面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

数学物理方法

第二版

胡嗣柱　倪光炯　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

Methods of Mathematical Physics

ISBN 7-04-010472-5
9 787040 104721 >
定价 29.20 元

面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

数学物理方法

第二版

胡嗣柱　倪光炯　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书是教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的研究成果，是面向21世纪课程教材．本书是在原第一版(曾获国家教委优秀教材奖)的基础上结合当前教改实际修订而成的．此次修订，保持了原书的基本结构和特色，更新了部分内容．例如，压缩了保角变换法内容，改写了积分方程一章，增添了Z变换、小波变换和非线性偏微分方程等内容；同时，对例题和习题作了适当调整，特别是补充了一些基本要求的习题．这进一步提高了本书的实用性，并能满足多层次读者学习需求．

本书可作为高等学校本科物理专业的教材，也可供有关专业的研究生、教师和科技人员参考．

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/胡嗣柱，倪光炯编著．—2版．—北京：高等教育出版社，2002.7

高等学校教材

ISBN 7-04-010472-5

Ⅰ．数…　Ⅱ．①胡…②倪…　Ⅲ．数学物理方法－高等学校－教材　Ⅳ．0411.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第084778号

数学物理方法　第二版

胡嗣柱　倪光炯　编著

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	北京外文印刷厂		
		版　　次	1989年1月第1版
开　　本	787×960　1/16		2002年7月第2版
印　　张	25.5	印　　次	2002年7月第1次印刷
字　　数	470 000	定　　价	29.20元

第二版前言

本书初版面世至今已整整十年，其间有幸获得第二届全国高校优秀教材国家教委二等奖，还出版了与之配套的《数学物理方法解题指导》（胡嗣柱、徐建军，高等教育出版社，1997）一书．为了进一步提高教材的实用性，适当更新知识，以适应各层次读者的学习需要，经过我们最近十多年的教学和科研实践，在保持原书基本要求和特点的前提下，本书第二版的内容主要作了以下几个方面的调整：(1) 将原来的保角变换法一章压缩为一节，积分方程一章也精简了；(2) 增写了有关 Z 变换、小波变换和非线性偏微分方程的内容；(3) 对习题和例题作了适当的调整（特别是补充了一些基本要求的习题）．书中带“*”号的章节和部分是要求较高的参考内容，如讲授学时有限，一般可以略去不讲．

沈施教授、贾起民教授、赵惠芬教授和林志方教授审阅了全部书稿．作者向他们以及对原书和本书提出过宝贵意见和建议的专家和读者表示衷心的感谢．本书的写作和出版得到“国家基础科学研究与教学人才培养基地”的部分资助以及高等教育出版社的大力支持，在此深表谢意．

作者

2000年12月于复旦大学

第一版作者的话

我们自 1958 年开始在复旦大学物理系讲授“数学物理方法”,本书就是在长期从事这门课教学实践的基础上,结合复旦大学的教学特点和科研实践,参考先期出版的同类书籍,为适应读者学习理论物理学课程的需要,由原来的讲义经补充修改而成的.

“数学物理方法”这门课程,应该说不是理论物理学的主体,与“四大力学”的性质和任务有所不同,但两者是相辅相成的.若把知识结构比作一座大厦,那么单有纵向联系是不牢固的,而数学物理方法在介绍数学方法的同时,正起了横向联系的加固作用.可以说,数学物理方法既是理论物理学的基础,又是一种“粘结剂”.如果结合“四大力学”把数学物理方法的知识和技能牢固地掌握的话,就能为以后的学习和工作带来极大的方便.当然,要做到这一点决非易事,现在我们写这本书的目的就是希望能帮助读者缩短学习和掌握这门课程的过程.

物理问题一旦归结为数学问题,那么最重要的问题就是要知道求解这个数学问题在数学上已提供了哪些方法,明确应用这些方法的条件是什么,以及如何正确地应用这些方法.因此,在有限的篇幅内,我们在寻求数学的实用性和严谨性的某种平衡时,把侧重点放在前者.根据这一原则,譬如,加强了级数展开方法、应用留数定理作定积分的计算、δ 函数、色散关系,特别重视解本征值的问题、傅里叶变换法、拉普拉斯变换法、格林函数法以及特殊函数的渐近展开式,而且在阐述特殊函数的性质时也不是面面俱到的.

实践证明,只有勤思考多动手,才能迅速地掌握这门课程;然而,只有前者而不强调后者,也是无济于事的.为此,我们在各章中安排了相当数量的典型例题,通过它们,力求给出一幅数学－物理的清晰图像:物理问题是如何归结为数学问题的→运用何种数学方法来求解→其解的物理意义是什么.此外,各章都配备了适量的习题,其中有些具有一定的深度和难度,以加深对所学概念的理解和方法的应用,书末还附有各章习题的答案.

本书中的错误和不足之处,恳请读者批评指正.

1987 年 4 月于复旦大学

目　　录

上篇　复变函数论

下篇 数学物理方程

上篇　复变函数论

第一章　复变函数和解析函数

本章介绍复变函数的基本概念，着重讨论解析函数的定义、充要条件、几何性质和物理解释．解析函数是本篇各章要研究的主要对象．

§1.1　复数的基本概念

在讨论复变函数的基本原理之前，先介绍复数的有关概念．

1．复数及其代数运算

设 x 和 y 是两个实数，以 i 记 $\sqrt{-1}$（即 $i^2=-1$），则称 $z=x+iy$ 为一**复数**，其中 x 称为复数 z 的**实部**，记为 Re z；y 称为 z 的**虚部**，记为 Im z．$x-iy$ 称为 $z=x+iy$ 的**共轭复数**，记为 z^* 或 $\bar{z}$．复数的上述表示式称为复数的**代数式**．

一个复数可以用平面上的一个点或一个矢量表示，如图 1.1 所示（当然矢量的起点可以不在原点；也就是说，长度和方向都相同的矢量表示同一个复数）．这时 x 轴和 y 轴分别以 1 和 i 为单位，我们分别称它们为**实轴**和**虚轴**，而这样的平面称为**复平面**．

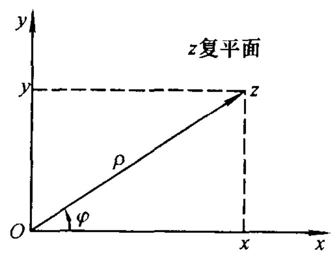

图 1.1　复平面

如改取极坐标 $x=\rho\cos\varphi$，$y=\rho\sin\varphi$（见图 1.1），则复数 $x+iy$ 又可写为

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi), \tag{1.1}$$

其中 ρ 称为 z 的**模**，记为 $|z|$；φ 称为 z 的**幅角**，记为 arg z．表示式(1.1)称为复数的**三角式**．注意，若 φ 是 z 的幅角，则 $\varphi+2n\pi$（n 是整数）也是 z 的幅角．

(1.1)式还可写为①

$$z=\rho e^{i\varphi}, \tag{1.2}$$

这里的 $e^{i\varphi}$ 理解为

$$e^{i\varphi}\equiv 1+i\varphi+\frac{(i\varphi)^2}{2!}+\cdots+\frac{(i\varphi)^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(i\varphi)^n,$$

其中定义 $0!\equiv 1$.(1.2)式称为复数的**指数式**.

当且仅当两个复数的实部和虚部分别相等时这两个复数才相等.复数的加减法:

$$(x_1+iy_1)\pm(x_2+iy_2)=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2). \tag{1.3}$$

复数的乘除法(利用 $i^2=-1$):

$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1), \tag{1.4}$$

$$\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

$$(设\ x_2+iy_2\neq 0). \tag{1.5}$$

复数的乘除运算采用指数式(1.2)较为方便:

$$\rho_1e^{i\varphi_1}\rho_2e^{i\varphi_2}=\rho_1\rho_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \tag{1.6}$$

$$\frac{\rho_1e^{i\varphi_1}}{\rho_2e^{i\varphi_2}}=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}\quad(设\ \rho_2\neq 0). \tag{1.7}$$

复数 z 的 n(整数)次幂为

$$z^n=(\rho e^{i\varphi})^n=\rho^n e^{in\varphi}, \tag{1.8}$$

而 z 的 n(自然数)次根式为

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho e^{i\varphi}}=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\frac{\varphi}{n}}. \tag{1.9}$$

由此可见,若 φ_0 是 z 的幅角的某一值,则 $\sqrt[n]{z}$ 可取 n 个不同的值:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\frac{\varphi_0+2k\pi}{n}}\quad(k=0,1,\cdots,n-1). \tag{1.10}$$

2. 无穷远点

复平面上模为无穷大的点规定为一点,称为**无穷远点**.复平面上只有一个无穷远点,这可作如下理解:作一半径为任意的球面,使它的南极与复平面上的原点 O 重合,如图 1.2 所示.对于复平面上任意有限远点 z,连接球的北极 N 与点 z,此连线交球面于点 ζ.显然 z 与 ζ 是一一对应的.这样,复平面上所有的有限远点就与该球面上除北极 N 点之外的所有点建立了一一对应的关系.当点 z 的模愈来愈大时,点 ζ 就愈来愈接近北极 N,可见点 N 就与无穷远点相对应.这样的球面称为**复数球面**.无穷远点就记为 ∞.复平面上只有一个无穷远点,这还可论证如下:

① 等式 $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ 的证明见第三章.

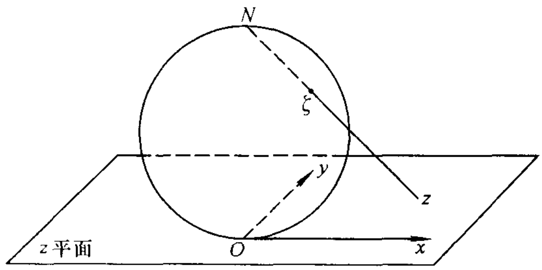

图 1.2　复数球面

式

$$\zeta=\frac{1}{z}\tag{1.11}$$

将两个复平面 z 和 ζ 上的除原点外的所有有限远点之间建立了一一对应关系.于是与 $\zeta=0$ 对应的就是 $z=\infty$.基于这个原因,我们以后还会用变换关系(1.11)式将 z 的函数关于 $z=\infty$ 的讨论变为关于 $\zeta=0$ 的讨论.

既然一个复数可以用复平面上的一个点表示,复数列 $\{z_n=x_n+\mathrm{i}y_n\}(n=1,2,3,\cdots)$ 的极限问题就归结为平面上点列 $\{(x_n,y_n)\}(n=1,2,3,\cdots)$ 的极限问题.

§1.2　复变函数及其导数　柯西-黎曼条件

1. 复变函数及其导数

上节已定义复数的代数运算.有理分式(包括多项式)和根式是上节讨论的代数运算的组合.现在再定义一些初等函数.

指数函数

$$\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}\equiv\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}.\tag{1.12}$$

三角函数

$$\sin z\equiv\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}},\tag{1.13}$$

$$\cos z\equiv\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2},\tag{1.14}$$

等等.

双曲函数

$$\sinh z\equiv\frac{\mathrm{e}^z-\mathrm{e}^{-z}}{2},\tag{1.15}$$

$$\cosh z\equiv\frac{\mathrm{e}^z+\mathrm{e}^{-z}}{2},\tag{1.16}$$