二次型。每章后附有适量的练习题，书末附习题参考答案，供读者在学习和巩固各章的基本内容时选做和参考。

注：书内标有“*”号的内容供不同专业根据各自需求选用。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/牛莉主编.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2002.4

ISBN 7-5603-1701-4

Ⅰ.线... Ⅱ.牛... Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 013107 号

出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区教化街 21 号　邮编 150006
传　　真 0451—6414749
印　　刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本 787×960　1/16　印张 8.5　字数 160 千字
版　　次 2002 年 4 月第 1 版　2002 年 8 月第 2 次印刷
书　　号 ISBN 7-5603-1701-4/O·127
印　　数 7 001～10 000
定　　价 12.00 元

前　言

本书稿自1997年编写完成，一直作为我院各专业工程数学的教材。随着各专业课程的不断调整以及专升本的专业不断扩大，作者结合几年来的教学实践，并汲取了同行们所提出的宝贵意见，对教材的部分内容做了修订。又经过一年的教学实践，再次修订了其中一些疏漏。

目前各章内容和特点：在第一章增加了二阶与三阶行列式。第二章和第三章改动稍大，第二章只保留了矩阵及其运算；第三章通过引进矩阵的初等变换和秩的概念，讨论了线性方程组的求解问题。第四章讨论向量组的线性相关性及线性方程组的解的结构。第五章除了讨论相似矩阵还增加了二次型内容。本书前四章教学时数约24~28学时，第五章可供对数学要求较高的专业选用。

本书第一章由翟秀娜完成，第二章至第五章由牛莉完成，牛莉任主编。本书由李宝玉教授主审，并提出了许多宝贵意见；本书的问世还得到了本教研室全体同志的热情关心与支持，在此一并表示衷心的感谢。

由于水平有限，加之时间仓促，不当之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2002年2月

目　　录

第一章　行列式

1.1　二、三阶行列式

一、二阶行列式

给定一个二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1}$$

求这个方程组的解。

先用 a_{12} 乘以第二个方程，再以 a_{22} 乘以第一个方程，然后两式相减，便消去了 x_2，即得

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \tag{2}$$

用 a_{21} 乘以第一个方程，用 a_{11} 乘以第二个方程，然后两式相减，便消去了 x_1，即得

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \tag{3}$$

(2)、(3) 两式中 x_1 或 x_2 的系数 $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$，用以下记号表示：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

上式叫做二阶行列式。

二阶行列式可以通过对角线法则写出它的表达式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

容易看出，式(2) 右端是把 D 中的 a_{11}、a_{21} 分别换成 b_1、b_2，同样式(3) 右端是把 D 中 a_{12}、a_{22} 分别换成 b_1、b_2，于是(2)、(3) 两式的右端依次为二阶行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

若 $D \neq 0$，则由式(2)、(3) 可得

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} \tag{4}$$

把式(4)代入式(1),可以验证式(4)是方程组(1)的惟一的一组解。

例 1 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$

所以

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = -\frac{5}{2}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{3}{2}$$

二、三阶行列式

给定一个三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{5}$$

像前面的方法一样,先从第一、第二两个方程中消去 x_3,再从第一、第三两个方程中消去 x_3,最后,从所得的两个方程中消去 x_2,得

$$\begin{aligned}(a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13})x_1 = \\ b_1a_{22}a_{33} - b_1a_{32}a_{23} + b_2a_{32}a_{13} - b_2a_{12}a_{33} + b_3a_{12}a_{23} - b_3a_{22}a_{13}\end{aligned} \tag{6}$$

把 x_1 的系数记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

即

$$\begin{aligned} D = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}\end{aligned}$$

称 D 为三阶行列式。

三阶行列式也可通过对角线法则写出它的表达式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

取在实线上的三个元素作乘积，冠以（+）号，则得三项

$$+ a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$

取在虚线上的三个元素作乘积，冠以（-）号，则得另三项

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

行列式 D 的展开式为

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

此法便于记忆。

可以看出，式(6)右端恰好是 D 中的 a_{11}、a_{21}、a_{31} 分别换成 b_1、b_2、b_3 而得到的结果，所以式(6)右端为

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

这样，式(6)可以写成

$$Dx_1 = D_1$$

同理可以得到

$$Dx_2 = D_2$$
$$Dx_3 = D_3$$

这里 D_2 是 D 中 a_{12}、a_{22}、a_{32} 依次换成 b_1、b_2、b_3 所得的行列式，D_3 是 D 中 a_{13}、a_{23}、a_{33} 依次换成 b_1、b_2、b_3 所得的行列式。若 $D \neq 0$，则可得

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}, \qquad x_3 = \frac{D_3}{D} \tag{7}$$

把式(7)代入方程(5)，可以验证式(7)是式(5)的惟一的一组解。

例 2 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

解 $D = 1\times2\times2+2\times1\times3+3\times2\times1-3\times2\times3-$
$1\times1\times1-2\times2\times2=-11$

例 3 解方程组

$$\begin{cases}2x_1-4x_2+x_3=1\\ x_1-5x_2+3x_3=2\\ x_1-x_2+x_3=-1\end{cases}$$

解 $D=\begin{vmatrix}2&-4&1\\1&-5&3\\1&-1&1\end{vmatrix}=-10-12-1+5+6+4=-8$

$$D_1=\begin{vmatrix}1&-4&1\\2&-5&3\\-1&-1&1\end{vmatrix}=11,\qquad D_2=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&3\\1&-1&1\end{vmatrix}=9$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&-4&1\\1&-5&2\\1&-1&-1\end{vmatrix}=6$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{11}{8},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{9}{8},\quad x_3=\frac{D_3}{D}=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4}$$

上述方程组的求解方法能否直接推广到含有 n 个未知数的 n 个方程组成的线性方程组中去呢?关键是如何定义 n 阶行列式。认真分析二、三阶行列式的表达式,我们发现它们有如下共同点:

(1) 每一项都是不同行不同列的元素的乘积,确切地说,每一项都包含了每一行的一个元素和每一列的一个元素。

(2) 在每一项前面都冠以正号或负号。

(3) 所包含的项数为所有可能的乘积。

因此,要推广到 n 阶行列式,需要解决:

(1) 每一项前面的符号按什么规律确定?

(2) 一个 n 阶行列式的表达式中共有多少项?

下面,我们用排列的概念解决它。

1.2 排列与逆序

作为定义 n 阶行列式的准备,我们先讨论排列的基本概念及其性质。

引例 用 1、2、3 三个数字,可以组成多少个没有重复数字的三位数?

解 这个问题相当于把三个数字分别放在百位、十位与个位上,有多少种

不同的放法。

显然,百位上可以从1、2、3三个数字中任选一个,所以有三种放法;十位上只能从剩下的两个数字中选一个,所以有两种放法;而个位上只能放最后剩下的一个数字,所以只有一种放法。因此,共有$3\times2\times1=6$种放法。这六种不同的三位数分别为123,132,213,231,312,321。

在数学中把考察的对象叫做元素。上述问题就是把三个不同的元素排成一列,共有几种不同的排法?

对于n个不同的元素,也可以提出类似的问题:把n个不同的元素排成一列,共有几种不同的排法?

把n个不同的元素排成一列,叫做这n个元素的全排列(也简称排列)。

n个不同元素所有排列的种数,通常用P_n表示,由引例有

$$P_3=3\times2\times1=3!$$

同理可推得

$$P_n=n!$$

对于n个不同的元素,我们规定各个元素之间有一个标准次序(例如n个不同的自然数,可规定由小到大为标准次序),于是在这n个元素的任意一排列中,当某两个元素的先后次序与标准次序不同时,就说有一个逆序,一个排列中所有逆序的总数叫做这个排列的逆序数。排列$P_1P_2\cdots P_n$的逆序数记为$\tau(P_1P_2\cdots P_n)$。

下面讨论计算排列的逆序数的方法。

不失一般性,设n个元素为自然数$1,2,\cdots,n$,并规定由小到大为标准次序。设$P_1P_2\cdots P_n$为这n个自然数的任意一个排列。考虑元素$P_i(i=1,2,\cdots,n)$,如果比P_i大且排在P_i前面的元素有$t_i(i=1,2,\cdots,n)$个,就说P_i这个元素的逆序数为t_i,全体元素逆序数之和就是这个排列的逆序数,记作

$$\tau(P_1P_2\cdots P_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n}t_i$$

例4 计算排列32514的逆序数。

解 在该排列中,3排在首位,它的逆序数为0,即$t_1=0$;2的逆序数为1,即$t_2=1$;5的逆序数为0,即$t_3=0$;1的逆序数为3,即$t_4=3$;4的逆序数为1,即$t_5=1$。所以

$$\tau(32514)=\sum_{i=1}^{5}t_i=0+1+0+3+1=5$$

我们把逆序数为奇数的排列叫**奇排列**,逆序数为偶数的排列叫**偶排列**。

例4中的排列就是奇排列。

把一个排列中某两个元素的位置互换，而其余的元素保持不变，就构成一个新的排列。我们把对排列所施的这种变换称为排列的一个**对换**。

例如，45321 经 4 与 5 对换变成 54321，而 54321 经过 1 与 5 对换又变成了 14325。$\tau(45321)=9$，$\tau(54321)=10$，$\tau(14325)=3$，我们发现每经过一次对换，排列的奇偶性就改变一次。一般地有：

定理 1　一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性。(证略)

推论　奇排列调成标准排列的对换次数为奇数，偶排列调成标准排列的对换次数为偶数。

证　由定理 1 知，对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是偶排列(逆序数为 0)，因此知推论成立。

1.3　n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义，我们进一步研究三阶行列式的结构。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

分析特点：

(1) 它的每一项都是三个元素的乘积，这三个元素位于不同的行和不同的列。

(2) 显然，第一个下标为行标，第二个下标为列标。当某一项的行标为标准次序时，这一项的符号是由列标排列的奇偶性决定的。

带正号的三项列标排列 123、231、312 都是偶排列；带负号的三项列标排列 132、213、321 都是奇排列。

(3) 列标排列的种数为 $P_3=3!=6$，所以共有 6 项。

总之，三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1P_1} a_{2P_2} a_{3P_3}$$

其中 $t=\tau(P_1P_2P_3)$，$\sum$ 表示对 1、2、3 三个数的所有排列 $P_1P_2P_3$ 取和。

仿此，我们可以把行列式推广到一般情形。

定义 1　设有 $n\times n$ 个数，排成 n 行 n 列数表：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

做出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积,并冠以符号 $(-1)^t$,得到形如 $(-1)^t a_{1P_1} a_{2P_2} \cdots a_{nP_n}$ 的项,其中 $P_1 P_2 \cdots P_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的任一个排列,$t = \tau(P_1 P_2 \cdots P_n)$。因而,形如上式的项共有 $n!$ 项,这 $n!$ 项的代数和 $\sum (-1)^t a_{1P_1} a_{2P_2} \cdots a_{nP_n}$ 称为 n 阶行列式,记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中,数 $a_{ij}(i = 1,2,\cdots,n; j = 1,2,\cdots,n)$ 称为行列式 D 的第 i 行第 j 列的元素。

注意:(1) 行列式是一个数。

(2) 当 $n = 1$ 时,$|a| = a$,不要与绝对值符号相混淆。

例 5 证明对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_1 \cdots \lambda_n \qquad (1)$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_1 \cdots \lambda_n \qquad (2)$$

其中对角线上的元素为 $\lambda_i(i = 1,2,\cdots,n)$。未写出的元素都是零。

证 式(1) 显然成立,下面证明式(2) 成立。

若记 $\lambda_i = a_{i,n-i+1}$,则依行列式的定义有

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^t a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}$$

其中 $t=\tau(n(n-1)\cdots 2\cdot 1)=0+1+2+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$

所以

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^t a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

定义 2　对角线以下(上)的元素均为零的行列式叫做上(下)三角行列式。

用与例 5 完全类似的方法求得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{3}$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1} \tag{4}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{5}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ a_{n-11} & a_{n-12} & & & \\ a_{n1} & & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1} \tag{6}$$

上述六个等式可作为公式使用。

1.4　行列式的性质

根据行列式的定义,我们只能计算某些特殊的行列式,对于一般的行列式

来说，随着 n 的增大，用定义计算是相当麻烦的。因此，有必要通过对行列式性质的研究来简化行列式的计算。本节先讨论行列式的性质。

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D' 称为行列式 D 的转置行列式。

性质 1　行列式与它的转置行列式相等。即

$$D=D'$$

由此性质可知，行列式的行与列具有相同的地位，行列式的性质对于行成立的对于列也同样成立，反之亦然。

性质 2　互换行列式的两行(列)，行列式变号。

以 r_i 代表行列式的第 i 行，以 c_i 代表行列式的第 i 列，交换 i、j 两行，记作 $r_i \leftrightarrow r_j$；交换 i、j 两列，记作 $c_i \leftrightarrow c_j$。

推论　如果行列式有两行(列)对应元素完全相等，则此行列式为零。

证明　把对应元素完全相等的两行互换，有 $D=-D$，故 $D=0$。

性质 3　行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式。

第 i 行(或列)乘以 k，记作 $r_i \times k(c_i \times k)$。

推论　行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面。

第 i 行(列)提出公因子 k，记作 $r_i \div k$ 或$(c_i \div k)$。

性质 4　行列式中如果有两行(列)元素对应成比例，则此行列式为零。

性质 5　若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和，则此行列式可表示成两个行列式之和。

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

显然,性质 5 可以推广到某一行(列)为多组数的和的情况。

性质 6　把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数,然后加到另一行(列)对应的元素上去,行列式不变。

例如,把第 i 行的 k 倍加到第 j 行上去,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_j + kr_i} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} + ka_{i1} & a_{j2} + ka_{i2} & \cdots & a_{jn} + ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

利用这些性质可以简化行列式的计算。

例 6　计算

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解

$$D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 + 5r_1]{r_2 - r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - 8r_2]{r_3 + 4r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 \div 5]{r_3 \div 2}$$

$$2 \times 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 \leftrightarrow r_4} -10 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4 + 2r_3}$$

$$
-10\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-10)\times(-4) = 40
$$

例 7 计算

$$
D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}
$$

解

$$
D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3 - 2r_1]{r_2 + r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0
$$

例 8 计算

$$
D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}
$$

解 这个行列式的特点是每行或每列中的 4 个数之和都是 6。现在把 2、3、4 行都加到第一行上去，即

$$
D \xlongequal{r_1 + r_2 + r_3 + r_4} \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \div 6} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3 - r_1, r_4 - r_1]{r_2 - r_1}
$$

$$
6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6\times 8 = 48
$$

例 9 计算

$$
D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}
$$