

面向 21 世纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

数学物理方法

第二版

胡嗣柱 倪光炯 编著



高 等 教 育 出 版 社
HIGHER EDUCATION PRESS

Methods of Mathematical Physics



ISBN 7-04-010472-5



9 787040 104721 >

定价 29.20 元

面向 21 世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

0411.1-43
H52(2)

数学物理方法

第二版

胡嗣柱 倪光炯 编著



A0967034



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书是教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果,是面向 21 世纪课程教材。本书是在原第一版(曾获国家教委优秀教材奖)的基础上结合当前教改实际修订而成的。此次修订,保持了原书的基本结构和特色,更新了部分内容。例如,压缩了保角变换法内容,改写了积分方程一章,增添了 Z 变换、小波变换和非线性偏微分方程等内容;同时,对例题和习题作了适当调整,特别是补充了一些基本要求的习题。这进一步提高了本书的实用性,并能满足多层次读者学习需求。

本书可作为高等学校本科物理专业的教材,也可供有关专业的研究生、教师 and 科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/胡嗣柱,倪光炯编著. —2 版. —北
京:高等教育出版社,2002.7
高等学校教材
ISBN 7-04-010472-5

I. 数... II. ①胡...②倪... III. 数学物理方法—
高等学校—教材 IV. 0411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 084778 号

数学物理方法 第二版
胡嗣柱 倪光炯 编著

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市东城区沙滩后街 55 号
邮政编码 100009
传 真 010-64014048

购书热线 010-64054588
免费咨询 800-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>

经 销 新华书店北京发行所
排 版 高等教育出版社照排中心
印 刷 北京外文印刷厂

开 本 787×960 1/16
印 张 25.5
字 数 470 000

版 次 1989 年 1 月第 1 版
2002 年 7 月第 2 版
印 次 2002 年 7 月第 1 次印刷
定 价 29.20 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

第二版前言

本书初版面世至今已整整十年,其间有幸获得第二届全国高校优秀教材国家教委二等奖,还出版了与之配套的《数学物理方法解题指导》(胡嗣柱、徐建军,高等教育出版社,1997)一书.为了进一步提高教材的实用性,适当更新知识,以适应各层次读者的学习需要,经过我们最近十多年的教学和科研实践,在保持原书基本要求和特点的前提下,本书第二版的内容主要作了以下几个方面的调整:(1)将原来的保角变换法一章压缩为一节,积分方程一章也精简了;(2)增写了有关 Z 变换、小波变换和非线性偏微分方程的内容;(3)对习题和例题作了适当的调整(特别是补充了一些基本要求的习题).书中带“*”号的章节和部分是要求较高的参考内容,如讲授学时有限,一般可以略去不讲.

沈菡教授、贾起民教授、赵惠芬教授和林志方教授审阅了全部书稿.作者向他们以及对原书和本书提出过宝贵意见和建议的专家和读者表示衷心的感谢.本书的写作和出版得到“国家基础科学研究与教学人才培养基地”的部分资助以及高等教育出版社的大力支持,在此深表谢意.

作者

2000年12月于复旦大学

第一版作者的话

我们自 1958 年开始在复旦大学物理系讲授“数学物理方法”，本书就是在长期从事这门课教学实践的基础上，结合复旦大学的教学特点和科研实践，参考先期出版的同类书籍，为适应读者学习理论物理学课程的需要，由原来的讲义经补充修改而成的。

“数学物理方法”这门课程，应该说不是理论物理学的主体，与“四大力学”的性质和任务有所不同，但两者是相辅相成的。若把知识结构比作一座大厦，那么单有纵向联系是不牢固的，而数学物理方法在介绍数学方法的同时，正起了横向联系的加固作用。可以说，数学物理方法既是理论物理学的基础，又是一种“粘结剂”。如果结合“四大力学”把数学物理方法的知识 and 技能牢固地掌握的话，就能为以后的学习和工作带来极大的方便。当然，要做到这一点决非易事，现在我们写这本书的目的就是希望能帮助读者缩短学习和掌握这门课程的过程。

物理问题一旦归结为数学问题，那么最重要的问题就是要知道求解这个数学问题在数学上已提供了哪些方法，明确应用这些方法的条件是什么，以及如何正确地应用这些方法。因此，在有限的篇幅内，我们在寻求数学的实用性和严谨性的某种平衡时，把侧重点放在前者。根据这一原则，譬如，加强了级数展开方法、应用留数定理作定积分的计算、 δ 函数、色散关系，特别重视解本征值的问题、傅里叶变换法、拉普拉斯变换法、格林函数法以及特殊函数的渐近展开式，而且在阐述特殊函数的性质时也不是面面俱到的。

实践证明，只有勤思考多动手，才能迅速地掌握这门课程；然而，只有前者而不强调后者，也是无济于事的。为此，我们在各章中安排了相当数量的典型例题，通过它们，力求给出一幅数学—物理的清晰图像：物理问题是如何归结为数学问题的→运用何种数学方法来求解→其解的物理意义是什么。此外，各章都配备了适量的习题，其中有些具有一定的深度和难度，以加深对所学概念的理解和方法的应用，书末还附有各章习题的答案。

本书中的错误和不足之处，恳请读者批评指正。

1987 年 4 月于复旦大学

目 录

上篇 复变函数论

第一章 复变函数和解析函数	1
§ 1.1 复数的基本概念	1
1. 复数及其代数运算	1
2. 无穷远点	2
§ 1.2 复变函数及其导数 柯西 - 黎曼条件	3
1. 复变函数及其导数	3
2. 柯西 - 黎曼条件	5
§ 1.3 解析函数	7
§ 1.4 多值函数	9
1. 多值函数及其支点	9
2. 黎曼面	9
§ 1.5 解析函数的几何性质 保角变换	12
§ 1.6 解析函数的物理解释 复势	15
1. 平面静电场的复势	15
* 2. 保角变换将一平面的复势变为另一平面的复势	17
习题	18
第二章 复变函数积分 柯西定理和柯西公式	20
§ 2.1 复变函数积分及其性质	20
1. 复变函数积分	20
2. 复变函数积分的性质	21
§ 2.2 柯西定理	22
§ 2.3 不定积分	24
§ 2.4 柯西公式及其几个推论	27
1. 柯西公式	27
2. 柯西公式的推论	28
* § 2.5 两种特殊区域上解析函数的实部和虚部的关系 泊松积分公式	31

1. 半平面区域的情况	31
2. 圆形区域的情况	32
习题	33
第三章 复变函数级数 泰勒级数和洛朗级数 孤立奇点的分类	35
§ 3.1 复变函数级数和解析函数级数	35
§ 3.2 幂级数的收敛性	37
1. 幂级数的收敛性	37
2. 幂级数的收敛圆	39
§ 3.3 解析函数的泰勒级数展开	40
1. 解析函数的泰勒级数	40
2. 多值函数的泰勒级数	43
§ 3.4 解析函数的洛朗级数展开	45
§ 3.5 泰勒级数和洛朗级数展开的几种常用方法	47
§ 3.6 孤立奇点的分类和特性	50
习题	55
第四章 解析延拓 Γ 函数和 B 函数	56
§ 4.1 解析函数的唯一性	56
1. 解析延拓	56
2. 解析函数的唯一性	57
§ 4.2 用泰勒级数进行解析延拓	58
§ 4.3 利用函数关系式进行解析延拓 Γ 函数	60
§ 4.4 B 函数	62
习题	64
第五章 定积分的计算	65
§ 5.1 留数定理和留数的求法	65
1. 留数定理	65
2. 留数的求法	67
§ 5.2 $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx$	69
§ 5.3 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{imx} dx$ 和若尔当引理	70
1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$	71
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{imx} dx$	71
§ 5.4 积分主值	73
1. 积分主值和希尔伯特变换	73

* 2. 积分 $\int_a^b \frac{f(x)}{x - x_0 \pm i\epsilon} dx (a < x_0 < b)$ 公式	76
§ 5.5 多值函数积分的两种类型	77
1. $\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} Q(x) dx$ (α 是非整数)	77
2. $\int_0^{\infty} \ln^n x Q(x) dx$ ($n=0, 1, 2, \dots$)	81
§ 5.6 几个特殊积分	83
1. 菲涅耳积分	83
2. $\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx$ ($a>0, b>0$)	84
* 3. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$	85
习题	87
第六章 拉普拉斯变换	90
§ 6.1 拉普拉斯变换的定义和基本性质	90
1. 拉普拉斯变换的定义	90
2. 拉普拉斯变换的基本性质	92
§ 6.2 反演问题 梅林反演公式	95
1. 反演问题	95
2. 梅林反演公式和展开定理	97
§ 6.3 求原函数和像函数的几种常用方法	101
§ 6.4 线性常微分方程的初值问题	105
§ 6.5 点源和瞬时源 δ 函数	110
1. δ 函数的定义	110
2. δ 函数及其导数的性质	112
3. δ 函数的一个应用(持续作用的力分解为瞬时力)	114
* § 6.6 Z 变换和差分方程的求解简介	115
1. Z 变换及其与拉普拉斯变换的关系	116
2. 线性差分方程	118
3. 用 Z 变换求解二阶常系数线性差分方程	118
习题	120
第七章 傅里叶变换和色散关系	123
§ 7.1 傅里叶级数	123
1. 傅里叶级数	123
2. 复数形式的傅里叶级数	125
§ 7.2 傅里叶变换	126
1. 傅里叶积分和傅里叶变换	126

2. 傅里叶变换的基本性质	130
3. 傅里叶变换与拉普拉斯变换的比较	134
§ 7.3 多重傅里叶变换	134
* § 7.4 色散关系	137
1. 色散关系	137
2. 物理应用实例	141
* § 7.5 小波变换的基本思想	142
1. 函数局域化概念和窗函数	142
2. 伽博变换	143
3. 小波变换	145
习题	146
第八章 线性常微分方程的级数解法和某些特殊函数	148
§ 8.1 常点邻域方程的级数解 勒让德方程	148
1. 常点邻域方程的级数解	148
2. 勒让德方程	149
§ 8.2 正则奇点邻域方程的级数解 柱贝塞尔方程	153
1. 正则奇点邻域方程的级数解	153
2. 柱贝塞尔方程, $s_1 - s_2 \neq 0$ 和正整数的情况	157
3. 柱贝塞尔方程, $m =$ 半整数的情况	159
4. 柱贝塞尔方程, $m = 0$ 或正整数的情况	161
* § 8.3 高斯方程和库默尔方程	167
1. 高斯方程和超几何函数	167
2. 库默尔方程和合流超几何函数	169
§ 8.4 非齐次方程的通解	172
1. 齐次方程的通解公式	172
2. 非齐次方程的通解公式	173
习题	175

下篇 数学物理方程

第九章 数学物理方程的定解问题	177
§ 9.1 数学物理方程的导出	177
1. 弦的横振动方程	177
2. 杆的纵振动方程	179
3. 薄膜的振动方程	180
4. 热传导方程和稳定温度场方程, 扩散方程	182
5. 静电场方程	183
§ 9.2 二阶线性偏微分方程的分类和简化	184

1. 二阶方程的分类	184
2. 二阶方程的标准形式	186
3. 二阶常系数方程的进一步简化	189
§ 9.3 定解问题	190
1. 初始条件	190
2. 边界条件	191
§ 9.4 线性方程的叠加原理	193
1. 叠加原理	193
2. 求解定解问题的一般步骤	195
习题	196
第十章 行波法和分离变量法 本征值问题	198
§ 10.1 一维无界区域的自由振动问题 达朗贝尔公式	198
1. 行波法和达朗贝尔公式	198
2. 解的物理解释	199
§ 10.2 一维半无界区域的自由振动问题 初始条件的延拓	200
1. 齐次边界条件的情况	200
2. 非齐次边界条件的情况	203
3. 定解问题:从半无界区域到有界区域	204
§ 10.3 一维有界区域自由振动问题的驻波解 分离变量法	204
1. 分离变量法	204
2. 分离变量法的几点说明和主要步骤	206
§ 10.4 非齐次边界条件的齐次化	211
§ 10.5 本征函数法	214
§ 10.6 施图姆-刘维尔型方程的本征值问题	217
1. 本征值问题的一般提法	217
2. 本征值问题的一般性质	219
习题	223
第十一章 积分变换法	225
§ 11.1 无界空间的有源导热问题 傅里叶变换法	225
1. 一维无源导热问题和基本解	225
2. 一维有源导热问题	227
3. 三维导热问题	229
§ 11.2 三维无界空间的静电场问题	230
§ 11.3 三维无界空间的受迫振动问题 泊松公式和推迟势公式	231
1. 自由振动问题	232
2. 受迫振动问题	233
§ 11.4 拉普拉斯变换法	234

习题	237
第十二章 球坐标下的分离变量法 勒让德多项式和球谐函数	240
§ 12.1 正交曲线坐标系 平面圆形区域的定解问题	240
1. 正交曲线坐标系和 δ 函数表达式	240
2. 场量的梯度、散度、旋度和拉普拉斯算符	243
3. 圆形区域拉普拉斯方程的定解问题	245
§ 12.2 球坐标下的分离变量法	248
1. 拉普拉斯方程	248
2. 稳恒振动问题	250
§ 12.3 轴对称问题 勒让德多项式	251
1. 轴对称问题和勒让德多项式	251
2. 勒让德多项式的常用性质	251
§ 12.4 非轴对称问题 球谐函数	259
1. 连带勒让德函数	259
2. 球谐函数	263
习题	268
第十三章 柱坐标下的分离变量法 贝塞尔函数	270
§ 13.1 柱坐标下的分离变量法	270
§ 13.2 贝塞尔函数	271
1. 贝塞尔函数	271
2. 本征值问题	275
§ 13.3 虚宗量贝塞尔函数	281
§ 13.4 球贝塞尔函数	284
1. 球贝塞尔函数	284
2. 本征值问题	286
§ 13.5 最速下降法 贝塞尔函数的渐近式	288
* 1. 函数的渐近表达式和斯特令公式	288
* 2. 最速下降法	289
3. 贝塞尔函数的渐近式	295
§ 13.6 可以化为贝塞尔方程的一类方程 艾里方程的有限解	298
习题	301
第十四章 非齐次方程的定解问题和格林函数法	303
§ 14.1 三类边界条件的定解问题的解与格林函数	303
1. 无界空间的定解问题与格林函数, 第二格林公式	303
2. 形式解	305
3. 边界条件与格林函数	306

4. 格林函数法的物理意义	309
§ 14.2 格林函数的一般性质	309
§ 14.3 某些特殊区域泊松方程狄利克雷问题的格林函数 镜像法	312
1. 半无界空间的情况	313
2. 圆内区域的情况	314
3. 球内区域的情况	315
§ 14.4 格林函数的一般求法	316
1. 用本征函数族展开	316
2. 一维空间格林函数的有限形式	318
§ 14.5 无界空间的稳恒振动问题	319
1. 特殊球坐标系下格林函数的有限形式	319
2. 特殊柱坐标系下格林函数的有限形式	320
3. 一般球坐标系下格林函数的级数形式	321
4. 一般柱坐标系下格林函数的级数形式	323
5. 平面波用球面波展开	324
6. 平面波用柱面波展开	325
* § 14.6 受迫振动问题与含时格林函数	326
1. 受迫振动问题的解与含时格林函数	326
2. 三维无界空间的含时格林函数	328
3. 二维无界空间的含时格林函数	328
4. 一维无界区间的含时格林函数	329
5. 有界空间的含时格林函数	329
习题	333
第十五章 变分法	335
§ 15.1 变分问题 欧拉-拉格朗日方程	335
1. 变分问题和欧拉-拉格朗日方程	335
2. E-L 方程的几种推广情况	339
§ 15.2 带约束条件的变分问题	342
1. 约束条件是 $J[y] = C$ (常数) 的变分问题	342
2. 测地线问题	344
* § 15.3 端点值可变情况下的变分问题	347
§ 15.4 变分问题与微分方程的求解	349
1. 与本征值问题的联系	350
2. 与定解问题的联系	353
3. 瑞利-里兹方法	354
习题	357
* 第十六章 积分方程简介和非线性偏微分方程初步	360

§ 16.1 散射的李普曼-施温格方程和玻恩近似	360
1. 李普曼-施温格方程	360
2. 玻恩近似	361
§ 16.2 沃尔泰拉积分方程	362
1. 常微分方程与沃尔泰拉积分方程的联系	362
2. 沃尔泰拉积分方程的迭代解法	362
§ 16.3 弗雷德霍姆积分方程	364
§ 16.4 退化核和对称核的弗雷德霍姆积分方程	364
1. 退化核积分方程	364
2. 对称核积分方程	366
§ 16.5 弱奇性核积分方程	367
§ 16.6 非线性偏微分方程初步	368
1. 单摆的运动	368
2. KdV 方程及其孤立波解	369
3. KdV 方程的双孤立波解	370
习题	374
习题答案	376
主要参考书目	391

上篇 复变函数论

第一章 复变函数和解析函数

本章介绍复变函数的基本概念,着重讨论解析函数的定义、充要条件、几何性质和物理解释.解析函数是本篇各章要研究的主要对象.

§ 1.1 复数的基本概念

在讨论复变函数的基本原理之前,先介绍复数的有关概念.

1. 复数及其代数运算

设 x 和 y 是两个实数,以 i 记 $\sqrt{-1}$ (即 $i^2 = -1$), 则称 $z = x + iy$ 为一复数, 其中 x 称为复数 z 的实部, 记为 $\operatorname{Re} z$; y 称为 z 的虚部, 记为 $\operatorname{Im} z$. $x - iy$ 称为 $z = x + iy$ 的共轭复数, 记为 $\bar{z}$ 或 z^* . 复数的上述表示式称为复数的代数式.

一个复数可以用平面上的一个点或一个矢量表示, 如图 1.1 所示 (当然矢量的起点可以不在原点; 也就是说, 长度和方向都相同的矢量表示同一个复数). 这时 x 轴和 y 轴分别以 1 和 i 为单位, 我们分别称它们为实轴和虚轴, 而这样的平面称为复平面.

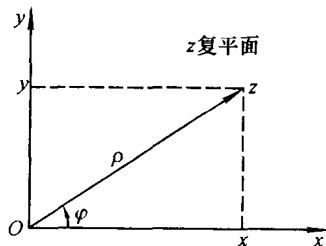


图 1.1 复平面

如改取极坐标 $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ (见图 1.1), 则复数 $x + iy$ 又可写为

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (1.1)$$

其中 ρ 称为 z 的模, 记为 $|z|$; φ 称为 z 的幅角, 记为 $\arg z$. 表示式 (1.1) 称为复数的三角式. 注意, 若 φ 是 z 的幅角, 则 $\varphi + 2n\pi$ (n 是整数) 也是 z 的幅角.

(1.1)式还可写为^①

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad (1.2)$$

这里的 $e^{i\varphi}$ 理解为

$$e^{i\varphi} \equiv 1 + i\varphi + \frac{(i\varphi)^2}{2!} + \cdots + \frac{(i\varphi)^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\varphi)^n,$$

其中定义 $0! \equiv 1$. (1.2)式称为复数的指数式.

当且仅当两个复数的实部和虚部分别相等时这两个复数才相等. 复数的加减法:

$$(x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2). \quad (1.3)$$

复数的乘除法(利用 $i^2 = -1$):

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1), \quad (1.4)$$

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (\text{设 } x_2 + iy_2 \neq 0). \quad (1.5)$$

复数的乘除运算采用指数式(1.2)较为方便:

$$\rho_1 e^{i\varphi_1} \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (1.6)$$

$$\frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (\text{设 } \rho_2 \neq 0). \quad (1.7)$$

复数 z 的 n (整数)次幂为

$$z^n = (\rho e^{i\varphi})^n = \rho^n e^{in\varphi}, \quad (1.8)$$

而 z 的 n (自然数)次根式为

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi}{n}}. \quad (1.9)$$

由此可见,若 φ_0 是 z 的幅角的某一值,则 $\sqrt[n]{z}$ 可取 n 个不同的值:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1). \quad (1.10)$$

2. 无穷远点

复平面上模为无穷大的点规定为一点,称为**无穷远点**. 复平面上只有一个无穷远点,这可作如下理解:作一半径为任意的球面,使它的南极与复平面上的原点 O 重合,如图 1.2 所示. 对于复平面上任意有限远点 z ,连接球的北极 N 与点 z ,此连线交球面于点 ζ . 显然 z 与 ζ 是一一对应的. 这样,复平面上所有的有限远点就与该球面上除北极 N 点之外的所有点建立了一一对应的关系. 当点 z 的模愈来愈大时,点 ζ 就愈来愈接近北极 N ,可见点 N 就与无穷远点相对应. 这样的球面称为**复数球面**. 无穷远点就记为 ∞ . 复平面上只有一个无穷远点,这还可论证如下:

^① 等式 $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ 的证明见第三章.

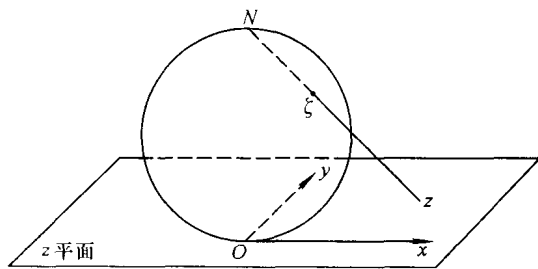


图 1.2 复数球面

$$\zeta = \frac{1}{z} \quad (1.11)$$

将两个复平面 z 和 ζ 上的除原点外的所有有限远点之间建立了一一对应关系. 于是与 $\zeta=0$ 对应的就是 $z=\infty$. 基于这个原因, 我们以后还会用变换关系 (1.11) 式将 z 的函数关于 $z=\infty$ 的讨论变为关于 $\zeta=0$ 的讨论.

既然一个复数可以用复平面上的一点表示, 复数列 $\{z_n = x_n + iy_n\} (n=1, 2, 3, \dots)$ 的极限问题就归结为平面上点列 $\{(x_n, y_n)\} (n=1, 2, 3, \dots)$ 的极限问题.

§ 1.2 复变函数及其导数 柯西-黎曼条件

1. 复变函数及其导数

上节已定义复数的代数运算. 有理分式 (包括多项式) 和根式是上节讨论的代数运算的组合. 现在再定义一些初等函数.

指数函数

$$e^z = e^{x+iy} \equiv e^x e^{iy}. \quad (1.12)$$

三角函数

$$\sin z \equiv \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad (1.13)$$

$$\cos z \equiv \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad (1.14)$$

等等.

双曲函数

$$\sinh z \equiv \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad (1.15)$$

$$\cosh z \equiv \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad (1.16)$$