高等学校规划教材

水文地质计算的数值方法

孙峰根等编著

中国矿业大学出版社

高等学校规划教材

水文地质计算的数值方法

孙峰根　等编著

中国矿业大学出版社

(苏)新登字第010号

内容提要

本书系统地阐述了水文地质计算的数值方法,内容包括:地下水运动的数学模拟概论、有限差分法、有限单元法、边界元法、水文地质参数的识别及数值方法的应用等。重点阐述了承压二维流的有限差分法、Galerkin 有限元法和边界元法。

对每一种方法,结合简例都给出了用 FORTRAN77 语言编写的程序,以供学生上机实习用。每章后附有习题,书末附有课程设计题目,以便于教学,并帮助学生掌握数值法的原理,培养学生分析和解决实际问题的能力。

本书为高等院校水文地质及工程地质专业的教材,也可供硕士研究生、水文地质科研人员和工程技术人员参考。

责任编辑:安 蓉
版式设计:马景山
责任校对:马景山

水文地质计算的数值方法

孙峰根 等编著

中国矿业大学出版社出版

新华书店经销 中国矿业大学印刷厂印刷

开本 787×1092毫米 1/16 印张 15.5 字数 374千字

1995年6月第一版 1995年6月第一次印刷

印数:1—1200册

ISBN 7-81040-377-X

D.19 定价:8.80元

前　言

《水文地质计算的数值方法》为煤炭院校水文地质及工程地质专业的教学用书，主要阐述数值计算理论及其在水文地质学上的应用。目前国内关于数值方法的教材（或书）非深即浅，都不很适合于煤炭院校水文地质专业的教学。因此，笔者以几年来该课程的教案为基础，经修改、补充编写了本教材。

为了系统、全面地阐明数值方法的理论及其应用，又便于读者学习，编写时遵循了以简例为基础，由浅入深地阐述每一种数值方法的原则；对于重点、难点力求结合典型例子说明问题；为便于应用，针对每一种方法都给出了计算机程序，并对程序的结构作了简要说明。解决有关实际问题时，只要改变输入数据就可使用；必要的公式都加以推导，并尽量做到简明扼要。总之，编写过程中力求做到概念清晰、层次分明、通俗易懂、例题丰富、程序齐全。

本书第一章系统地介绍了地下水流动系统的基本概念、数学模型的建立及离散化方法的解题步骤；第二章阐述了有限差分法的原理和解题步骤，其中承压二维流的规则和不规则网格差分法是本章的重点；第三章着重介绍了 Galerkin 有限元法的原理及应用，并对 Ritz 有限元法和均衡有限元法也作了简单介绍；第四章详细介绍了近几年发展起来的边界元法的原理及应用时应注意的问题，其中承压二维稳定流的边界元法及非稳定流的时间差分边界元法是本章的重点；第五章专门论述了反演问题的基本概念及方法，重点介绍了用间接法识别水文地质参数的原理和步骤；第六章的应用综述则探讨了建立数学模型的过程及为此需要提供的水文地质资料，并对用数值方法求解数学模型应该注意的问题作了说明。书中附有计算机程序，供学生上机实习用。为便于教学和学习，每章后附习题。附录一给出了课程设计题目，以缩短理论到实践的距离；附录二介绍了正文中使用但未说明的线性代数方程组的解决，以便于读者参考。

全书由焦作矿业学院孙峰根主编。各章的编著者是：第一章：孙峰根；第二章：王心义、孙峰根；第三章：王晓明，孙峰根；第四章、第六章和附录一：王心义；第五章及附录二：王晓明。

在编写本书的过程中，湘潭矿业学院吕康林老师、西安矿业学院巨天乙老师、河北煤炭建工学院刘淑春老师提出了许多宝贵意见，在此表示衷心感谢。

由于编著者水平有限，书中可能存在不妥与错误之处，恳请读者予以指正。

编著者

1993 年 11 月

目　录

第一章　地下水运动的数学模拟概论

第一节　数学模拟的概念

一、地下水流动系统

地下水流动系统是存在于自然界岩石空隙中的水体的动态系统。完整、正确地认识地下水流动系统是比较困难的。其原因主要在：

(1) 系统结构复杂。地下水流动系统结构的空间格架由岩石空隙构筑，而岩石空隙的形状、规模及分布格局决定于岩石原始生成环境及后期所受地质应力状态。由于岩石空隙是由多种岩石经过漫长地质历史时期多次受力而形成的，因此由岩石空隙组成的地下水存在空间均较复杂，决定了地下水流动系统结构的复杂性。

(2) 影响因素多且随机。地下水流动系统是与外界联系密切的开放系统。与外界关系的性质、方式及程度，影响甚至决定地下水系统的状态与变化。如以大气降水为主要补给来源的地下水系统的水量变化，受气象、地形、植被、非饱和带入渗条件等制约。仅其中的气象一个因素，就足以左右水量的时间变化及空间分布。

(3) 缺乏直观性。由构成介质是岩体这一性质所决定，对地下水系统不可能以直接方式进行观察与分析，而只能利用有限个点上的信息，通过推断达到认识的目的。因此，它比起直观性好的对象较难研究。

上述诸点，不仅造成人们认识上的困难，而且给认识结果的描述、尤其是数学描述构成难度。

二、模型与模拟

作为研究对象的实体，是由无数个个体组成，并在许多因素的共同影响下存在。认识实体需要经历识别和归纳两个阶段。首先是要观察识别：(1) 由个体表现出的共性(单一的或复数种的)；(2) 各共性集合体的性质及其时空分布；(3) 支持或影响共性的因素及各因素之间的关系；其次，在此基础上分析归纳：(1) 各共性集合体之间的相互关系与联系方式；(2) 在影响因素中，具决定意义者、可以忽略或可归并于主要因素之内者；(3) 主要因素之间的关系。

以上所说的是认识实体的一般过程。至于认识过程的具体内容与侧重点，则因研究目的不同而各不相同。譬如关于地下水，若以运动为研究目的，则应侧重于含水层、代谢条件(补给、径流与排泄)、水流要素及相互关系；若以水中热分布为研究目的，那么应把着眼点放在系统中岩石的热传导性能、传热影响因素、水运动与热传导的关系上。

基于研究目的，通过识别与归纳，认识实体的共性，判别共性的决定因素及相互关系的过程称为概化。概化结果的不同形式表现叫做模型。模型是仿效实体而建立的再现结构。模型必须客观地反映实体的状态与功能。将实体概化而建立模型，使模型确切再现实体的全过程称为模拟。这里所说的“再现”不是简单的复制，而是对决定研究目的的目标功能的正确反

映。也就是说，模拟不是实体全部细节的搬迁，而是以其状态与目标功能作为核心的实体的近似表现。模拟的结果应是与实际充分拟合的、具有未来预测功能的模型。

三、模型的类型

以地下水系统为研究实体而建立的模型统称水文地质模型。水文地质模型按其再现形式可分为图象模型、文论模型、物理模型与数学模型。前两者习惯上不叫模型，而分别称水文地质图、水文地质条件文字论述，但按模型的现代概念严格对照亦应属水文地质模型。物理模型包括电模拟模型、渗流槽、窄缝槽等。水文地质数学模型是关于地下水系统概化结果的数学再现。水文地质数学模型必须建立在正确的概念模型基础之上，这一点将在后详述。至于概念模型与文论模型的关系，应该说两者都是文字再现，但前者比后者精炼，是结论的集合。

作为一种数学模型，水文地质数学模型也照数学模型的分类法分类。数学模型一般按所取变量是否为确定值分为确定性模型与随机模型；按变量是否随时间变化分为动态模型与静态模型；根据是否包括空间变量分为分布参数模型与集中参数模型；根据模型是否由线性微分方程组成而分为线性模型与非线性模型。严格说来，地下水运动的数学模型多为随机模型，但在一定的条件下有不少可作确定性模型处理；稳定流可作静态模型，而非稳定流的数学模型只能是动态模型；人工回灌与某观测井水位关系之类的问题可用集中参数模型，但人工回灌与诸多取水井水量关系等问题，就需用分布参数模型；承压水一般可用线性模型，而潜水用非线性模型。

四、数学模型的求解

数学模型一般由控制方程与约束条件组成。控制方程常为线性或非线性偏微分方程。求解数学模型通常采用解析法与数值法。地下水动力学中所用的多为解析法。用解析法求得的是精确解。如非稳定承压二维流的数学模型，可利用约束条件以解析法直接求得 Theis 公式——精确解。只要给定自变量，就可算得相应的函数值。解析法的特点是计算简便，模拟过程各环节的意义清楚，实体的变化机制表现得比较清晰，所以在机制研究及工程实际中很受欢迎。解析法的弱点主要是对于复杂对象的数学模型未必都能求得其解。目前尚遇不少解析法显得无能为力的问题。

数值法则以离散化方法求解数学模型。这里的离散化方法是指一种"离散后集合"的方法，即将研究区域和计算时段分别分割成若干个小区域(单元)与小时段(对静态模型无需)，把各单元视为区域的等价区，根据数学模型建立各单元特征点物理量之间关系的代数方程，按单元、按时段顺次求解由这些代数方程组成的方程组，从而最终得出全区域变量值的集合。这里所说的特征点(又叫离散点)，是指代表单元物理量的点。

根据离散化过程之不同，数值法分为有限差分法，有限单元法与边界元法等。有限差分法是通过以有限个离散点代替连续区域，以差商代换离散点上的微商的途径，将偏微分方程转为线性代数方程来求解数学模型；有限单元法则依据变分原理、或剩余加权法、或均衡原理进行剖分插值，得出代数方程组，以求解数学模型；边界元法是近几年开始广泛应用于工程问题上的一种方法，它是通过将区域水流的基本微分方程变换为边界积分方程后离散成线性代数方程组的途径来求解数学模型。

第二节　地下水流动系统的数学模拟过程

一、概念模型及建立数学模型的依据

地下水流动系统的结构一般较复杂，要建立正确的数学模型，首先必须有全面、准确的概念模型。地下水流动系统的概念模型是指通过水文地质调查所得关于地下水流动系统认识的总结和概化结果的文字结论集合。它包括的内容有：(1) 固性结构及其空间分布；(2) 含水层性质；(3) 边界条件；(4) 代谢条件；(5) 地下水流特征；(6) 时序特征；(7) 其他。其中固性结构及其空间分布是指含水层、隔水层或越流层的成分、结构、规模、产状以及它们的组合关系与空间分布；含水层性质是指单层还是复合层、均质还是非均质、各向同性还是各向异性等；边界条件不仅指四周的边界性质，而且包括上界面和底部边界的性质；代谢条件是指地下水补给、径流和排泄条件，其中包括人工补给与排泄；地下水流特征是指承压还是无压、层流还是紊流、稳定流还是非稳定流、平面流还是空间流、有越流还是无越流、可适用何原理(定律)等；时序条件是指物理量的时序变化，如初始条件；以上未尽内容可归入“其他”项内，如研究区内存在或出现的特殊状态或变化等。概念模型必须满足以下两点要求：(1) 模型的全部内容是以详细野外调查所得正确信息为依据的；(2) 模型的组成必须是经实测或论证所得真实无误的结果或客观反映实际的科学结论。有了概念模型，就可以建立数学模型。

目前，地下水流动系统的数学模型是以质量守恒定律和能量守恒(转换)定律为依据来建立的。质量守恒定律对水运动空间的一定单元而言，是以水量均衡原理即连续性原理来体现的。对渗流内某单元，水均衡方程可写为

$$-\left[\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z}\right]\Delta x\Delta y\Delta z=\frac{\partial}{\partial t}(\rho n\Delta x\Delta y\Delta z) \tag{1-1}$$

式中　V_x、V_y、V_z ——三个坐标方向上的渗流速度，m/d；

ρ ——水的密度，t/m^3；

n ——含水层的孔隙度。

式(1-1)就是渗流的连续性方程，是一个在渗流中的质量守恒方程。

能量守恒定律在渗流中体现在 Darcy 定律。Darcy 定律是渗流速度与水力坡度之间的关系式，而水力坡度所反映的水所具有的能量在运动途程中因作功而损失的量或水运动的机械能沿程损失而表现出的水头差。

二、地下水运动的基本微分方程

为了对地下水流动系统的数学模型树立扎实的概念，下面举出一些典型的数学模型例子。

我们知道，关于各向异性含水层的 Darcy 定律为

$$V_x=-K_x\frac{\partial H}{\partial x};V_y=-K_y\frac{\partial H}{\partial y};V_z=-K_z\frac{\partial H}{\partial z} \tag{1-2}$$

将此式代入式(1-1)，并利用密度、孔隙度与压强的关系，引用贮水率的概念，则

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial H}{\partial z}\right)=\mu_s\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1-3}$$

式中　K_x、K_y、K_z ——三个坐标方向的渗透系数，m/d；

μ_s ——贮水率。

式(1-3)就是各向异性含水层承压三维流基本微分方程。对均质各向同性含水层，则有

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}=\frac{\mu_s}{K}\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1-4}$$

当有汇、源项时为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial H}{\partial z}\right)+W=\mu_s\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1-5}$$

式中　W ——汇、源项(抽、注水量)，m/d。

在三维承压稳定流，方程右端 $\frac{\partial H}{\partial t}$ 项为零，即有

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial H}{\partial z}\right)=0 \tag{1-6}$$

在均质各向同性含水层稳定流，因 $K_x=K_y=K_z$，故有

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}=0 \tag{1-7}$$

在二维承压流，z 向无变化，利用贮水系数(又叫弹性释水系数)$S=M\mu_s$(其中 M 为含水层厚度)，导水系数 $T=KM$，则对应于前列各条件下的方程顺次为：

对各向异性含水层非稳定流

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T_x\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T_y\frac{\partial H}{\partial y}\right)=S\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1-8}$$

对各向同性含水层

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}=\frac{S}{T}\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1-9}$$

有汇、源项时

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T_x\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T_y\frac{\partial H}{\partial y}\right)+W=S\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1-10}$$

对于稳定流，当含水层为各向异性时

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T_x\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T_x\frac{\partial H}{\partial y}\right)=0 \tag{1-11}$$

对各向同性含水层

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}=0 \tag{1-12}$$

等等，这里不一一列出。

关于潜水也同样可以写出不同条件下不同流动状态的微分方程。如潜水二维流的基本微分方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_xh\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_yh\frac{\partial H}{\partial y}\right)+W=\mu\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1-13}$$

式中　h ——潜水含水层厚度，m；

W ——汇、源项，m/d；

μ ——当潜水面上升时为饱和差，下降时为给水度。

以上都是直角坐标表达式。有时用柱坐标表示更为方便，为此只需作坐标变换。如式(1-4)的柱坐标形式为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}=\frac{\mu_s}{K}\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1-14}$$

等。

以上我们列举了一些描述地下水运动的数学表达式，即偏微分方法方程。这些方程是地下水流动系统数学模型的主体部分，叫做控制方程。控制方程与定解条件一起，共同构成完整的数学模型。

三、定解条件

1. 定解问题

我们在前面已经见到了不少描述地下水运动的微分方程。一个微分方程有无限多个解，要使方程有确定解(特解)，则必须给定能使方程得出唯一解的条件，这个条件叫做定解条件。定解条件一般是指边界条件与初始条件。对于与时间有关的方程，定解条件同时包括边界条件与初始条件；而对与时间无关的方程，定解条件只指边界条件，无须给定初始条件。

由上可见，数学模型中的描述水运动的基本微分方程是控制方程，定解条件就是约束条件。由基本微分方程与定解条件组成的数学模型的求解问题，称为定解问题。定解问题可以是边值问题，也可能是混合问题。由基本微分方程与边界条件构成的定解问题，叫做边值问题。由基本微分方程与边界条件、初始条件构成的定解问题，叫做混合问题。也就是说，边值问题的定解条件只有边界条件；混合问题的定解条件则包括边界条件与初始条件。上述关系图示如下：

数学模型
- 基本微分方程
- 定解条件
  - 边界条件
  - 初始条件

基本微分方程 + 边界条件 —— 边值问题
基本微分方程 + 边界条件 + 初始条件 —— 混合问题
边值问题、混合问题 —— 定解问题

(数学模型的组成) ←—|—→ (定解问题的类别)

2. 边界条件

地下水流动系统的数学模拟，通常取系统的自然边界为模拟边界。边界条件是边界的空间分布及边界上水头、水量的时序分布。数学模拟要求边界条件是已知的。在系统中截取某一部分作模拟区时，对边界的要求也是如此。边界按已知函数的性质分为以下几类：

(1) 定水头边界(第一类边界)。如果边界上的水头时序变化是已知的，那么这种边界叫做定水头边界或第一类边界，即这类边界上水头随时间的变化，可用已知函数表示。如

$$H(x,y,t)|_{\Gamma_1}=\varphi(x,y,t) \qquad t>0 \tag{1-15}$$

或

$$H(x,y,t)=\varphi(x,y,t) \qquad (x,y)\in P_1 \tag{1-16}$$

等。式中的 Γ_1 为边界名；φ 为已知函数。诸如与地表水体相接或与水位变化已知的含水层相接的边界等即属此类边界。

(2) 定水量边界(第二类边界)。如果边界上的单宽流量是已知的，那么这类边界就叫做

定水量边界或第二类边界。如渠道的漏水段、地下水排水渠等即属此类边界。其表达式，如在各向同性含水层为

$$T\frac{\partial H}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_2} = \pm q(x,y,t) \qquad (x,y) \in \Gamma_2, t > 0 \tag{1-17}$$

对各向异性含水层，则

$$T_x \frac{\partial H}{\partial x}\cos(n,x) + T_y \frac{\partial H}{\partial y}\cos(n,y)|_{\Gamma_2} = \pm q(x,y,t) \qquad (x,y) \in \Gamma_2, t > 0 \tag{1-18}$$

式中 Γ_2——边界名；

q——单宽流量，流入取＋，流出取－，m^2/d；

n——边界 Γ_2 的外法线方向。

当边界为隔水边界或地下水分水岭时，$q = 0$ 构成零流量边界。零流量边界亦属定流量边界。

(3) 混合边界（第三类边界）。这类边界虽少见，但有时也遇到只能以 H 和 $\frac{\partial H}{\partial n}$ 的线性组合来给定边界上单宽流量的情形，如

$$\frac{\partial H}{\partial n} + \alpha H = \pm q \qquad (x,y) \in \Gamma_3 \tag{1-19}$$

式中的 α、q 为边界 Γ_3 上的已知函数。这类边界叫做混合边界或第三类边界。

3. *初始条件*

对以研究水头变化为目的的地下水流动系统而言，初始条件指的是研究时段初始时刻 (t=0) 渗流区 Ω 内各点 (x,y) 的水头分布。如

$$H(x,y,t)|_{t=0} = H_0(x,y) \qquad (x,y) \in \Omega \tag{1-20}$$

初始时刻能选在过程之开初，那当然是最好。如研究抽水过程中渗流区内各点水头变化，则初始时刻取开泵时刻；抽水水位恢复过程中以停泵时刻为初始时刻等。但对地下水流动系统的研究，不可能每个都追索历史、去寻找初始时刻，且多数也是无从找起。所以，一般选取过程研究的最适时刻（水头已知的）作为初始时刻。需要注意的是，初始条件给出的是初始时刻渗流区内各点的水头，所以若在渗流区内存在水头未知点，则不能构成初始条件。

四、离散化方法的求解步骤

在前面已经谈及求解数学模型的两种基本方法，其中之一的数值法的核心是离散化。这里将地下水流动系统作为对象，简要介绍离散化的一般步骤。

1. *剖分*

将整个研究区域划分成若干个小区域（单元）叫剖分。原则上剖分的单元形状任选，但单元形状及大小，都与计算质量相关，所以通常取矩形（正方形）或三角形小单元。剖分的基本要求是，剖分单元必须可以视为均质、计算方便、边界拟合容易、精度高。对非稳定流，时间也要剖分，其间隔（称时间步长）根据计算要求（包括推算要求）确定。

2. *定义离散点（或特征点）*

剖分所得有限个数单元内的中心点称为格点；单元的公共顶点（有时选在单元边上）称为节点（或称结点、点元）。因数值法是以各单元格点（或节点）的水头之集来替代水压面的，所以要求格点（或节点）的水头值等物理量以及水文地质参数，必须是所在单元的代表值。确定离散点（格点或节点）及代表值，叫做定义离散点。

3. 建立控制方程的线性代数方程组

根据渗流的基本微分方程，建立每个离散点各离散时刻的线性代数方程。区域内各离散点的这种方程之集合，即为控制方程的线性代数方程组。

4. 建立定解条件的线性代数方程组

根据定解条件，以线性代数方程建立离散点初始条件表达式、边界点水头表达式（一类边界）或边界离散点与内部离散点之间的关系式（二类边界），由此得到定解条件的一组线性代数方程组。

5. 解方程组

求解由以上 3、4 步所得的线性代数方程组，得某一时刻水头在各离散点的分布。

6. 计算待求时刻水头

重复以上 3，4，5 步，可算得待求时刻的水头分布。

以上是离散化的总程序。不同的数值方法在细节上略有不同，具体详见以后各章。

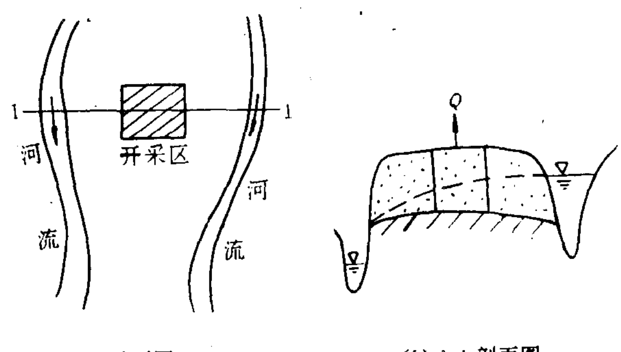
五、模型的检验、调整与拟合

对地下水流动系统进行数学模拟的全部意义在于，用数学模型可"真实"地反映客观实体（地下水流动系统），以解释过去，说明现在和预测未来，即必须具有利用价值或称有效性。由此可见，只完成建立数学模型并求得其解的过程，数学模拟尚未结束，还须进行仿真检验与参数调整，这是数学模拟必不可缺少的重要一步。常用的方法是将模型输出（如模型输出的水位值）与实际输出（如水位现场观测值）进行比较，采用调整影响参数的方法，使两种输出最大限度地接近。

拟合是指模拟结果达到最大仿真程度。显然，模拟的目标是建立与实体拟合的模型。但是由于模型是实体的人为再现，永远也不可能使两者完全吻合，因而不能把拟合理解为"与实际完全相符"，也没有必要如此要求。是否拟合应从两方面去鉴别：其一，模型运行过程是否反映实体目的过程机制；其二，时序输出结果是否与实体目的过程输出一致。在拟合问题上以下几点是必须注意的。

1. 反演拟合调参不能随意

当模型拟合得不好时，一味地调整参数，以求模型输出系列与观测数据系列接近，而不顾如此调整后的参数是否反映客观实体的实际参数。这种为拟合而拟合的做法是应当避免的。拟合不好，未必就是参数上的问题。仅就模型而言，模型本身固有缺陷（如定律、方程的局限性）、建模的不合理（如剖分及以剖分单元集合代替曲面）等，都可导致拟合精度低的后果。因此，应从这些方面来消除过大差异。



(*a*) 平面图　　(*b*) 1-1 剖面图

图 1-1　河间地块径流分布图

2. 应足够重视概念模型

如前所述，数学模型是概念模型以数学形式的表现。概念模型作为数学模型的基础，决定着数学模型的仿真程度。所以要使数学模型与实体拟合，必须做到尽可能使概念模型真

实、正确地反映实体。为此，应对地下水流动系统进行全面、深入的调查。通过调查与研究，客观、系统地认识实体，并对已得的认识进行合理、准确的概化，避免根据不足的推断和搞数学游戏。

3. 应明确拟合的终极目的在预测

利用数学模型进行实际计算时，也出现如下情形，即经过反演调参后，模型计算输出和观测数学序列拟合得很好，但一外推就出现偏差。有些所谓的拟合，是局部的或人为的，所以是有限的或经不起考验的伪假现象。原因不是概念模型不准确，就是建立数学模型存在不合理之处。也就是说，数学模型未能正确反映地下水流动系统结构或功能。我们知道，数学模拟的目的在应用，主要是预测；而伪拟合的模型是达不到这一目的的，因此也就无利用价值。为避免这类现象的出现，应当对模型进行认真的拟合考验。这种考验应该是在现场的和后延的。

六、数学模拟程序小结

地下水流动系统数学模拟程序如下：

(1) 现场调查；

(2) 确定概念模型；

(3) 建立数学模型；

(4) 求解数学模型；

(5) 仿真检验与调整；

(6) 拟合考验与模型确认。

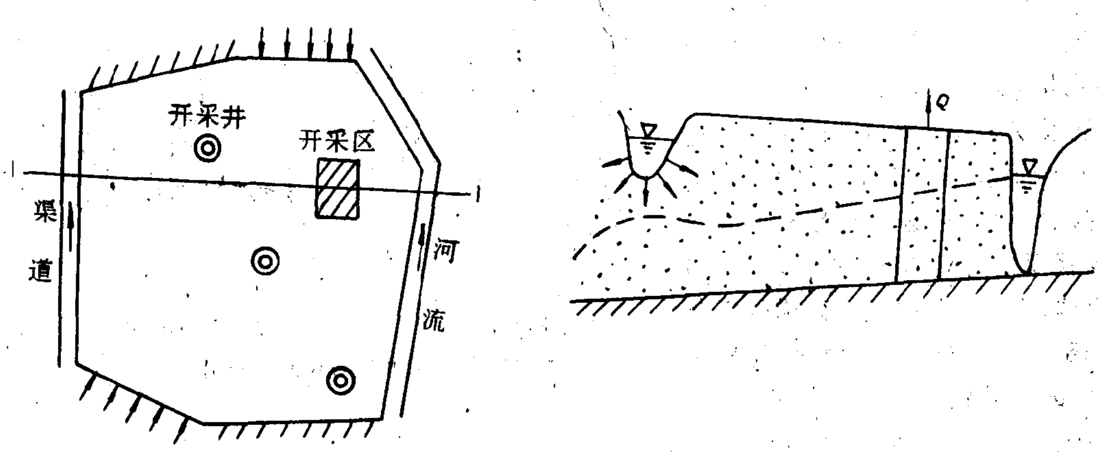
在本书以后几章中将重点介绍(4)、(5)、(6)三个步骤。

习 题 一

建立图示水文地质模型的数学模型(答案不一定唯一)。

1. 河间地块问题。

2. 河渠地块问题。



(a) 平面图　　(b) 1-1 剖面图

图 1-2　河渠地块径流分布图

第二章 有限差分法

有限差分法是一种古典的、近似的数值计算方法。在一定的近似程度上，它可以用来计算非均质各向异性及复杂几何边界条件下的地下水流动问题，且理论浅显易懂、编写程序简单、计算方便。随着微机的普及与发展，有限差分法已被广泛地应用于生产中。

利用有限差分法求解地下水流动问题的基本步骤是：(1) 对计算区和计算时间进行剖分，以有限个空间离散点和时间离散点分别替代连续的计算区和计算时间。(2) 在这些离散点上，按照数学上差商($\Delta F/\Delta x$ 或 $\Delta F/\Delta t$)替代微商($\mathrm{d}F/\mathrm{d}x$ 或 $\mathrm{d}F/\mathrm{d}t$)的方法，将描述地下水流动的数学模型化为差分方程即线性代数方程。(3) 求解差分方程，可得数学模型在离散点上的近似解。

在剖分的基础上，建立差分方程的方法有两种：(1) 数学方法，即直接以差商替代微商的方法。(2) 物理方法，即利用水均衡原理和达西定律建立小均衡单元的水量均衡方程的方法。后者建立的水量均衡方程是线性代数方程。同一地下水流动问题在剖分相同的情况下，用上述两种方法建立的差分方程是一样的。本章建立等空间步长的规则网格差分方程时用数学方法；而建立变空间步长和不规则网格差分方程时用物理方法。

第一节 基本概念

一、剖分及离散点的确定

1. 空间剖分及离散点的确定

把计算区域按照一定的规则分割成有限个网格的方法称为空间剖分。根据分割网格形状的不同，二维平面流动问题的空间剖分分为规则网格部分，即矩形剖分(如图 2-1、2-2 所示)和不规则网格剖分，即三角形剖分(如图 2-3 所示)。

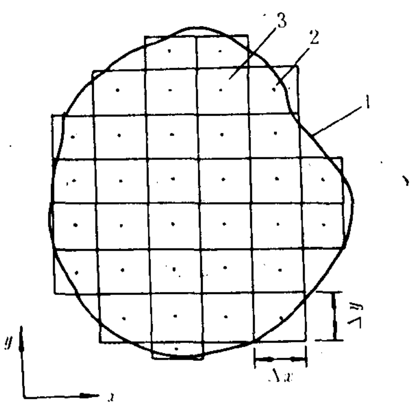


图 2-1 均衡网格部分

1—计算区边界；2—离散点即格点；3—剖分网格

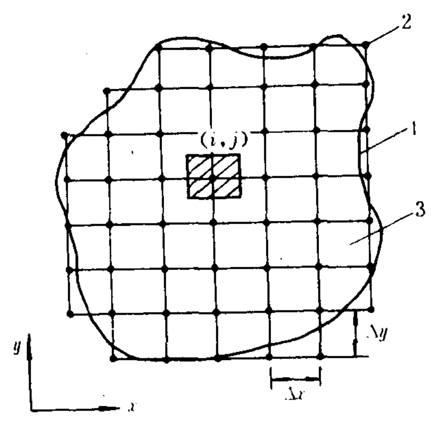


图 2-2 节点网格剖分图

1—计算区边界；2—离散点即节点；3—剖分网格

规则网格剖分是用两组相互正交的平行线将计算区分割成有限个矩形网格(要求在同一网格内含水介质是均质的)。平行线之间距离 Δx、Δy 称为格距或空间步长；当 $\Delta x=\Delta y$

时，称为正方形网格剖分。

不规则网格剖分是用相互斜交的直线将计算区分割成有限个三角形网格。有关不规则网格剖分的原则将在本章第七节中详细讨论。

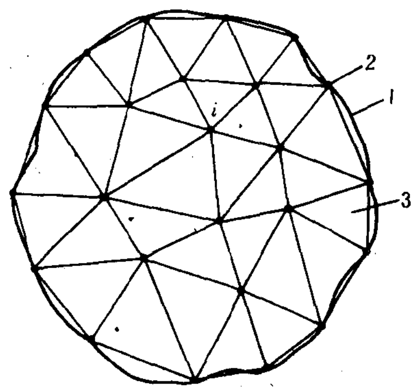


图 2-3 不规则网格剖分图
1—计算区边界；2—离散点即节点；3—三角形剖分网格

在空间剖分的基础上，确定离散点的方法有两种：一种方法是将离散点置于网格中心(如图 2-1 所示)。这种离散点称格点，此时每个网格都是一小均衡单元，因此这类剖分网格称为均衡网格，对应的剖分又称为均衡网格剖分。另一种方法是将离散点置于网格交点之上(如图 2-2、2-3 所示)。这种离散点称节点，这类剖分网格称为节点网格。必须注意，节点网格本身并非小均衡单元。图 2-2 中节点(i,j)的小均衡单元是由节点(i,j)和相邻节点的连线的垂直平分线围成的区域(阴影部分)组成。本书中离散点的确定采用第二种方法即节点法。

为便于计算，必须对节点编号。规则网格剖分节点的编号以其在坐标轴 x、y 方向上的序数表示。通常以 i 表示 x 方向的编号，自左向右依次编排；以 j 表示 y 方向的编号，自下而上依次编排。节点(i,j)的水位、导水系数分别以 $H_{i,j}$、$T_{i,j}$表示，它们是小均衡单元的代表值。

应当注意的是：空间剖分和节点位置的确定密切相关。在现场，常根据节点位置即长观孔位置进行计算区的空间剖分；而长观孔位置的设计又要考虑空间剖分原则。

2. 时间剖分及离散点的确定

计算地下水非稳定流问题时，必须将计算时间剖分。剖分的方法是：根据计算要求将计算时间 TM 分割成 M 个时段。假定任一时段为 $\Delta t_k(R=1,2,\cdots,M)$，$\Delta t_k$ 称为时间步长，显然有

$$TM = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \cdots + \Delta t_k + \cdots + \Delta t_M$$

两相邻时间步长的分割点称为时间离散点。例如：$TM = 365\text{d}$，以每个月为时间步长将 TM 分割成 12 个时段，则有时间步长 $\Delta t_1 = 31\text{d}$、$\Delta t_2 = 28\text{d}$、…、$\Delta t_{12} = 31\text{d}$，对应的时间离散点 $t_0 = 0\text{d}$、$t_1 = 31\text{d}$、$t_2 = 59\text{d}$、…、$t_{11} = 334\text{d}$、$t_{12} = 365\text{ d}$。

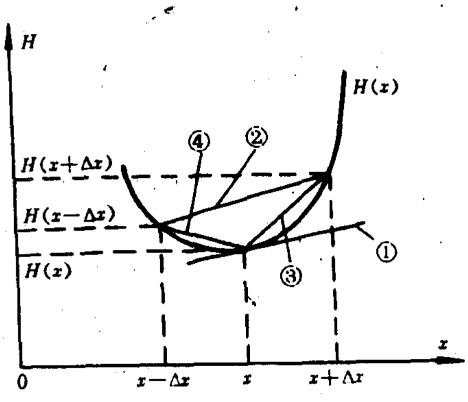


图 2-4 一阶导数的差分近似表示

二、导数的差分近似式

描述地下水流动的基本微分方程中含有微商项即导数项。当用差商替代时，其近似公式可由 Talyor 级数展开式给出。下面分别研究一元函数导数及多元函数导数的差分近似式。

1. 一元函数导数的差分近似式

对于一个连续的单值函数 $H(x)$(如图 2-4 所示)，假定在 x 的某一邻域内有$(n+1)$阶导数存在。沿 x 正向，按照 Talyor 级数展开式

$$H(x+\Delta x)=H(x)+\Delta x H^{(1)}(x)+\frac{\Delta x^2}{2!}H^{(2)}(x)+\cdots+\frac{\Delta x^n}{n!}H^{(n)}(x)+\cdots \tag{2-1}$$

可得

$$H^{(1)}(x)=\frac{H(x+\Delta x)-H(x)}{\Delta x}+O(\Delta x) \tag{2-2}$$

式中　$O(\Delta x)$ ——余项或截断误差，表达式为

$$O(\Delta x)=-\frac{\Delta x}{2!}H^{(2)}(x)-\frac{\Delta x^2}{3!}H^{(3)}(x)-\cdots-\frac{\Delta x^{(n-1)}}{n!}H^{(n)}(x)-\cdots$$

由式(2-2)右端舍去余项 $O(\Delta x)$，可得到一元函数 $H(x)$ 的一阶导数 $H^{(1)}(x)$ 的前向差分近似式

$$H^{(1)}(x)\doteq\frac{H(x+\Delta x)-H(x)}{\Delta x} \tag{2-3}$$

误差为 $O(\Delta x)$，是一阶的。式(2-3)计算值相当于图 2-4 中③线的斜率。

同理，沿 x 的负方向，由 Talyor 级数展开式

$$H(x-\Delta x)=H(x)-\Delta x H^{(1)}(x)+\frac{\Delta x^2}{2!}H^{(2)}(x)-\cdots+\frac{(-\Delta x)^n}{n!}H^{(n)}(x)+\cdots \tag{2-4}$$

得

$$H^{(1)}(x)=\frac{H(x)-H(x-\Delta x)}{\Delta x}+O(\Delta x) \tag{2-5}$$

舍去右端余项 $O(\Delta x)$，可得到一元函数 $H(x)$ 的一阶导数 $H^{(1)}(x)$ 的后向差分近似式

$$H^{(1)}(x)=\frac{H(x)-H(x-\Delta x)}{\Delta x} \tag{2-6}$$

误差为 $O(\Delta x)$，是一阶的。式(2-6)计算结果相当于图 2-4 中④线的斜率。

当沿 x 的正向和负向的空间步长 Δx 相同时，由式(2-1)减式(2-4)得

$$H(x+\Delta x)-H(x-\Delta x)=2\Delta x H^{(1)}(x)+\frac{2\Delta x^3}{3!}H^{(3)}(x)+\cdots+\frac{2\Delta x^{2n-1}}{(2n-1)!}H^{(2n-1)}(x)+\cdots \tag{2-7}$$

舍去右端余项

$$O(\Delta x^2)=\frac{2\Delta x^3}{3!}H^{(3)}(x)+\cdots+\frac{2\Delta x^{2n-1}}{(2n-1)!}H^{(2n-1)}(x)+\cdots$$

可得 $H(x)$ 的一阶导数 $H^{(1)}(x)$ 的中心差分近似式

$$H^{(1)}(x)\doteq\frac{H(x+\Delta x)-H(x-\Delta x)}{2\Delta x} \tag{2-8}$$

误差为 $O(\Delta x^2)$，是二阶的。上式计算值相当于图 2-4 中②线斜率。

由上述一阶导数的三种差分近似式看出，前、后向差分近似式的截断误差是一阶的，而中心差分近似式的截断误差是二阶的。显然，中心差分近似式比前、后向差分近似式更为精确，这一点图 2-4 也直观地表现出来。因此，在本书以后各节中，对于一阶导数常用中心差分近似式替代。另外，从上述差分近似式的截断误差来看，Δx、Δt 愈小，其截断误差也愈小。是否 Δx、Δt 愈小越好呢？关于这个问题以后将专门讨论。

将式(2-1)和式(2-4)相加，可得

$$H(x+\Delta x)+H(x-\Delta x)=2H(x)+\frac{2(\Delta x)^2}{2!}H^{(2)}(x)+\cdots+\frac{2(\Delta x)^{2n-2}}{(2n-2)!}H^{(2n-2)}(x)+\cdots$$