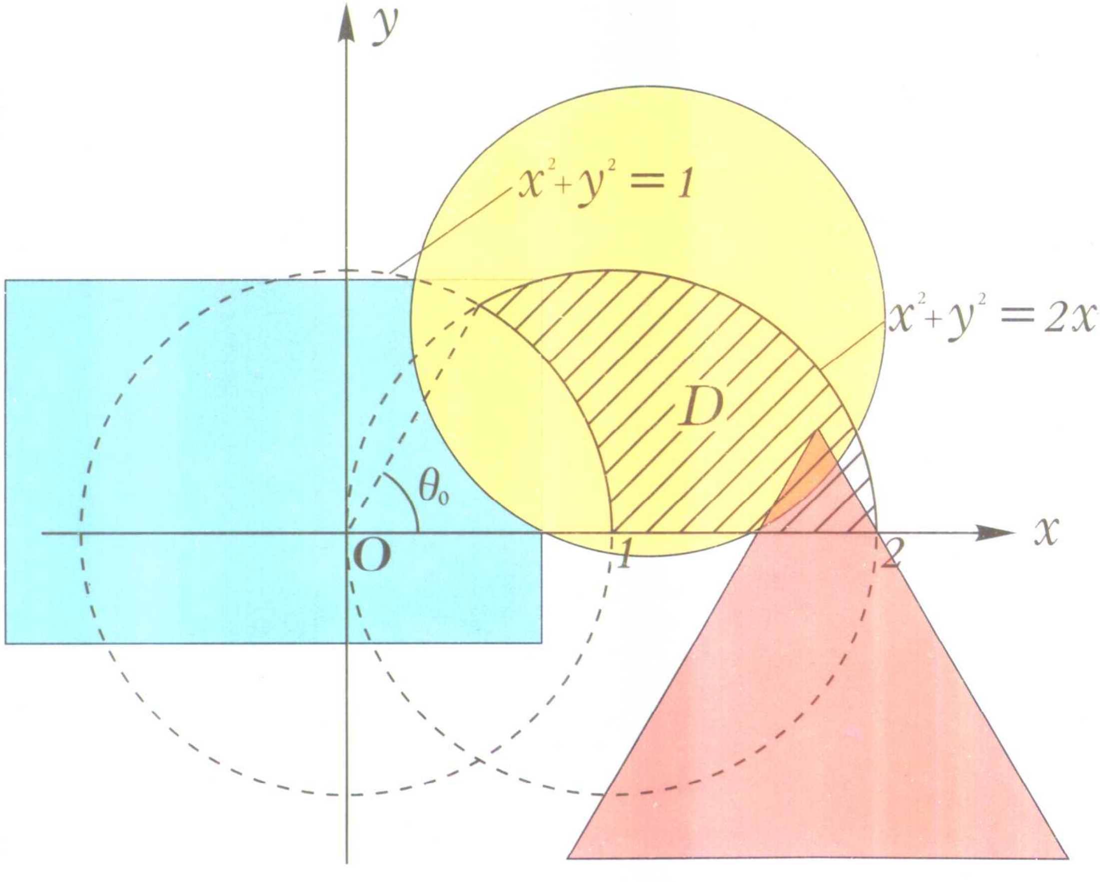
GAODENGSHUXUEXUEXIZHIDAO

高等数学学习指导

边馥萍 李君湘 李彩英 何银兰 于桂珍 编



天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

高等数学学习指导

边馥萍　李君湘　李彩英
何银兰　于桂珍　编

天津大学出版社

内 容 简 介

《高等数学学习指导》是高等工业院校《高等数学》课程的学习参考书，是根据高等工业院校高等数学课程教学基本要求的深度和广度、结合多年的教学实践而编写的。

本书按教学内容分为11章，覆盖了高等数学的主要内容。包括：函数、极限和连续、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、空间解析几何与矢量代数、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、级数和常微分方程。书中每章包含5部分，即基本内容、典型例题、习题(A)、习题(B)和测验题。书后还给出期中、期末测验模拟试题共8套。所有习题及测验题都附有答案，期中、期末的模拟试题还附有解题过程及要点分析。

本书要点突出，例题丰富，习题由浅入深，循序渐进，在学习每章内容之后，读者可以进行自我检测。

本书适用于高等工业院校非数学类专业学生和参加高等教育自学考试的读者使用，也可以作为报考理工类硕士研究生的复习参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/边馥萍编.—天津：天津大学出版社，2001.9 (2002.1重印)
ISBN 7-5618-1456-9

Ⅰ.高… Ⅱ.边… Ⅲ.高等数学－高等学校－自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第056305号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨风和
地　　址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742
印　　刷 河北省枣强新华胶印厂
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 20.5
字　　数 513千
版　　次 2001年9月第1版
印　　次 2002年1月第2次
印　　数 5 001－9 000
定　　价 25.00元

前　　言

近年来，在大学基础数学教育改革中，特别强调提高学生的数学素质是大学基础数学教育的灵魂。高等数学课程是高等工科院校的大学基础数学（非数学类）的主要课程，通过这门课程的学习，学生不仅能掌握必要的数学知识，以作为今后学习专业课程的工具，而且应该通过本课程的学习，逐渐培养自己的创造能力、归纳和演绎能力，及数学应用能力，从而提高自身的数学素质。为指导学生学好这门课程，我们结合多年的教学实践经验编写了本书，希望本书能成为高等工科院校非数学类专业学生的必要参考书。

本书按教学内容分为11章，覆盖了高等数学的主要内容。每章包括5个部分，即：基本内容、典型例题、习题(A)、习题(B)和测验题。基本内容部分系统归纳了本章的基本理论与方法；典型例题部分有助于帮助读者运用有关知识分析问题和解决问题；习题(A)与习题(B)的编排由浅入深，有助于读者逐步加深对基本概念和基本理论的理解，掌握基本运算技能，并进一步提高计算能力；测验题部分包括分章测验和期中、期末阶段测验模拟试题，便于读者的自我检测。所有习题及测验题都附有答案，期中、期末的模拟试题还给出解答过程、评分标准及题目的要点分析。

学习高等数学课程时，以本书作为参考书，将有助于读者掌握知识要点和计算技巧，启迪思维，开阔眼界，逐渐培养自己的创造与应用能力。

本书在编写过程中得到天津大学网络教育学院和天津天大天爱网络教育服务公司的热情支持和资助，在此我们深表谢意。

限于编写水平，对书中的不足及错误之处，恳请同行及读者批评指正。

编者

2001.03

目　录

第 1 章　函数、极限和连续

Ⅰ　基 本 内 容

1.1　函数

一、区间与邻域

1. 区间定义

设数 a 与 b 满足 $a<b$,则数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为开区间,记为 (a,b),即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}.$$

数集 $[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为闭区间,数集 $[a,b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$,$(a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$ 称为半开区间.

2. 邻域定义

设 a 与 $\delta(\delta>0)$ 是两个数,称数集 $\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域,记为 $N(a,\delta)$,即

$$N(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

点 a 叫做邻域的中心,δ 叫做这个邻域的半径。去掉中心 a 的邻域 $N(a,\delta)$,称为点 a 的去心邻域,记为 $N(\mathring{a},\delta)$,即

$$N(\mathring{a},\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

二、函数的定义

设有两个数集 X、Y,f 是一个确定的对应规律,若对于每一个 $x \in X$,通过 f 都有惟一的 $y \in Y$ 和它对应,记为

$$x \xrightarrow{f} y,\text{或 } f(x)=y,$$

则称 f 为定义在 X 上的函数. X 为函数 f 的定义域,记为 D_f. 数集 $V_f=\{y \mid y=f(x), x \in X\}$ 为函数 f 的值域.

三、函数的性质

1. 有界性

若存在正数 M,使函数 $f(x)$ 在区间 I 上恒有 $|f(x)| \leqslant M$,则称 $f(x)$ 在区间 I 上是有界函数;否则,$f(x)$ 在区间 I 上是无界函数.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上的任意两点 $x_1<x_2$,都有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),

则称 $y=f(x)$在区间 I 上为严格单调增加(或严格单调减少)的函数.

如果函数 $f(x)$在区间 I 上的任意两点 $x_1<x_2$,都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$(或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$),则称 $y=f(x)$在区间 I 上为广义单调增加(或广义单调减少)的函数,简称为单调增加(或单调减少)的函数.

3.周期性

对于函数 $y=f(x)$,如果存在一个非零常数 T,对一切的 x 均有 $f(x+T)=f(x)$,则称函数 $f(x)$为周期函数,并把 T 称为 $f(x)$的周期.通常情况下,周期函数的周期是指最小正周期.

4.奇偶性

若函数 $f(x)$在关于原点对称的区间 I 上满足$f(-x)=f(x)$(或 $f(-x)=-f(x)$),则称 $f(x)$为偶函数(或奇函数).

四、复合函数与反函数

1.复合函数

设 $y=f(u)$是数集 Y 上的函数,$u=\varphi(x)$是由数集 X 到数集 Y 的一个非空子集 Y_φ 的函数.因此,对每一个 $x\in X$,通过 u 都有惟一的 y 与它对应,这时在 X 上产生了一个新的函数,用 $f\circ\varphi$ 表示,并称 $f\circ\varphi$ 为 X 上的复合函数,记为

$$x\xrightarrow{f\circ\varphi}y,(f\circ\varphi)(x)=y \text{ 或 } y=f[\varphi(x)],x\in X,$$

其中 u 叫做中间变量,X 是复合函数$f\circ\varphi$ 的定义域,$f\circ\varphi$ 表示由 x 产生 y 的对应规律.

2.反函数

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D_f,值域为 V_f.对于任意的 $y\in V_f$,在 D_f 上至少可以确定一个x 与y 对应,且满足 $y=f(x)$.如果把 y 看做自变量,x 看做因变量,可以得到一个新的函数:$x=f^{-1}(y)$.我们称这个新的函数 $x=f^{-1}(y)$为函数 $y=f(x)$的反函数,而把函数 $y=f(x)$称为直接函数.

3.定理

设函数 $y=f(x)$在区间 I 上单调增加(或单调减少),与区间 I 相对应的值域为 V_f,那么在区间 I 上必存在反函数$x=f^{-1}(y)$,它在 V_f 上也是单调增加(或单调减少)的.

五、初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数和常量函数都称为基本初等函数.由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成的并用一个解析式表达的函数,称为初等函数.

1.2 极限

一、数列的极限

1.定义

设$\{u_n\}$是一个数列,A 为一个常数,如果对于任意的 $\varepsilon>0$,都存在着正整数 N,使得当

$n>N$时，恒有

$$|u_n - A| < \varepsilon$$

成立，则称 A 为数列 $\{u_n\}$ 的极限，记为

$$\lim_{n\to\infty} u_n = A.$$

此时，也称数列 $\{u_n\}$ 收敛于 A. 如果数列没有极限，则称数列发散.

2. **性质**

(1) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A$，则极限值 A 是惟一的.

(2) 如果数列 $\{u_n\}$ 收敛，则数列 $\{u_n\}$ 必有界.

二、函数的极限

1. **定义**

(1) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域内有定义(在 x_0 点，$f(x)$ 可以无定义)，A 为常数，如果对于任给的 $\varepsilon>0$ 都存在正常数 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $|x|$ 充分大时有定义，A 为常数，如果对于任给的 $\varepsilon>0$ 都存在 $N>0$，使得当 $|x|>N$ 时，恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

(3) 如果 $x<x_0$，且 $x\to x_0$，记为 $x\to x_0^-$；类似地，如果 $x>x_0$，且 $x\to x_0$，记作 $x\to x_0^+$，于是

$$f(x_0-0) = \lim_{x\to x_0^-} f(x),\ f(x_0+0) = \lim_{x\to x_0^+} f(x),$$

分别称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左极限和右极限.

当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限存在的充要条件是等式

$$f(x_0-0) = f(x_0+0)$$

成立.

1. **无穷小量与无穷大量**

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$(或 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$)，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时为无穷小量.

(2) 若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x) = +\infty$(或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} f(x) = -\infty$)，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时为无穷大量.

(3) 无穷小量与无穷大量的关系为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时，若函数 $f(x)$ 是无穷大，则

$\frac{1}{f(x)}$是无穷小;若 $f(x)$是无穷小,且 $f(x)\neq 0$,则$\frac{1}{f(x)}$是无穷大.

3.海涅定理

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$ 的充要条件是对于 $x_n\to x_0, x_n\neq x_0$(或$x_n\to\infty$)的任意数列$\{x_n\}$,都有

$$\lim_{\substack{x_n\to x_0\\(x_n\to\infty)}} f(x_n)=A.$$

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$的充要条件是对于 $x_n\to x_0, x_n\neq x_0$(或$x_n\to\infty$)的任意数列$\{x_n\}$,都有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\infty.$$

三、函数极限的性质与运算

1.极限与函数的关系

1) 同号性　若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,且 $A>0$(或 $A<0$),则一定存在 x_0 的一个邻域,在此邻域内 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

2) 有界性　若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,则一定存在 x_0 的一个邻域,在此邻域内函数 $f(x)$有界.

2.极限与无穷小的关系

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$ 的充要条件是 $f(x)$可以表示为:

$$f(x)=A+\alpha(x),\text{其中} \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \alpha(x)=0, A \text{ 为某常数}.$$

3.无穷小的性质

设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \alpha(x)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \beta(x)=0$,则

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} [\alpha(x)\pm\beta(x)]=0$;

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \alpha(x)\beta(x)=0$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} u(x)\alpha(x)=0$, $u(x)$是有界的;

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \frac{\alpha(x)}{u(x)}=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} u(x)=A\neq 0$.

4.极限的四则运算定理

设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=B$,则

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} [f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)\pm\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[f(x)g(x)]=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=A\cdot B$;

特别是，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[cf(x)]=c\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)$，$c$ 为常数，及 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[f(x)]^n=[\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)]^n$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)}=\dfrac{A}{B}$，$B\neq 0$.

四、极限存在的准则

1. 夹挤准则

若对于 x_0 的某一邻域内(或$|x|>N,N>0$)，有

$$F(x)\leqslant f(x)\leqslant G(x)$$

成立，且

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}F(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}G(x)=A$，则

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$.

2. 单调有界准则

如果数列$\{u_n\}$单调且有界，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 一定存在.

五、两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

六. 无穷小量的比较与等价无穷小代换

1. 无穷小量的比较

设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\alpha=0$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\beta=0$，

(1) 如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha}{\beta}=k(k\neq 0)$，则 α 与 β 是同阶无穷小;

(2) 如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha}{\beta}=0$，则 α 是比 β 的高阶无穷小;

(3) 如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha}{\beta}=\infty$，则 α 是比 β 的低阶无穷小;

(4) 如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha}{\beta}=1$，则 α 与 β 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$.

2. **几个等价无穷小**

当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$；$\tan x\sim x$；$\ln(1+x)\sim x$；$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$；$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x$；

$e^x-1\sim x$.

3. **等价无穷小的代换定理**

若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在，则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{\alpha}{\beta}=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{\alpha'}{\beta'}.$$

1.3 函数的连续性

一、函数在一点处的连续性

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

二、函数的间断点

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点.

间断点的类型：

(1) 如果 $f(x_0-0)$、$f(x_0+0)$ 都存在，但 $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点.

特别地，如果 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点.

(2) 如果 $f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 中至少有一个不存在，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

(3) 如果 $f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 中至少有一个为 ∞，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的无穷间断点. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 因振荡而不存在，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的振荡间断点.

三、连续函数的性质

(1) 连续函数的和、差、积、商(分母不为零)仍是连续函数；

(2) 单调连续函数的反函数是连续的；

(3) 连续函数的复合函数是连续的；

(4) 基本初等函数在其定义域内是连续的；

(5) 一切初等函数在其定义区间上是连续的.

四、连续函数在闭区间上的性质

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

(1) $f(x)$在$[a,b]$上有界，即存在一个 $M>0$，使得$|f(x)|\leqslant M, x\in[a,b]$；

(2) $f(x)$在$[a,b]$上有最大值和最小值；

(3) $f(x)$可取到两个给定函数值之间的所有中间值，即如果 $f(x_1)=A, f(x_2)=B$，$(a\leqslant x_1<x_2\leqslant b)$，且 $A\neq B$，则对于 A, B 之间的任意数C，至少存在一点 $\xi\in(x_1,x_2)$，使得 $f(\xi)=c$.

特别地，若 $f(a)$与 $f(b)$异号，则在开区间(a,b)内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=0$.

Ⅱ 典型例题

例 1 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|x|-1}}$

解 要使 $f(x)$有意义，x 必须满足

$$|x|-1>0,$$

解得

$$x<-1 \text{ 或 } x>1.$$

因此，$f(x)$的定义域为$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

(2) $f(x)=\sqrt{\lg\dfrac{3x-x^2}{2}}$

解 要使 $f(x)$有意义，x 必须满足

$$\begin{cases}\dfrac{3x-x^2}{2}>0\\ \lg\dfrac{3x-x^2}{2}\geqslant 0\end{cases}$$

解得

$$1\leqslant x\leqslant 2.$$

因此，$f(x)$的定义域为$[1,2]$.

(3) $f(x)=\sqrt{1-2x}+\arcsin\dfrac{3x-1}{2}$

解 要使 $f(x)$有意义，x 必须满足

$$\begin{cases}1-2x\geqslant 0,\\ \left|\dfrac{3x-1}{2}\right|\leqslant 1,\end{cases}$$

解得

$$-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}.$$

因此，$f(x)$的定义域为$\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right]$.

(4) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2(1-x^2)}{6-x-x^2}}$

解 要使 $f(x)$ 有意义，x 必须满足

$$\frac{1-x^2}{6-x-x^2}=\frac{(1-x)(1+x)}{(3+x)(2-x)}\geqslant 0,$$

解得

$$x\in(-\infty,-3)\cup[-1,1]\cup[2,+\infty).$$

因此，$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,-3)\cup[-1,1]\cup[2,+\infty)$.

例 2 求下列函数的反函数：

(1) $y=2^{x-1}$

解 函数 $y=2^{x-1}$ 的值域为 $(0,+\infty)$. 对其两边取对数，得

$$\log_2 y=x-1,$$

反解得

$$x=1+\log_2 y.$$

交换 x,y 的位置，得到 $y=2^{x-1}$ 的反函数

$$y=1+\log_2 x,x>0.$$

(2) $y=\begin{cases}1+x^2, & 当\ x>0\\ 0, & 当\ x=0\\ -1-x^2, & 当\ x<0\end{cases}$

解 当 $x>0$ 时，$y=1+x^2$ 的值域为 $(1,+\infty)$，故它的反函数为

$$y=\sqrt{x-1},x>1.$$

当 $x<0$ 时，$y=-1-x^2$ 的值域为 $(-\infty,-1)$，故它的反函数为

$$y=-\sqrt{-x-1},x<-1.$$

由此，函数 $y=f(x)$ 的反函数为

$$y=\begin{cases}\sqrt{x-1}, & 当\ x>1,\\ 0, & 当\ x=0,\\ -\sqrt{-x-1}, & 当\ x<-1.\end{cases}$$

例 3 设 $f(x)=\begin{cases}-x^2, & x<-1\\ 1+2x, & x\geqslant -1\end{cases}$

求 $f^{-1}(x),f(f(x))$.

解 当 $x<-1$ 时，$y=-x^2$；当 $y<-1$ 时，

反解得 $x=-\sqrt{-y}$，即有

$$f^{-1}(x)=-\sqrt{-x},x<-1.$$

当 $x\geqslant -1$ 时，$y=2x+1,y\geqslant -1$,

反解得 $x=\dfrac{y-1}{2}$，即有

$$f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2},x\geqslant -1.$$

综上有 $f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x}, & x<-1,\\ \dfrac{x-1}{2}, & x\geqslant -1.\end{cases}$

又当 $x<-1$ 时，$f(x)=-x^2<-1$，

所以 $f(f(x))=-[-x^2]^2=-x^4$.

当 $x\geqslant-1$ 时，$f(x)=1+2x\geqslant-1$，

所以 $f(f(x))=1+2(1+2x)=4x+3$.

综上有 $f(f(x))=\begin{cases}-x^4, & x<-1,\\ 4x+3, & x\geqslant-1.\end{cases}$

例 4 判断下列函数中哪些是奇函数，哪些是偶函数，哪些是非奇非偶函数：

(1) $f(x)=\cos x^{\sin x}$

(2) $f(x)=x\ln\dfrac{1-x}{1+x}$

(3) $f(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x<0\\ \mathrm{e}^{x}-1, & x>0\end{cases}$

(4) $f(x)=\left(\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^{x}+\left(\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^{x}$

解 (1) $f(x)=\cos x^{\sin x}$ 非奇非偶函数.

(2) $f(x)=x\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ 偶函数.

因为 $f(-x)=-x\ln\dfrac{1+x}{1-x}=x\ln\dfrac{1-x}{1+x}=f(x)$，

故 $f(x)$ 为偶函数.

(3) $f(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x<0\\ \mathrm{e}^{x}-1, & x>0\end{cases}$ 奇函数.

因为

$$f(-x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{x}, & -x<0,\\ \mathrm{e}^{-x}-1, & -x>0,\end{cases}$$

即有

$$f(-x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{x}, & x>0,\\ \mathrm{e}^{-x}-1, & x<0,\end{cases}$$

即 $f(-x)=-f(x)$，

故 $f(x)$ 为奇函数.

(4) $f(x)=\left(\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^{x}+\left(\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^{x}$ 偶函数.

因为 $f(-x)=\left(\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^{-x}+\left(\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^{-x}=(2+\sqrt{3})^{x}+(2-\sqrt{3})^{x}=f(x)$，

故 $f(x)$ 为偶函数.

例 5 设 $f(x)$ 满足条件 $2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{a}{x}$（$a$ 为常数），证明 $f(x)$ 是奇函数.

证明 因为 $2f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{a}{x}$ (1)