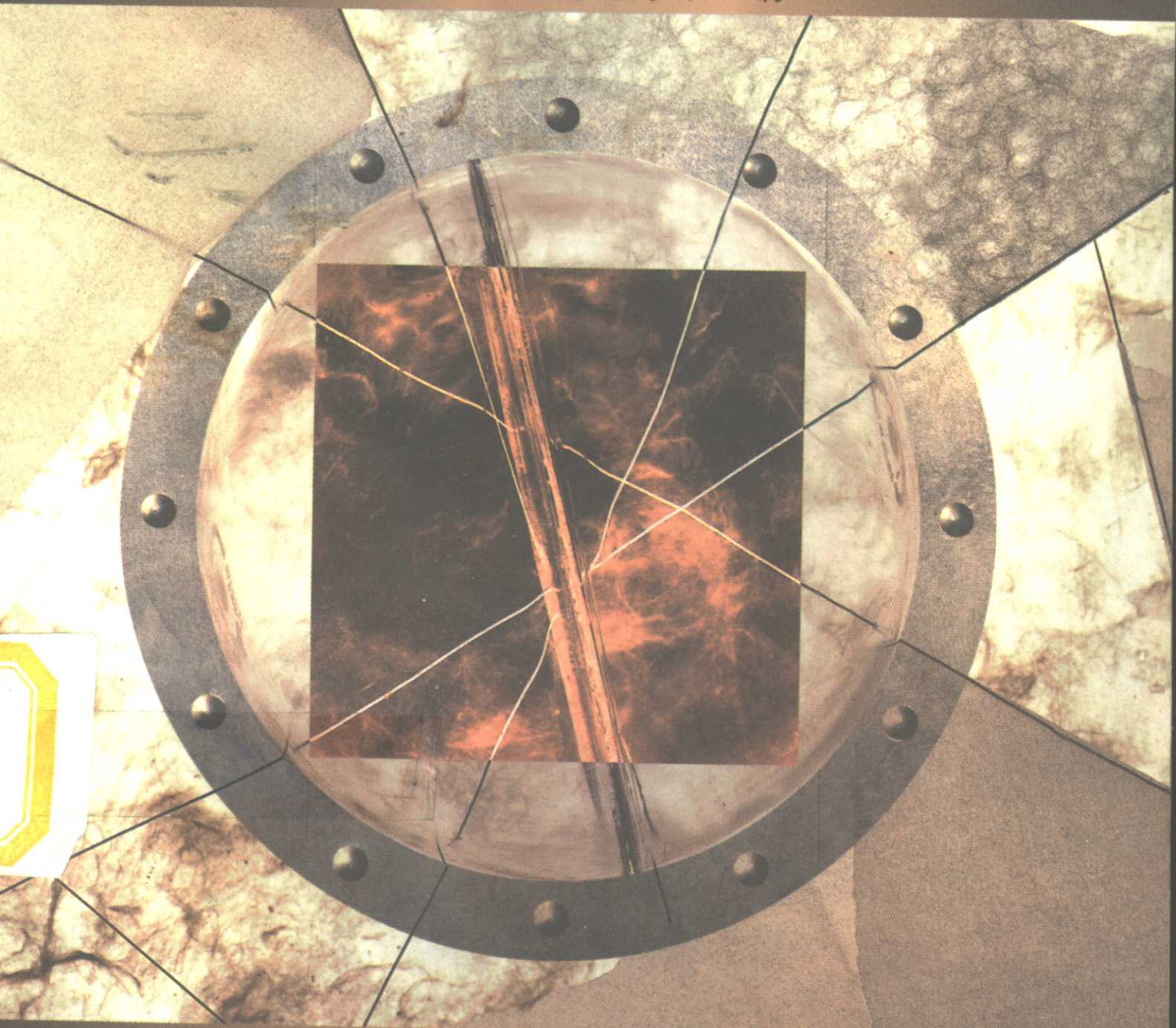


992405

高等数学

(下册)

华中理工大学数学系 编



高等教育出版社

高等数学

(下册)

华中理工大学数学系 编

高等教育出版社

(京)112号

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 下册 / 华中理工大学数学系编. - 北京: 高等教育出版社, 1997

ISBN 7-04-006401-4

I. 高… II. 华… III. 高等数学 IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 26877 号

*

高等教育出版社出版

北京沙滩后街 55 号

邮政编码: 100009 传真: 64014048 电话: 64054588

高等教育出版社发行

国防工业出版社印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 8.125 字数 210 000

1997 年 12 月第 1 版 1997 年 12 月第 1 次印刷

印数 0 001—15 195

定价 8.20 元

凡购买高等教育出版社的图书, 如有缺页、倒页、脱页等
质量问题者, 请与当地图书销售部门联系调换

版权所有 不得翻印

责任编辑 徐 可
封面设计 李卫青
责任印制 宋克学

013
2511
2

目 录

第八章 向量代数与空间解析几何

§ 8.1 空间直角坐标系	1
§ 8.2 向量及其线性运算	4
8.2.1 向量概念	4
8.2.2 向量的线性运算	5
8.2.3 向量的坐标	7
§ 8.3 向量间的乘法	10
8.3.1 向量的数量积	10
8.3.2 向量的矢量积	12
8.3.3 混合积与三重矢量积	14
§ 8.4 平面与直线	17
8.4.1 平面方程	17
8.4.2 直线方程	19
8.4.3 关于平面与直线的基本问题	21
§ 8.5 曲面与曲线	27
8.5.1 曲面	27
8.5.2 空间曲线	30
8.5.3 二次曲面	32

第九章 多元函数微分学

§ 9.1 多元函数	38
9.1.1 区域	38
9.1.2 多元函数的概念	41
9.1.3 极限与连续性	43
§ 9.2 偏导数	46
9.2.1 偏导数的定义与计算	46
9.2.2 复合函数微分法	49

9.2.3	隐函数微分法	53
9.2.4	高阶偏导数	56
§ 9.3	全微分与 Taylor 公式	61
9.3.1	全微分	61
9.3.2	Taylor 公式	65
§ 9.4	方向导数与梯度	68
9.4.1	方向导数	68
9.4.2	梯度	71
§ 9.5	极值	73
9.5.1	自由极值	73
9.5.2	条件极值	77
9.5.3	应用问题	80
§ 9.6	微分学的几何应用	84
9.6.1	曲线的切线与法平面	84
9.6.2	曲面的切平面与法线	87
第十章	重积分	92
§ 10.1	二重积分的定义与性质	92
10.1.1	体积问题与质量问题	92
10.1.2	二重积分的定义	93
10.1.3	二重积分的性质	95
§ 10.2	二重积分的计算	96
10.2.1	化为逐次积分	97
10.2.2	极坐标代换	101
10.2.3	一般变量代换	105
§ 10.3	三重积分	111
10.3.1	三重积分的定义	111
10.3.2	化为逐次积分	113
10.3.3	柱面坐标与球面坐标代换	117
§ 10.4	重积分的应用	124
10.4.1	几何应用	124
10.4.2	物理应用	128

第十一章 曲线积分与曲面积分	134
§ 11.1 第一型曲线积分	134
11.1.1 定义与性质	134
11.1.2 化为定积分	136
§ 11.2 第二型曲线积分	140
11.2.1 定义与性质	140
11.2.2 化为定积分	142
11.2.3 全微分式的积分	145
11.2.4 Green 公式	149
11.2.5 平面曲线积分与路径无关的条件	154
§ 11.3 第一型曲面积分	159
11.3.1 定义与性质	159
11.3.2 化为二重积分	161
§ 11.4 第二型曲面积分	165
11.4.1 定义与性质	165
11.4.2 化为二重积分	167
§ 11.5 Stokes 公式与 Gauss 公式	171
11.5.1 散度与旋度	172
11.5.2 Stokes 公式	174
11.5.3 Gauss 公式	177
11.5.4 场论概念	181
第十二章 常微分方程	189
§ 12.1 基本概念	189
12.1.1 引例	189
12.1.2 基本概念	192
§ 12.2 初等积分法	195
12.2.1 分离变量法	195
12.2.2 一阶线性方程	198
12.2.3 全微分方程	201
12.2.4 解高阶方程的降阶法	203
§ 12.3 线性微分方程	209

12.3.1	解的结构	209
12.3.2	二阶线性方程	212
12.3.3	幂级数解法	215
§ 12.4	常系数线性微分方程	218
12.4.1	齐次方程	218
12.4.2	非齐次方程	222
12.4.3	Euler 方程	226
§ 12.5	微分方程组	230
12.5.1	常系数线性微分方程组	230
12.5.2	对称型微分方程组	233
习题答案	237
人名索引	246
名词索引	247

上册 简 目

记号与约定	XI
第一章 函数		
§ 1.1	变量与函数	1
§ 1.2	函数的运算·初等函数	12
第二章 极限与连续性	21
§ 2.1	数列的极限	21
§ 2.2	函数的极限	36
§ 2.3	无穷小量与无穷大量	47
§ 2.4	函数的连续性	56
第三章 导数与微分	68
§ 3.1	导数概念	68
§ 3.2	导数的计算	75
§ 3.3	微分	84

§ 3.4 隐函数及用参数表示的函数的微分法	90
§ 3.5 高阶导数	96
第四章 微分中值定理·应用	103
§ 4.1 微分中值定理	103
§ 4.2 L'Hospital 法则	110
§ 4.3 Taylor 公式	118
§ 4.4 函数的单调性与凸性	129
§ 4.5 极值问题	141
第五章 不定积分	148
§ 5.1 不定积分概念	148
§ 5.2 基本积分法	151
§ 5.3 几类初等函数的积分	164
第六章 定积分	175
§ 6.1 定积分的定义与性质	175
§ 6.2 定积分的计算	183
§ 6.3 广义积分	195
§ 6.4 定积分的应用	205
§ 6.5 定积分的近似计算	216
第七章 无穷级数	220
§ 7.1 数项级数	220
§ 7.2 函数项级数	235
§ 7.3 幂级数	241
§ 7.4 Fourier 级数	255
习题答案	270
人名索引	281
名词索引	282

第八章 向量代数与空间解析几何

本书上册所介绍的“一元函数微积分学”，是建立在平面解析几何的基础上的。本书下册转向“多元函数微积分学”的讨论，为此，空间解析几何的知识是不可缺少的。鉴于向量用于表达几何与分析概念都具有特殊的便利，而且已成为现代科学中的通用工具，本章着重介绍向量代数的基本内容，并且将其应用于空间解析几何问题的研究。

§ 8.1 空间直角坐标系

空间解析几何的出发点，是建立空间中的点与三元有序数组之间的联系，这要通过引进空间直角坐标系来实现。

在空间中取定一点 O ，过 O 作三条互相垂直的数轴： x 轴（横轴）、 y 轴（纵轴）与 z 轴（竖轴），它们统称为坐标轴，且均以 O 为原点。规定三坐标轴的正向构成右手系，如图 8-1 所示。这样得到一空间直角坐标系，记作 $Oxyz$ ，其中 O 是坐标原点（或就叫原点）。

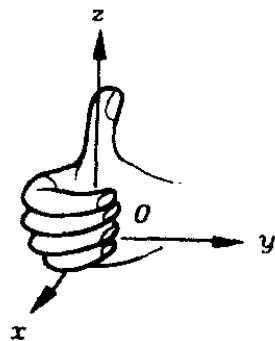


图 8-1

以下总假定已取定空间直角坐标系 $Oxyz$ 。

由 x 轴、 y 轴确定的平面称为 xy 坐标平面，简称 xy 平面； yz 平面与 xz 平面的意义仿此。三坐标平面两两互相垂直，且将空间分成八个部分，每个部分称为卦限。位于 xy 平面上的一、二、三、四象限上方（假定 z 轴朝上）的四个卦限依次称为 I, II, III, IV 卦

限,与之相对的 xy 平面下方的四个卦限依次称为 V, VI, VII, VIII 卦限.

任给空间中一点 M ,过 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、 y 轴与 z 轴,它们与 x 轴、 y 轴、 z 轴的交点依次为 A, B, C (图 8-2),这三点在各坐标轴上的坐标分别为 x, y, z . 这样,点 M 唯一确定一三元有序数组 (x, y, z) ,称之为点 M 在坐标系 $Oxyz$ 中的坐标,依次称 x, y, z 为 M 的横标、纵标与竖标.

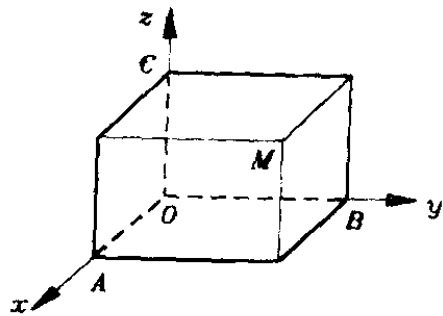


图 8-2

将点 M 记为 $M(x, y, z)$,或简写为 (x, y, z) . 反之,任给一有序数组 (x, y, z) ,在 x 轴、 y 轴与 z 轴上分别取点 A, B, C ,使其坐标分别为 x, y, z ,然后通过 A, B, C 分别作 x 轴、 y 轴、 z 轴的垂直平面,这三个平面的交点 M 就是以 (x, y, z) 为其坐标的唯一的点. 这样,就建立了空间的点与三元有序数组之间的一一对应关系.

坐标面与坐标轴上的点,其坐标各有一定特征. 例如, xy 平面上的点的坐标形如 $(x, y, 0)$; x 轴上的点的坐标形如 $(x, 0, 0)$. 原点的坐标为 $(0, 0, 0)$.

给定点 $M(x, y, z)$, M 关于 xy 平面的对称点有坐标 $(x, y, -z)$; M 关于 x 轴的对称点有坐标 $(x, -y, -z)$; M 关于原点的对称点有坐标 $(-x, -y, -z)$. M 在 xy 平面上的投影为点 $(x, y, 0)$,在 x 轴上的投影为点 $(x, 0, 0)$ (一点在一平面(直线)上的投影是由该点向该平面(直线)所引垂线之垂足). 其余情况类推.

给定两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2, z_2)$,以 d 记此两点之间的距离,即 $d = |M_1M_2|$,今推出 d 的计算公式. 过 M_1, M_2 各作三个分别垂直于三坐标轴的平面,这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 8-3). 分别对直

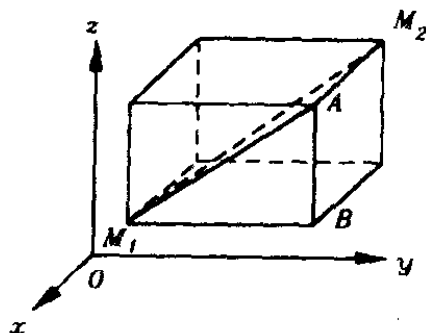


图 8-3

角三角形 M_1AM_2 与 M_1BA 用勾股定理得

$$d^2 = |AM_2|^2 + |M_1A|^2 = |AM_2|^2 + |M_1B|^2 + |BA|^2.$$

因 $|AM_2| = |x_2 - x_1|$, $|M_1B| = |y_2 - y_1|$, $|BA| = |z_2 - z_1|$,
故得

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (1)$$

特别, 点 $M(x, y, z)$ 与原点 $O(0, 0, 0)$ 之间的距离为

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2)$$

例 1 试证以点 $A(4, 1, 9)$, $B(10, -1, 6)$ 与 $C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形为等腰直角三角形.

证 依公式(1)有

$$|AB|^2 = (10 - 4)^2 + (-1 - 1)^2 + (6 - 9)^2 = 49;$$

$$|BC|^2 = (2 - 10)^2 + (4 + 1)^2 + (3 - 6)^2 = 98;$$

$$|CA|^2 = (4 - 2)^2 + (1 - 4)^2 + (9 - 3)^2 = 49.$$

可见 $|AB| = |CA|$, $|AB|^2 + |CA|^2 = |BC|^2$, 这表明 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

例 2 在 xy 平面上求一点 M , 使 M 与点 $A(1, 2, 1)$, $B(2, 2, 0)$, $C(1, 3, 0)$ 的距离相等.

解 设 M 的坐标为 $(x, y, 0)$, 则等式 $|MA| = |MB| = |MC|$ 相当于

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 1 &= (x - 2)^2 + (y - 2)^2 \\ &= (x - 1)^2 + (y - 3)^2. \end{aligned}$$

由此解出 $x = 1, y = 2$, 故所求点为 $M(1, 2, 0)$.

习 题 8.1

1. 求点 $M(3, -4, 5)$ 关于各坐标面的对称点的坐标.
2. 求点 $M(3, -4, 5)$ 关于各坐标轴的对称点的坐标.
3. 求点 $A(4, -3, 5)$ 到坐标原点及各坐标轴的距离.
4. 在 z 轴上求一点, 使它到点 $M(-4, 1, 7)$ 和 $N(3, 5, -2)$ 的距离相等.

5. 在 yz 面上求一点,使它到点 $A(3,1,2)$, $B(4, -2, -2)$ 和 $C(0,5,1)$ 的距离相等.

§ 8.2 矢量及其线性运算

8.2.1 矢量概念

我们熟知的力、速度、电场强度等物理量不仅有大小,而且有方向.这种“有方向的量”广泛出现在各个领域,其重要性并不亚于数量.这种量无论其具体特性如何,都可用有向线段来表示,于是作以下定义:

定义 1 对空间中任意两点 A, B ,称从 A 到 B 的有向线段为一个矢量,记作 \overrightarrow{AB} ,或记为单个黑体字母 a .称线段 AB 的长度为矢量 \overrightarrow{AB} 的模,记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|a|$.若矢量 a 的模为零,则称 a 为零矢量,记作 0 .称矢量 \overrightarrow{BA} 为矢量 \overrightarrow{AB} 的负矢量,写作 $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

在图示上,用箭头指出矢量的方向.可以认为零矢量的方向是任意的.

给定矢量 a, b ,若 a 经平行移动后可与 b 重合(即起点与起点重合,终点与终点重合),则规定 $a=b$.在这个意义上,矢量并无固定的起点,因此称为自由矢量.

任给矢量 a ,必有唯一的点 M ,使得 $a = \overrightarrow{OM}$ (O 是坐标原点).反之,任给空间中一点 M , M 确定唯一矢量 \overrightarrow{OM} ,称为点 M 的矢径,记作 r_M .这样,通过点 M 与矢量 r_M 的对应,得到空间中点的全体与矢量的全体之间的一一对应.下面将看到,这种对应对于矢量的研究与应用至关重要.

给定矢量 a, b ,设 $a = r_A, b = r_B$,若 O, A, B 三点共线,则说矢量 a 与 b 共线(或平行),且当 A, B 在点 O 之同侧时,说 a 与 b 同向;当 A, B 在点 O 之异侧时,说 a 与 b 反向.注意零矢量与任何矢量共线.

8.2.2 矢量的线性运算

力或速度的合成是依“平行四边形法则”施行的,矢量的加法是这类合成的一种抽象.

定义 2 给定矢量 a, b , 设 $a = r_A, b = r_B$. 若 a 与 b 不共线, 则以 OA, OB 为邻边作平行四边形 $OACB$ (图 8-4), 称矢量 r_C 为矢量 a 与 b 的和, 记作 $a+b$. 若 a 与 b 共线且同向, 则规定 $c = a+b$ 是一个与 a, b 同向的矢量, 且 $|c| = |a| + |b|$; 若 a 与 b 反向且 $|a| \geq |b|$, 则规定 $c = a+b$ 是一个与 a 同向的矢量且 $|c| = |a| - |b|$.

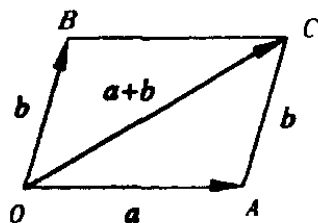


图 8-4

不难理解, 如上定义的 $a+b$ 与原点 O 的选取无关. 从图 8-4 看出, $\vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}$. 这个等式表达了求矢量和的“三角形法则”, 它可进一步推广为如下的“多边形法则”(图 8-5):

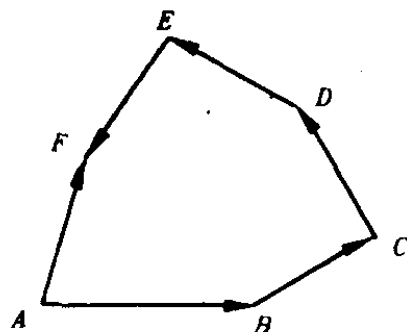


图 8-5

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \dots + \vec{EF} = \vec{AF} \quad (1)$$

容易验证, 矢量加法有以下性质:

- (i) 交换律: $a+b=b+a$
- (ii) 结合律: $(a+b)+c=a+(b+c)$
- (iii) 零矢量的作用: $a+0=a$
- (iv) 负矢量的作用: $a+(-a)=0$

图 8-6 说明了结合律的正确性.

任给矢量 a, b , 约定 $a-b = a+(-b)$, 称 $a-b$ 为 a 与 b 之差. 显然 $c = a-b \Leftrightarrow a = b+c$, 由此得出 $a-b$ 的几何意义 (如图 8-7 所示).

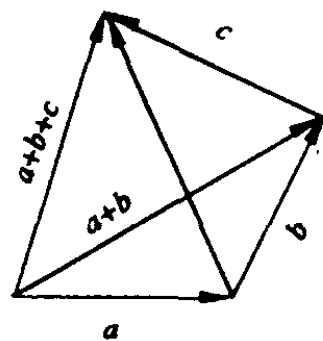


图 8-6

定义 3 给定向量 a 与数量 λ , 规定 λ 与 a 的乘积为一向量, 记作 λa , 其模为 $|\lambda| |a|$; 当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 同向; 当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 反向.

称如上定义的运算为数量与向量的乘法, 或简称为向量的数乘. 向量的加法与数乘合称为向量的线性运算.

容易验证, 向量的数乘有以下性质:

(v) 结合律: $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a) = \mu(\lambda a)$.

(vi) 分配律: $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$; $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$.

(vii) $1a = a$; $(-1)a = -a$; $0a = 0$.

分配律 $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ 的正确性可由图 8-8 看出.

称模为 1 的向量为单位向量. 任给非零向量 a , 以 a° 记与 a 同向的单位向量. 显然

$$a = |a| a^\circ \text{ 或 } a^\circ = a / |a| \quad (2)$$

通常以 a° 表示 a 的方向.

向量的线性运算可用来解某些几何问题, 试看一个简单例子.

例 1 设 $ABCD$ 是一空间四边形, 四边中点依次为 E, F, G, H (图 8-9), 证明四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

证 只需证边 EF 与 HG 平行且相等, 这相当于证 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$. 由定义 3 及题设条件有 $\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$, 于是

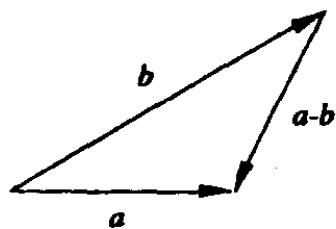


图 8-7

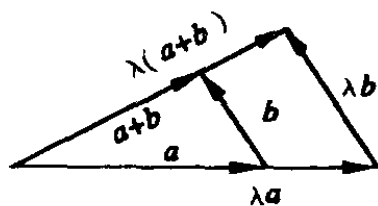


图 8-8

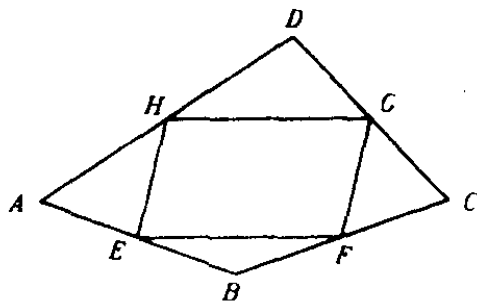


图 8-9

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

同理 $\overrightarrow{HG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, 因此 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$.

8.2.3 矢量的坐标

前面已经指出, 每个矢量 \mathbf{a} 是某一确定的点 A 的矢径: $\mathbf{a} = \mathbf{r}_A$. 通过对应 $A \rightarrow \mathbf{r}_A$, 可将点的坐标转化为矢量的坐标, 从而得到矢量的坐标表示. 准确说来就是:

定义 4 任给点 $M(x, y, z)$, 设 $\mathbf{a} = \mathbf{r}_M$, 则称 (x, y, z) 为矢量 \mathbf{a} (关于给定坐标系) 的坐标, 记作 $\mathbf{a} = \{x, y, z\}$.

为方便起见, 对任给矢量 \mathbf{a} , 今后以 $\{a_x, a_y, a_z\}$ 记其坐标, 即将定义 4 中的 x, y, z 分别记成 a_x, a_y, a_z . 于是 \mathbf{a} 有坐标表示式

$$\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\} \quad (3)$$

分别以 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 记矢量 $\{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}$ 与 $\{0, 0, 1\}$, 并称之为 (给定坐标系的) **基矢量**, 它们是互相垂直的单位矢量. 基矢量的意义在于: 任一矢量 \mathbf{a} 有唯一分解式:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad (4)$$

式(4)不过是式(3)的另一种写法而已. 图 8-10 说明了式(4)的几何意义.

利用分解式(4)及矢量线性运算的性质(i)~(vii), 容易得出矢量线性运算的以下坐标公式:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \pm \mathbf{b} &= \{a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z\} \\ \lambda \mathbf{a} &= \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\} \end{aligned} \quad (5)$$

公式(5)表明, 矢量的线性运算归结为其坐标的相应运算.

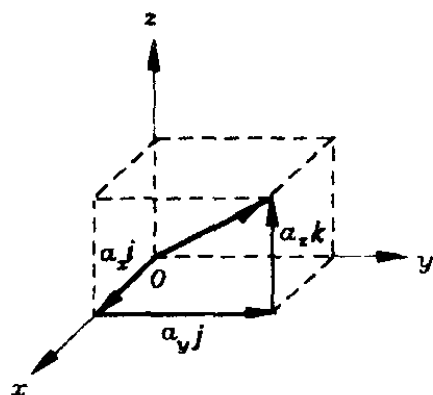


图 8-10

例 2 给定点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 与 $B(x_2, y_2, z_2)$, 求向量 \overrightarrow{AB} 的坐标.

解 首先注意 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$, 然后用公式(5)得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \{x_2, y_2, z_2\} - \{x_1, y_1, z_1\} \\ &= \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}.\end{aligned}$$

例 3 设 A, B 如例 2, 线段 AB 上的点 C 将 AB 分成有定比 $AC/CB = \lambda$ 的两段, 求点 C 的坐标.

解 由定义 4, 只需求向量 \mathbf{r}_C 的坐标. 由 $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{CB}$ 与 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ 解出 $\overrightarrow{CB} = \frac{1}{1+\lambda} \overrightarrow{AB}$. 另一方面, $\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_B - \overrightarrow{CB}$, 于是

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_C &= \mathbf{r}_B - \frac{1}{1+\lambda} \overrightarrow{AB} \\ &= \{x_2, y_2, z_2\} - \left\{ \frac{x_2 - x_1}{1+\lambda}, \frac{y_2 - y_1}{1+\lambda}, \frac{z_2 - z_1}{1+\lambda} \right\} \\ &= \left\{ \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \right\}.\end{aligned}$$

所得的 \mathbf{r}_C 的坐标也就是点 C 的坐标.

利用数乘与矢量的坐标, 可对“共线”这一几何关系给出一种代数刻画.

定理 1 设 \mathbf{a}, \mathbf{b} 是两个非零矢量, 则 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 共线 \Leftrightarrow 存在实数 λ 使 $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b} \Leftrightarrow a_x/b_x = a_y/b_y = a_z/b_z$.

证 若 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 共线, 则 $\mathbf{a}^\circ = \pm \mathbf{b}^\circ$ (同向时取正号, 反向时取负号), 于是由式(2)有

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \mathbf{a}^\circ = \pm |\mathbf{a}| \mathbf{b}^\circ = \pm (|\mathbf{a}|/|\mathbf{b}|) \mathbf{b} = \lambda \mathbf{b},$$

其中 $\lambda = \pm |\mathbf{a}|/|\mathbf{b}|$. 反之, 若 $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$, 则直接由定义 3 看出 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 共线. 其次, 借助于公式(5)易见 $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b} \Leftrightarrow a_x/b_x = a_y/b_y = a_z/b_z = \lambda$. \square

若 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OM} = \{a_x, a_y, a_z\}$, 则由 § 8.1 公式(2)有

$$|\mathbf{a}| = |OM| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (6)$$

若 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, 则 \mathbf{a} 的方向完全决定于 \mathbf{a} 与三坐标轴的夹角之余弦 $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ (约定 $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$), 称他们为矢量 \mathbf{a} 的方向余弦.