

应用题一题多解

黄 璋编著

YINGYONGTI
YITI DUOJIE

同济大学出版社

应用题一题多解

黄 璋 编著

内 容 提 要

本书配合中学的代数教材,介绍解应用题的思路和方法,具体地说明题给条件的正确运用,提出了列方程的关键和注意点。书中列举了大量典型的例题,每一例题均有多种解法,且附有解法讨论。书中的习题均附有答案。本书可作为中学学生和自学青年的辅导读物,也可供数学教师参考。

责任编辑 解明芳

封面设计 王肖生

应用题一题多解

黄 璋 编著

同济大学出版社出版

(上海四平路1239号)

新华书店上海发行所发行

解放日报印刷厂印刷

开本: 787×1092 , $1/32$ 印张: 9 字数: 229 千字

1985年5月第1版 1985年5月第1次印刷

印数: 1—150,000册 定价: 1.55元

统一书号: 7335·002 定价: 1.55元

前 言

列方程解应用题，是中学代数教学中的重点和难点。为了帮助学生提高审题、分析和推理能力，掌握解题的思路和方法，提高解题的能力和技巧，作者将廿余年来在教学中所积累的资料及体会，整理成这本小册子。

本书详细地阐述了如何审题、分析、设立未知数及其三者间的联系，着重说明列方程的关键和注意点，特别是列方程时，对题中所给条件的正确运用进行了具体而详细的讨论。并列举了大量的典型例题（又指出如何转化类型，以求融会贯通）。现把它们分为十类，以便学习。

例题的解，既有一般解法，又有特殊解法。最多的解法有十几种。列出的方程和方程组有百余个。这样，可使读者打开思路，开阔眼界，以收举一反三，灵活解题之效。每一种解法后附有解法讨论，使读者明辨所列方程或方程组的正误与繁简，从而学会正确的简捷的解题方法。

同一例题的解，既可列出一元一次、一元二次的整式方程、分式方程和繁分式方程，又可列出二元一次、三元一次和三元二次方程组。所以，一个应用题就可在中学的各个阶段来学习，从而温故知新，达到反复巩固的目的。

书末附有习题答案，以便读者自行核对。

本书可作为初中各年级学生和自学青年的辅导读物，又可供青年教师教学参考，也适用于数学学科小组和数学讲座。

由于作者的水平所限，书中的不足或错误在所难免。尚希读者批评指正。

黄 璋

1984.12.25

目 录

一、怎样审题.....	1
二、怎样分析.....	3
三、怎样设立未知数.....	10
四、审题、分析、设立未知数三者间的关系.....	15
五、列方程时应注意些什么.....	20
六、关于列方程解应用题的几点意见.....	25
七、分类例题.....	27
(一) 有关数的问题.....	28
一般数的关系问题.....	28
练习一.....	32
用数字组成数的问题.....	33
练习二.....	37
(二) 盈不足问题.....	38
练习三.....	41
(三) 工程问题.....	42
练习四.....	63
(四) 行程问题.....	66
练习五.....	190
(五) 流水(或风)中航行问题.....	196
练习六.....	219
(六) 车轮问题.....	220
练习七.....	224
(七) 混合物问题.....	224

练习八	238
(八) 超额生产问题	240
练习九	252
(九) 有关几何图形问题	254
练习十	265
(十) 杂题	267
练习十一	273
答案	275

列方程解应用题的必要步骤是：(1)设定未知数；(2)列出方程；(3)解方程；(4)确定题目的合理答案。

这四个步骤中，学生感到最困难的是“列出方程”这一步。本书就这个问题从几方面来谈谈。

一、怎样审题

列方程解应用题，首先要正确地理解题目中有关的名词、数学术语和某些语句的意思，弄清哪些是已知条件，哪些是未知条件。也就是正确地理解题目的意思。这就是通常所说的审题。

初学者由于不重视审题或者没有仔细地审题，因此往往审错题意或曲解了题意，从而列出错误的方程。事实上，没有细致的审题，就不可能进行正确的分析，所以说，审题是分析的基础。读者必须重视这个步骤。

那么，怎样审题才好呢？下面先通过一个实例来谈谈：

例 甲乙两列车，分别从相距 300 公里的 A、B 两站，同时相向出发，相遇后，甲车再经 4 小时到达 B 站，乙车再经 9 小时到达 A 站。求甲乙各车的速度。

从“甲乙两列车，……相向出发”这一句，我们不仅知道，两站间的距离是 300 公里，还应细察其中每一词句的含义：

(1) “甲乙两列车，分别从……A、B 两站”，意即，甲车从 A 站、乙车从 B 站出发。知道了出发点，还应注意到达地点，以便计算行程。

(2) “相向出发”，除说明两列车相向行驶外，还意味着，

相遇时甲、乙两列车共行了全程 300 公里，（这是一个重要的等量关系。）还应注意，相遇以后各列车行驶的方向。

（3）“同时出发”，除了说明两列车同一时间出发外，还意味着，甲、乙两列车所行的时间要进行比较的。

从“相遇后，……乙车到达 A 站”不仅知道，相遇后，甲车行 4 小时，乙车行 9 小时，还应这样来理解：

① “同时出发而相遇”，意味着，相遇时甲、乙两列车所行的时间相等。（这是一个很重要的等量关系，但却是隐蔽的，分析问题时要抓住这个关系。）

② “相遇后，甲车再经 4 小时到达 B 站”，从这一句话中，除了已知甲车行驶了 4 小时外，还应想到：（a）甲车从 A 站到 B 站共行了几小时？共行了多少距离？（b）这 4 小时的行程，就是相遇时乙车的行程。

同样，从“相遇后，乙车再经 9 小时到达 A 站”这一句中，我们除了知道，乙车在相遇后又行了 9 小时外，还应想到：（a）乙车从 B 站到 A 站共行了几小时？共行了多少距离？（b）这 9 小时的行程，就是甲车在相遇时的行程。

③ 相遇后，甲乙两列车是相背而行的。因此，当两列车分别到达 B、A 两站时，又共行了 300 公里。

④ 在相遇前、后，甲、乙两列车的速度不变。[这条件，粗看起来，是没有用的，但是，可以根据相遇前甲车的速度 = 相遇后甲车的速度，这个等量关系来列方程。（见 143 页本题的解）。只有这样，列方程找等量关系的思路才能开阔。]

小结：审题的要求是，正确地、透彻地和全面地理解题目中的条件和有关名词，特别是数学术语的含义。

（1）**正确：**不要看错一字一句；不要曲解题意。

（2）**透彻：**要理解问题中条件的实质；注意隐蔽的条件。

（3）**全面：**注意条件间的相互联系；注意名词的多种含义。

为了便于审题，尽可能作出示意图。

二、怎样分析

在正确、透彻、全面地理解题意的基础上进行分析是不难的。

分析的要求，主要是找量与量间的相互关系。

分析的方法，有综合法、分析法两种。

现在先来谈谈综合法。

综合法的推理，是从已知到未知。具体地说，可分为下列三个步骤：

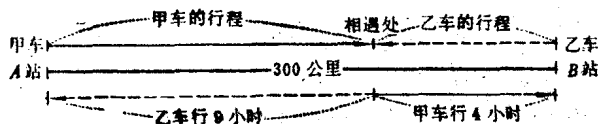
(1) **设未知数** 先把问题中所求的某一个量（如有几个要求的量，可以任选一个量。）用字母 x （也可用其他的字母）来表示。

(2) **写代数式** 根据这个假设的量与其他已知量、未知量的关系，分别用 x 的代数式来表示其他的未知量。

(3) **找出列方程的等量关系** 找出这些代数式所表示的量之间、它们与已知数之间的等量关系。这个等量关系，一般是在写代数式时没有用到过的。然后根据这个等量关系列出方程。

为了便于说明，把前面（p. 1 页）的例作如下分析：

示意图：



分析 1 (综合法)

(1) 题中要求甲、乙各车的速度。

设甲车的速度为 x 公里/时, 则相遇后甲车 4 小时的行程为 $4x$ 公里。这就是在相遇时乙车所行的路程。

(2) 相遇时, 两列车共行 300 公里。

相遇时, 甲车的行程为 $(300 - 4x)$ 公里。这就是, 乙车 9 小时所行的路程。

乙车的速度为 $\frac{300 - 4x}{9}$ 公里/时。

相遇时, 甲车行 $\frac{300 - 4x}{x}$ 小时, 乙车行 $\frac{4x}{\frac{300 - 4x}{9}}$ 小时。

(3) 两列车同时出发

相遇时两列车所行的时间相等。根据这个等量关系, 就可以列出方程

$$\frac{300 - 4x}{x} = \frac{4x}{\frac{300 - 4x}{9}}$$

综合法的优点是, 容易被学生所掌握。但是, 在有些题目中, 宜于用字母来表示的未知量, 是隐藏的, 或不是题中所要求的。因此, 用字母表示了不适于用字母来表示的量, 这样, 往往不易找到量与量间的相互关系, 或列出的方程较繁 (这在第三章里将详细讲)。而且, 对提高学生的逻辑思维能力与培养学生解题的技能是不够的, 这是综合法的缺点。

分析法的特点, 是从未知到已知。具体地说, 先找出题中的等量关系, 再根据等量关系的要求, 逐步进行推理, 直到写出等量关系中所有未知量的代数式, 用字母 x 来表示某一个未知量为止。然后, 就设这个未知量为 x , 把它作为已知量, 根据已进行

过的分析，写出代数式，按先找出的等量关系，列出方程。

把上例再作如下分析：

分析 2 （分析法）

(1) 因为两列车同时出发，所以相遇时，甲车所行的时间 = 乙车所行的时间。

如果相遇时两列车各所行的时间，能用含未知数的代数式来表示，便可得含未知数的等式——方程。

(2) 因为时间 = 距离 ÷ 速度

所以要求相遇时各车所行的时间，必须知道相遇时各列车所行的距离与速度。

(3) 相遇时，乙车所行的距离等于甲车 4 小时的行程。所以如甲车的速度 (x 公里/时) 知道了，则相遇时乙车所行的距离 ($4x$ 公里) 也可知道。

(4) 因为相遇时，两列车共行 300 公里。

所以相遇时，甲车所行的距离也可知道。[(300 - $4x$) 公里] 这就是乙车 9 小时的行程。

那么乙车的速度 ($\frac{300 - 4x}{9}$ 公里/时) 也可用代数式来表示。

(5) 知道了表示“相遇时甲、乙列车所行的距离及甲、乙列车的速度”的代数式，便可用含未知数的代数式，来表示相遇时甲车所行的时间 ($\frac{300 - 4x}{x}$ 小时) 及乙车所行的时间 ($\frac{4x}{\frac{300 - 4x}{9}}$

小时)，所以应设甲车的速度为未知数。

然后根据 (1) 便可得方程

$$\left(\frac{300 - 4x}{x} = \frac{4x}{\frac{300 - 4x}{9}} \right)$$

在上述分析中，抓住了“相遇时，甲车所行的时间等于乙车所行的时间”这个关键，根据“时间 = 距离 ÷ 速度”这个关系式与问题所给定的条件，逐步推理，直到列出方程。

分析 3 （分析法）

(1) 因为两列车同时出发。

所以相遇时，甲车所行的时间 = 乙车所行的时间。

(2) 因为时间 = 距离 ÷ 速度。

所以要求相遇时各列车所行的时间，必须知道相遇时各列车所行的距离与速度。

(3) 要求速度，又必须知道距离与时间。而已知相遇后甲车行 4 小时，乙车行 9 小时。所以应先求出相遇时各车所行的距离。

(4) 如果知道了相遇时甲车所行距离 (x 公里)，就是知道了相遇后乙车 9 小时的行程，而且，相遇时乙车所行的距离 $[(300 - x)$ 公里] 也可以知道，这样甲车在相遇后 4 小时的行程也就知道了。

因此，甲车的速度 $\left(\frac{300 - x}{4} \text{ 公里/时}\right)$ 、乙车的速度 $\left(\frac{x}{9} \text{ 公里/时}\right)$ 都可以知道。

(5) 知道了甲、乙列车的速度及相遇时各列车所行的距离，便可用代数式来表示，相遇时甲车所行的时间 $\left(\frac{x}{\frac{300 - x}{4}} \text{ 小时}\right)$

及乙车所行的时间 $\left(\frac{300 - x}{\frac{x}{9}} \text{ 小时}\right)$ 。

根据 (1) 便可列出方程，

$$\left(\frac{x}{\frac{300 - x}{4}} = \frac{300 - x}{\frac{x}{9}}\right)$$

用分析法来解应用题，分析时步骤简单明了，不但可以提高学生分析问题的能力及解题技巧，而且还能迅速提高学生的逻辑推理能力，使思维逐步条理化。因此，它是列方程的一种重要方法，必须熟练掌握。

综合法、分析法两种方法，在一般的分析题目中，也不是孤立地应用，而是分析综合互相结合。严格地说，如果没有分析，便不可能综合，所谓综合与分析，不过是以谁为主而已。

再看下面的分析：

分析 4

(1) 要求速度，必须知道距离与时间。已知，甲车从 A 站到 B 站共行 300 公里，乙车从 B 站到 A 站共行 300 公里。

是否可以知道两列车各行 300 公里所用的时间？

(2) 已知，相遇后甲车行 4 小时，乙车行 9 小时。行全程（300 公里）所需的时间，等于相遇前、后所行时间的和。又两列车同时出发，所以相遇时两列车所行的时间相等。

(3) 设相遇时甲、乙列车各行 x 小时，则全程 300 公里，甲车需行 $(x+4)$ 小时，乙车需行 $(x+9)$ 小时。

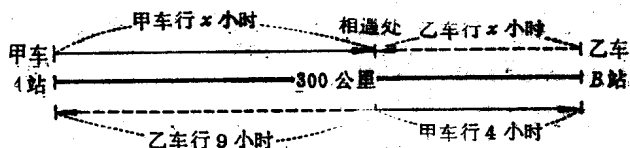
甲车的速度为 $\frac{300}{x+4}$ 公里/时，乙车的速度为 $\frac{300}{x+9}$ 公里/时。

(4) 相遇后，甲车 4 小时的行程为 $\frac{300}{x+4} \times 4$ 公里，乙车 9 小时的行程为 $\frac{300}{x+9} \times 9$ 公里。

(5) 相遇后，两列车相背而行，甲车 4 小时的行程与乙车 9 小时的行程之和为 300 公里。根据这个等量关系，便可列出方程，

$$\frac{300}{x+4} \times 4 + \frac{300}{x+9} \times 9 = 300$$

示意图，



小结：分析主要是在审题的基础上，找出等量关系。

1. 一般地说：关系式中三个量，如果两个量已知（已用代数式表示的量也作为已知）。那么，我们利用第三个量的等量关系来列方程。如在分析1中，速度、距离两个量已知，那么，利用时间的相等关系来列方程。

2. 应该注意题目中的隐蔽条件

(1) 例如：

“两人同时出发，相遇时，”两人所走的时间必定相等。

“两人同地出发，追及时，”两人所走的距离必定相等。

“往返于两地间”，那么，去程与来程必定相等。

(2) 在讨论流水中的航行问题时，遇到“船速”（即船在静水中的速度）应当想到：

$$\text{船速} = \text{顺速} - \text{水速}$$

$$\text{船速} = \text{逆速} + \text{水速}$$

$$\text{船速} = (\text{顺速} + \text{逆速}) \div 2$$

(3) 在混合物问题中，应记住：

混合时所取物质中某一元素的重量（或体积）的和
= 混合物中这一元素的重量（或体积）。

混合时所取物质的重量（或体积）的和
= 混合物的总重量（或总体积）。

(4) 在有关几何图形问题中，遇到面积（或体积）问题，必

须想到有关的面积（或体积）公式，如遇到直角三角形中三边间的关系时，必须想到「勾股弦定理」等。

诸如此类，不胜枚举。

三、怎样设立未知数

在上述分析中，已提到过设立未知数，那么，到底应该怎样假设未知数呢？

一般地说：题目中要求什么，就设什么为未知数。如果有几个要求的量，那么，不论设那一个量为未知数都可以。但是，未知数设得好：（1）能使问题便于分析，容易找到等量关系；（2）列出的方程简单易解。如果这两个目的都能达到，那就是设得最好。那么，怎样假设才好呢？这要看问题的条件，现在分析如下：

1. 尽可能使代数式简单

例如，已知甲数比乙数大 2，而丙数是乙数的 2 倍。

因甲、丙两个数都是拿乙数来比较大小的，所以应设乙数为 x ，则甲数为 $(x+2)$ ，丙数为 $2x$ 。

这样假设，要比设甲数为 x ，则乙数为 $(x-2)$ ，丙数为 $2(x-2)$ ，来得简单。

2. 尽可能使未知数的系数为整数

例如，甲数是乙数的 $\frac{1}{2}$ ，乙数是丙数的 $\frac{1}{3}$ 。

我们应设乙数为 $2x$ ，则甲数为 x ，丙数为 $6x$ 。

这样要比设丙数为 x ，则乙数为 $\frac{1}{3}x$ ，甲数为 $\frac{1}{6}x$ ，来得简单。

因为，系数为分数的方程，解起来要去分母，而需多做一步。