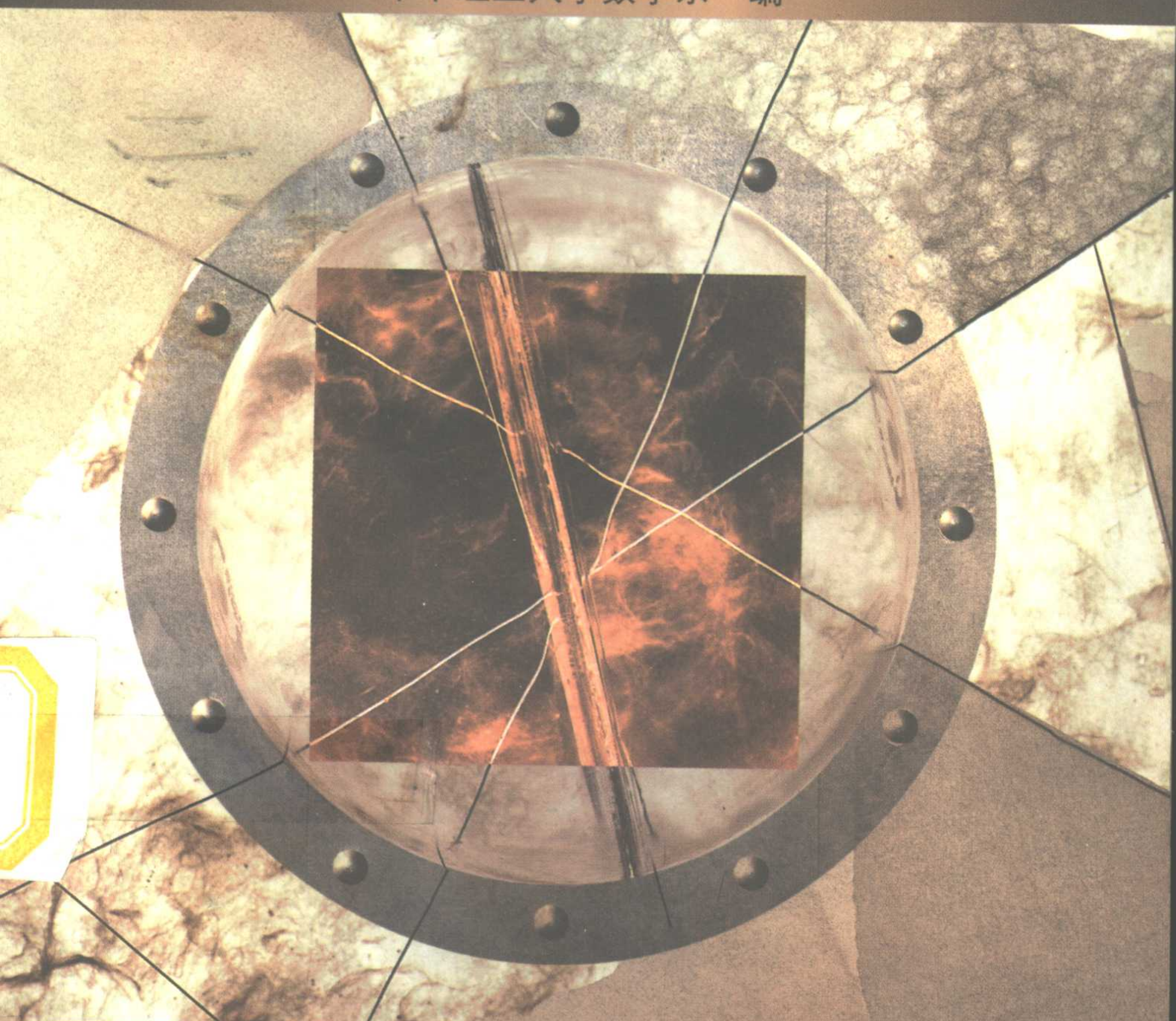
高等数学

（下册）

华中理工大学数学系　编



高等教育出版社

高 等 数 学

（下册）

华中理工大学数学系 编

高等教育出版社

(京)112 号

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 下册/华中理工大学数学系编. – 北京:高等教育出版社,1997

ISBN 7-04-006401-4

Ⅰ.高… Ⅱ.华… Ⅲ.高等数学 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 26877 号

*

高等教育出版社出版

北京沙滩后街 55 号

邮政编码:100009 传真:64014048 电话:64054588

高等教育出版社发行

国防工业出版社印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 8.125 字数 210 000

1997 年 12 月第 1 版 1997 年 12 月第 1 次印刷

印数 0 001—15 195

定价 8.20 元

责任编辑　徐　可
封面设计　李卫青
责任印制　宋克学

目　　录

上 册 简 目

第八章 矢量代数与空间解析几何

本书上册所介绍的“一元函数微积分学”，是建立在平面解析几何的基础上的.本书下册转向“多元函数微积分学”的讨论，为此，空间解析几何的知识是不可缺少的.鉴于矢量用于表达几何与分析概念都具有特殊的便利，而且已成为现代科学中的通用工具，本章着重介绍矢量代数的基本内容，并且将其应用于空间解析几何问题的研究.

§8.1 空间直角坐标系

空间解析几何的出发点，是建立空间中的点与三元有序数组之间的联系，这要通过引进空间直角坐标系来实现.

在空间中取定一点 O，过 O 作三条互相垂直的数轴：x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)与 z 轴(竖轴)，它们统称为坐标轴，且均以 O 为原点.规定三坐标轴的正向构成**右手系**，如图 8-1 所示.这样得到一空间直角坐标系，记作 $Oxyz$，其中 O 是坐标原点(或就叫原点).

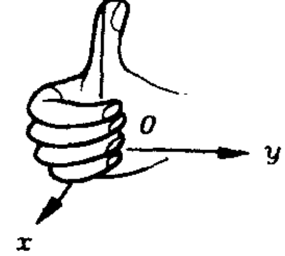


图 8-1

以下总假定已取定空间直角坐标系 $Oxyz$.

由 x 轴、y 轴确定的平面称为 xy 坐标平面，简称 xy 平面；yz 平面与 zx 平面的意义仿此.三坐标平面两两互相垂直，且将空间分成八个部分，每个部分称为**卦限**.位于 xy 平面上的一、二、三、四象限上方(假定 z 轴朝上)的四个卦限依次称为Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ卦

限，与之相对的 xy 平面下方的四个卦限依次称为Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ卦限.

任给空间中一点 M，过 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴与 z 轴，它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 A,B,C（图 8-2），这三点在各坐标轴上的坐标分别为 x,y,z. 这样，点 M 唯一确定一三元有序数组 (x,y,z)，称之为点 M 在坐标系 $Oxyz$ 中的坐标，依次称 x,y,z 为 M 的横标、纵标与竖标. 将点 M 记为 $M(x,y,z)$，或简写为 (x,y,z). 反之，任给一有序数组 (x,y,z)，在 x 轴、y 轴与 z 轴上分别取点 A,B,C，使其坐标分别为 x,y,z，然后通过 A,B,C 分别作 x 轴、y 轴、z 轴的垂直平面，这三个平面的交点 M 就是以 (x,y,z) 为其坐标的唯一的点. 这样，就建立了空间的点与三元有序数组之间的一一对应关系.

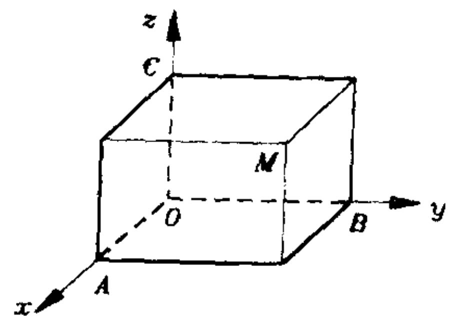


图 8-2

坐标面与坐标轴上的点，其坐标各有一定特征. 例如，xy 平面上的点的坐标形如 $(x,y,0)$；x 轴上的点的坐标形如 $(x,0,0)$. 原点的坐标为 $(0,0,0)$.

给定点 $M(x,y,z)$，M 关于 xy 平面的对称点有坐标 $(x,y,-z)$；M 关于 x 轴的对称点有坐标 $(x,-y,-z)$；M 关于原点的对称点有坐标 $(-x,-y,-z)$. M 在 xy 平面上的投影为点 $(x,y,0)$，在 x 轴上的投影为点 $(x,0,0)$（一点在一平面（直线）上的投影是由该点向该平面（直线）所引垂线之垂足）. 其余情况类推.

给定两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，以 d 记此两点之间的距离，即 $d=|M_1M_2|$，今推出 d 的计算公式. 过 M_1,M_2 各作三个分别垂直于三坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体（图 8-3）. 分别对直

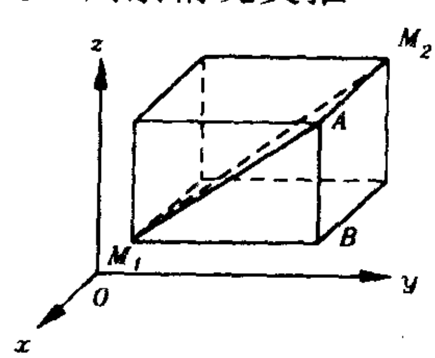


图 8-3

角三角形 M_1AM_2 与 M_1BA 用勾股定理得

$$d^2 = |AM_2|^2 + |M_1A|^2 = |AM_2|^2 + |M_1B|^2 + |BA|^2.$$

因 $|AM_2| = |x_2 - x_1|$, $|M_1B| = |y_2 - y_1|$, $|BA| = |z_2 - z_1|$, 故得

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \tag{1}$$

特别，点 $M(x,y,z)$ 与原点 $O(0,0,0)$ 之间的距离为

$$d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{2}$$

例 1 试证以点 $A(4,1,9)$, $B(10,-1,6)$ 与 $C(2,4,3)$ 为顶点的三角形为等腰直角三角形.

证 依公式(1)有

$$|AB|^2 = (10-4)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2 = 49;$$
$$|BC|^2 = (2-10)^2 + (4+1)^2 + (3-6)^2 = 98;$$
$$|CA|^2 = (4-2)^2 + (1-4)^2 + (9-3)^2 = 49.$$

可见 $|AB| = |CA|$, $|AB|^2 + |CA|^2 = |BC|^2$, 这表明 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

例 2 在 xy 平面上求一点 M, 使 M 与点 $A(1,2,1)$, $B(2,2,0)$, $C(1,3,0)$ 的距离相等.

解 设 M 的坐标为 $(x,y,0)$, 则等式 $|MA| = |MB| = |MC|$ 相当于

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + 1 = (x-2)^2 + (y-2)^2 = (x-1)^2 + (y-3)^2.$$

由此解出 $x = 1, y = 2$, 故所求点为 $M(1,2,0)$.

习 题 8.1

1. 求点 $M(3,-4,5)$ 关于各坐标面的对称点的坐标.
2. 求点 $M(3,-4,5)$ 关于各坐标轴的对称点的坐标.
3. 求点 $A(4,-3,5)$ 到坐标原点及各坐标轴的距离.
4. 在 z 轴上求一点，使它到点 $M(-4,1,7)$ 和 $N(3,5,-2)$ 的距离相等.

5. 在 yz 面上求一点，使它到点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 的距离相等.

§8.2 矢量及其线性运算

8.2.1 矢量概念

我们熟知的力、速度、电场强度等物理量不仅有大小，而且有方向. 这种"有方向的量"广泛出现在各个领域，其重要性并不亚于数量. 这种量无论其具体特性如何，都可用有向线段来表示，于是作以下定义：

定义 1 对空间中任意两点 A,B，称从 A 到 B 的有向线段为一个矢量，记作 $\overrightarrow{AB}$，或记为单个黑体字母 $\boldsymbol{a}$. 称线段 AB 的长度为矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的**模**，记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\boldsymbol{a}|$. 若矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模为零，则称 $\boldsymbol{a}$ 为零矢量，记作 $\mathbf{0}$. 称矢量 $\overrightarrow{BA}$ 为矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的负矢量，写作 $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

在图示上，用箭头指出矢量的方向. 可以认为零矢量的方向是任意的.

给定矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，若 $\boldsymbol{a}$ 经平行移动后可与 $\boldsymbol{b}$ 重合（即起点与起点重合，终点与终点重合），则规定 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 在这个意义上，矢量并无固定的起点，因此称为自由矢量.

任给矢量 $\boldsymbol{a}$，必有唯一的点 M，使得 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$（$O$ 是坐标原点）. 反之，任给空间中一点 M，M 确定唯一矢量 $\overrightarrow{OM}$，称为点 M 的**矢径**，记作 $\boldsymbol{r}_M$. 这样，通过点 M 与矢量 $\boldsymbol{r}_M$ 的对应，得到空间中点的全体与矢量的全体之间的一一对应. 下面将看到，这种对应对于矢量的研究与应用至关重要.

给定矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}_A$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{r}_B$，若 O,A,B 三点共线，则说矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **共线**（或平行），且当 A,B 在点 O 之同侧时，说 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向；当 A,B 在点 O 之异侧时，说 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向. 注意零矢量与任何矢量共线.

8.2.2　矢量的线性运算

力或速度的合成是依“平行四边形法则”施行的，矢量的加法是这类合成的一种抽象.

定义 2　给定矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}_A,\boldsymbol{b}=\boldsymbol{r}_B$. 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，则以 OA,OB 为邻边作平行四边形 $OACB$（图 8-4），称矢量 $\boldsymbol{r}_C$ 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线且同向，则规定 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 是一个与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向的矢量，且 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$；若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向且 $|\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{b}|$，则规定 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 是一个与 $\boldsymbol{a}$ 同向的矢量且 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$.

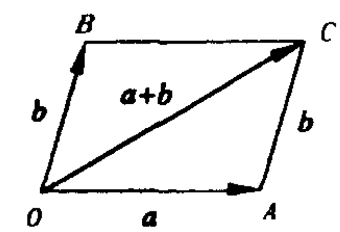


图 8-4

不难理解，如上定义的 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与原点 O 的选取无关. 从图 8-4 看出，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$. 这个等式表达了求矢量和的“三角形法则”，它可进一步推广为如下的“多边形法则”（图 8-5）：

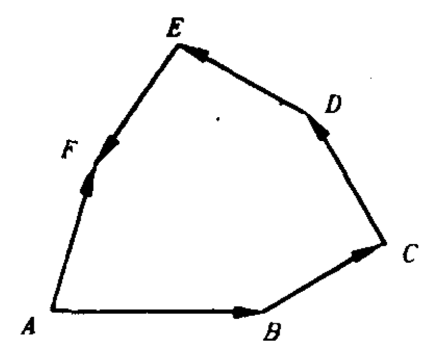


图 8-5

$$\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\cdots+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}}\quad(1)$$

容易验证，矢量加法有以下性质：

(i) 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

(ii) 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

(iii) 零矢量的作用：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$

(iv) 负矢量的作用：$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$

图 8-6 说明了结合律的正确性.

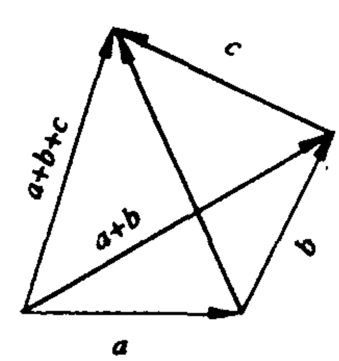


图 8-6

任给矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，约定 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，称 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差. 显然 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，由此得出 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的几何意义（如图 8-7 所示）.

定义 3　给定矢量 $\boldsymbol{a}$ 与数量 λ，规定 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的乘积为一矢量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，其模为 $|\lambda||\boldsymbol{a}|$；当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，λa 与 a 反向.

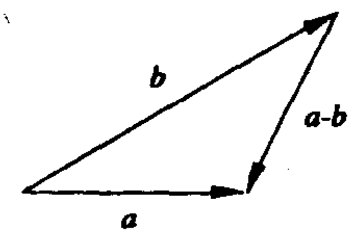


图 8-7

称如上定义的运算为数量与矢量的乘法，或简称为**矢量的数乘**. 矢量的加法与数乘合称为矢量的**线性运算**.

容易验证，矢量的数乘有以下性质：

(v) 结合律：$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$.

(vi) 分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

(vii) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$；$0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

分配律 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 的正确性可由图 8-8 看出.

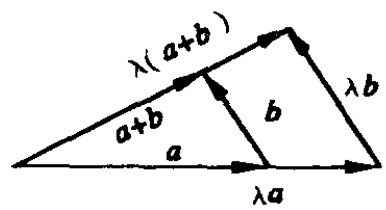


图 8-8

称模为 1 的矢量为**单位矢量**. 任给非零矢量 $\boldsymbol{a}$，以 $\boldsymbol{a}^{\circ}$记与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位矢量. 显然

$$\boxed{\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ}\ \text{或}\ \boldsymbol{a}^{\circ}=\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|}\tag{2}$$

通常以 $\boldsymbol{a}^{\circ}$表示 $\boldsymbol{a}$ 的方向.

矢量的线性运算可用来解某些几何问题，试看一个简单例子.

例 1　设 $ABCD$ 是一空间四边形，四边中点依次为 E,F,G,H（图 8-9），证明四边形 $EFGH$ 为平行四边形.

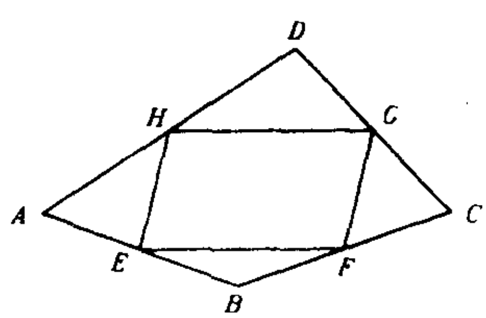


图 8-9

证　只需证边 EF 与 HG 平行且相等，这相当于证 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$. 由定义 3 及题设条件有 $\overrightarrow{EB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，于是

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

同理 $\overrightarrow{HG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,因此$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$.

8.2.3 矢量的坐标

前面已经指出,每个矢量 $\boldsymbol{a}$ 是某一确定的点 A 的矢径:$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}_A$. 通过对应 $A\to\boldsymbol{r}_A$,可将点的坐标转化为矢量的坐标,从而得到矢量的坐标表示. 准确说来就是:

定义 4 任给点 $M(x,y,z)$,设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}_M$,则称$(x,y,z)$为矢量 $\boldsymbol{a}$(关于给定坐标系)的坐标,记作 $\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$.

为方便起见,对任给矢量 $\boldsymbol{a}$,今后以$\{a_x,a_y,a_z\}$记其坐标,即将定义 4 中的 x,y,z 分别记成 a_x,a_y,a_z. 于是 $\boldsymbol{a}$ 有坐标表示式

$$\boxed{\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}} \tag{3}$$

分别以 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 记矢量$\{1,0,0\}$,$\{0,1,0\}$与$\{0,0,1\}$,并称之为(给定坐标系的)**基矢量**,它们是互相垂直的单位矢量. 基矢量的意义在于:任一矢量 $\boldsymbol{a}$ 有唯一分解式:

$$\boxed{\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}} \tag{4}$$

式(4)不过是式(3)的另一种写法而已. 图 8-10 说明了式(4)的几何意义.

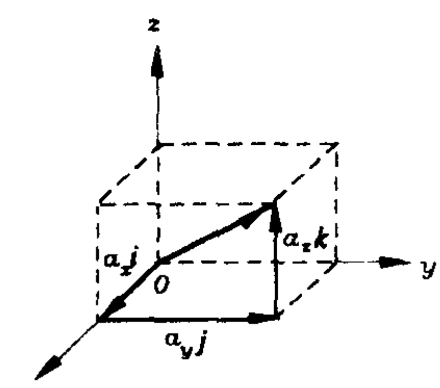


图 8-10

利用分解式(4)及矢量线性运算的性质(i)~(vii),容易得出矢量线性运算的以下坐标公式:

$$\boxed{\begin{gathered}\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{a_x\pm b_x,a_x\pm b_y,a_z\pm b_z\}\\ \lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}\end{gathered}} \tag{5}$$

公式(5)表明,矢量的线性运算归结为其坐标的相应运算.

例 2　给定点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 与 $B(x_2,y_2,z_2)$，求矢量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标.

解　首先注意 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A$，然后用公式(5)得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\{x_2,y_2,z_2\}-\{x_1,y_1,z_1\}\\&=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}.\end{aligned}$$

例 3　设 A,B 如例 2，线段 AB 上的点 C 将 AB 分成有定比 $AC/CB=\lambda$ 的两段，求点 C 的坐标.

解　由定义 4，只需求矢量 $\boldsymbol{r}_C$ 的坐标. 由 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$ 与 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$ 解出 $\overrightarrow{CB}=\dfrac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{AB}$. 另一方面，$\boldsymbol{r}_C=\boldsymbol{r}_B-\overrightarrow{CB}$，于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_C&=\boldsymbol{r}_B-\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{AB}\\&=\{x_2,y_2,z_2\}-\left\{\frac{x_2-x_1}{1+\lambda},\frac{y_2-y_1}{1+\lambda},\frac{z_2-z_1}{1+\lambda}\right\}\\&=\left\{\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right\}.\end{aligned}$$

所得的 $\boldsymbol{r}_C$ 的坐标也就是点 C 的坐标.

利用数乘与矢量的坐标，可对“共线”这一几何关系给出一种代数刻画.

定理 1　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个非零矢量，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线 $\Leftrightarrow$ 存在实数 λ 使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_x/b_x=a_y/b_y=a_z/b_z$.

证　若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，则 $\boldsymbol{a}^\circ=\pm\boldsymbol{b}^\circ$（同向时取正号，反向时取负号），于是由式(2)有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^\circ=\pm|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}^\circ=\pm(|\boldsymbol{a}|/|\boldsymbol{b}|)\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{b},$$

其中 $\lambda=\pm|\boldsymbol{a}|/|\boldsymbol{b}|$. 反之，若 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，则直接由定义 3 看出 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线. 其次，借助于公式(5)易见 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_x/b_x=a_y/b_y=a_z/b_z=\lambda$. □

若 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=\{a_x,a_y,a_z\}$，则由 §8.1 公式(2)有

$$|\boldsymbol{a}|=|OM|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\,. \tag{6}$$

若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}$ 的方向完全决定于 $\boldsymbol{a}$ 与三坐标轴的夹角之余弦 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$（约定 $0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi$），称他们为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**.