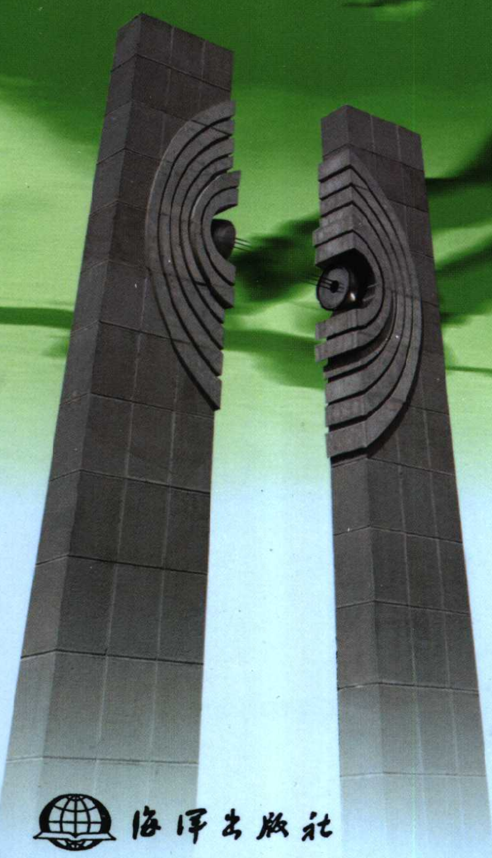
新突破

奥林匹克专题讲座
新突破

主编 齐振东 薛 道

AOLINPIKE



高中数学

（下）

海洋出版社

奥林匹克 专题讲座新突破

高中数学

（下）

主　　编　齐振东　薛　遒
本册主编　徐宝计　贝嘉禄

海洋出版社

2002年·北京

图书在版编目(CIP)数据

奥林匹克专题讲座新突破. 高中数学. 下 / 齐振东, 薛遒主编. - 北京: 海洋出版社, 2002.9

ISBN 7 - 5027 - 1115 - 5

Ⅰ. 奥… Ⅱ. ① 齐…② 薛 … Ⅲ. 数学课 - 高中 - 教学参考资料 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 064984 号

责任编辑: 李向义
责任校对: 张丽萍
责任印制: 刘志恒

海洋出版社 **出版发行**

http://www.oceanpress.com.cn

(100081 北京市海淀区大慧寺路 8 号)

北京四季青印刷厂印刷

2002 年 9 月第 1 版 2002 年 9 月北京第 1 次印刷

开本: 880×1230 1/32 印张: 10.375

字数: 262 千字 印数: 1～7000 册

定价: 13.00 元

前　言

为了帮助热爱数学学科的学生学好数学课程，夯实知识基础和提高综合素质，我们结合全国知名奥校、北京西城区教研中心、北京四中及徐州市部分重点学校的教学经验，将自己多年来讲课的讲义，按照奥赛的发展方向及要求，经过严格的教研论证，依据教育部新颁“教学大纲”和“竞赛大纲”，组织编写了《奥林匹克专题讲座新突破》丛书（高中数学）部分〈上、下册〉。本书与“大纲”同步，紧密配合本学科的教学进度，选择基础性强、针对性强、应用性广的重点教学内容作为专题，选题注重学生综合能力的培养，力求创新和突破，并注重广度和深度，例题讲解富有启发性。

本书内容由基础知识、典型例题解析、课后练习、答案及提示等部分组成。本书立足高考，着眼竞赛，在落实高考范围内的重点、难点、疑点知识的同时，更好地了解竞赛提出的新内容、新要求。重点放在了带普遍性的思维训练上，着重分析解题思路，兼顾特殊的解题方法与技巧，提供了足够的自我训练材料。编者多年一直在中学数学教学第一线，对教学和奥林匹克竞赛有着丰富的经验，相信会对广大中学生学习数学、高考及奥林匹克竞赛取得好成绩有一定帮助。

由于水平所限，书中如有不妥之处，望读者不吝赐教。

编　者

2002 年 8 月

编 委 会

目　录

第十二讲　不等式

不等式是中学数学中非常重要的内容．在利用不等式的性质来处理有关不等式的具体问题时，最终归结为两类问题：一类问题是解不等式；另一类问题是不等式的证明．

不等式的性质和重要不等式是解决这两类问题的关键，必须正确理解，熟练掌握．

【基础知识】

一、不等式的定义

(1) 用不等号($<$，$>$，$\neq$，$\leqslant$，$\geqslant$)连接两个实数值函数解析式的式子，叫做不等式．

(2) 分类：

按运算分类：

$$\text{解析不等式}\begin{cases}\text{代数不等式}\begin{cases}\text{有理不等式}\begin{cases}\text{整式不等式}\\\text{分式不等式}\end{cases}\\\text{无理不等式}\end{cases}\\\text{超越不等式}\begin{cases}\text{对数不等式}\\\text{三角不等式}\\\text{反三角函数不等式}\end{cases}\end{cases}$$

二、研究不等式的基础——实数性质

① a 是正数$\Leftrightarrow a>0$，b 是负数$\Leftrightarrow b<0$；

② 当 $a>0$ 且 $b>0$ 时，$|a|>|b|\Leftrightarrow a>b$；

当 $a<0$ 且 $b<0$ 时，$|a|>|b|\Leftrightarrow a<b$；

③ $a>0 \Leftrightarrow -a<0$, $b<0 \Leftrightarrow -b>0$;

④ 设 $a,b\in R$,则 $a<b$, $a=b$, $a<b$ 三种关系中有且只有一种成立(三分律);

⑤ $a-b>0 \Leftrightarrow a>b$,

$a-b=0 \Leftrightarrow a=b$,

$a-b<0 \Leftrightarrow a<b$;

⑥ $a>0$ 且 $b>0 \Rightarrow a+b>0$, $a<0$ 且 $b<0 \Rightarrow a+b<0$;

⑦ $a>0,b>0$ 或 $a<0,b<0 \Leftrightarrow ab>0$,

$a>0,b<0$ 或 $a<0,b>0 \Leftrightarrow ab<0$.

三、不等式的性质

性质 1 反身性 若 $a>b$,则 $b<a$.

性质 2 传递性 若 $a>b$, $b>c$,则 $a>c$.

如果 $a>b$, $b>c$,那么 $a-b>0$, $b-c>0$,而

$$a-c=(a-b)+(b-c)>0$$

所以 $a-c>0$, $a>c$.

性质 3 平移性 若 $a>b$,则 $a+c>b+c$.

如果 $a>b$,那么 $a-b>0$,而

$$(a+c)-(b+c)=a-b>0$$

所以$(a+c)-(b+c)>0$, $a+c>b+c$.

推论 1 不等式中任意一项都可以把它的符号变成相反的符号后,从一边移到另一边.

推论 2 如果 $a>b$, $c>d$,那么 $a+c>b+d$.

推论 3 如果 $a\geqslant b$, $c<d$,那么 $a-c>b-d$.

性质 4 伸缩性 若 $a>b$, $c>0$,则 $ac>bc$;

若 $a>b$, $c<0$,则 $ac<bc$.

推论 1 如果 $a>b>0$, $c>d>0$,那么 $ac>bd$.

推论 2 如果 $a>b>0$,那么 $a^n>b^n$(其中 n 是大于 1 的整数)

推论 3 如果 $a>b>0$,那么$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$(其中 n 是大于 1 的整数)

推论 4　如果 $a \geqslant b>0, 0<c<d$，那么$\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$.

推论 5　如果 $a>b>0$，那么$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

四、不等式的同解原理

(1) 同解不等式

如果不等式 $f(x)>g(x)$的所有解，都是不等式 $f_1(x)>g_1(x)$的解，而不等式 $f_1(x)>g_1(x)$的所有解，都是不等式 $f(x)>g(x)$的解，那么把这两个不等式叫做同解不等式.

(2) 不等式的同解原理

① 同解原理 1　不等式的两边都加上(或减去)同一个数或同一个整式，所得的不等式与原不等式是同解不等式.

如果对不等式 $f(x)>g(x)$的可能取值，代数式 $h(x)$都有意义，那么不等式 $f(x)>g(x)$和 $f(x)+h(x)>g(x)+h(x)$同解.

② 同解原理 2　不等式的两边都乘以(或除以)同一正数，所得的不等式与原不等式是同解不等式.

如果对不等式 $f(x)>g(x)$的可能取值，代数式 $h(x)$都有意义，且值都为正，那么不等式 $f(x)>g(x)$和 $f(x) \cdot h(x)>g(x) \cdot h(x)$同解.

③ 同解原理 3　不等式的两边都乘以(或除以)同一负数，并且把不等号改变方向后，所得的不等式与原不等式是同解不等式.

如果对不等式 $f(x)>g(x)$的可能取值，代数式 $h(x)$都有意义，且值都为负，那么不等式 $f(x)>g(x)$和 $f(x) \cdot h(x)<g(x) \cdot h(x)$同解.

④ 同解原理 4　如果函数 $f(x), g(x)$有共同定义域，并且在定义域的某个子集上恒有 $f(x)>0, g(x)>0$，那么不等式 $f^n(x)>g^n(x)$ (n 是大于 1 的整数)与不等式 $f(x)>g(x)$在这个子集上同解.

⑤ 同解原理 5　如果函数 $f(x), g(x)$有共同定义域，并且在定义域的某个子集上恒有 $f(x)>0, g(x)>0$，那么不等式 $\sqrt[n]{f(x)}>$

$\sqrt[n]{g(x)}$(n 是大于 1 的整数)与不等式 $f(x)>g(x)$在这个子集上同解.

⑥ 同解原理 6　不等式 $f(x)\cdot g(x)>0$ 与下面两个不等式组:

$$\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)<0 \end{cases}$$

同解.

⑦ 同解原理 7　不等式$\dfrac{f(x)}{g(x)}>0$ 与下面两个不等式组:

$$\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)<0 \end{cases}$$

同解.

⑧ 同解原理 8　不等式$|f(x)|<g(x)$与不等式组:

$$\begin{cases} f(x)<g(x) \\ -f(x)<g(x) \end{cases}$$

同解.

⑨ 同解原理 9　不等式$|f(x)|<|g(x)|$与下面两个不等式组同解:

$$\begin{cases} f(x)<g(x) \\ -f(x)<g(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x)<-g(x) \\ -f(x)<-g(x) \end{cases}$$

五、绝对值性质

① $|ab|=|a||b|$;

② $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$;

③ $-|a|\leqslant a\leqslant|a|$;

④ $|a|>r(r>0)\Leftrightarrow a>r$ 或$a<-r$;

⑤ $|a|<r(r>0)\Leftrightarrow -r<a<r$;

⑥ $|a|-|b|\leqslant|a+b|\leqslant|a|+|b|$;

⑦ $|a|-|b|\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$.

六、几个重要不等式

① 排序不等式

设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n, b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$（$n$ 是大于 1 的整数），则

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 \leqslant a_1 b_{i1} + a_2 b_{i2} + \cdots + a_n b_{in} \leqslant a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

（其中 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的任一个排列）；当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 或 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ 时，等号成立.

② 平均不等式

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为 n 个正数，（n 是大于 1 的整数），令

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \quad \text{（调和平均数）；}$$

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \quad \text{（几何平均数）；}$$

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \quad \text{（算术平均数）；}$$

$$Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2}{n}} \quad \text{（平方平均数）；}$$

则 $H_n \leqslant G_n \leqslant A_n \leqslant Q_n$；当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时，等号成立.

③ 切比雪夫不等式

如果 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n, b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$，那么

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}.$$

④ 柯西不等式

设 $a_i, b_i \in R\ (i = 1, 2, \cdots, n)$，则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2,$$

当且仅当 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ 时等号成立.

⑤ 琴生不等式

设 $f(x)$ 满足条件:对于任意 $x_1,x_2\in[a,b]$有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

当且仅当 $x_1=x_2$ 时等号成立.

则对于任意 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$有

$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\geqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$($n$ 是大于 1 的整数),当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时,等号成立.

【典型例题】

例 1. 解不等式$\frac{3x^2-4x-23}{x^2-9}>2$.

解:原不等式可以化为:

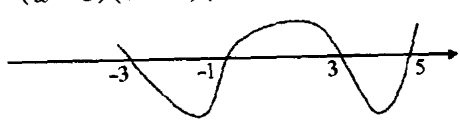
$$\frac{x^2-4x-5}{(x+3)(x-3)}>0,$$

即

$$\frac{(x+1)(x-5)}{(x+3)(x-3)}>0;$$

该不等式等价于下面不等式:

$$(x+3)(x+1)(x-3)(x-5)>0.$$



由“穿线法”可得原不等式的解集为:

$$\{x\mid x<-3\text{ 或 }-1<x<3\text{ 或 }x>5\}.$$

例 2. 解不等式:$\sqrt{2x+5}>x+1$.

解:因为 $2x+5\geqslant0$,所以 $x\geqslant-\frac{5}{2}$.

(1) 当 $x+1<0$,即 $x<-1$ 时,有:

$$\sqrt{2x+5}\geqslant0>x+1,$$

故原不等式的解为：$-\frac{5}{2}\leqslant x<-1$；

(2) 当 $x+1\geqslant 0$，即 $x\geqslant -1$ 时，两边平方，有：

$$2x+5>(x+1)^2=x^2+2x+1,$$

即
$$x^2<4,$$

解得：
$$-2<x<2;$$

故原不等式的解为 $-1\leqslant x<2$.

由(1)(2)知，原不等式的解集为 $\{x\mid -\frac{5}{2}\leqslant x<2\}$.

例 3. 求最大常数 k，使对于任何 $x,y,z\in R^{+}$，均有：

$$\frac{x}{\sqrt{y+z}}+\frac{y}{\sqrt{z+x}}+\frac{z}{\sqrt{x+y}}=k\sqrt{x+y+z}.$$

解： 首先令 $x=y=z=1$，得：$k\leqslant\sqrt{\frac{3}{2}}$.

下面证明：

$$\frac{x}{\sqrt{y+z}}+\frac{y}{\sqrt{z+x}}+\frac{z}{\sqrt{x+y}}\geqslant\sqrt{\frac{3}{2}(x+y+z)}.$$

由不等式对称性不妨设 $x\geqslant y\geqslant z>0$，则

$$\sqrt{x+y}\geqslant\sqrt{x+z}\geqslant\sqrt{y+z}.$$

再由切比雪夫不等式及柯西不等式有：

$$\begin{aligned}
&x\sqrt{y+z}+y\sqrt{z+x}+z\sqrt{x+y}\\
\leqslant&\frac{1}{3}(x+y+z)(\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}+\sqrt{x+y})\\
\leqslant&\frac{1}{3}(x+y+z)\cdot\sqrt{3[(y+z)+(z+x)+(x+y)]}\\
=&\frac{\sqrt{6}}{3}(x+y+z)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

而

$$[x\sqrt{y+z}+y\sqrt{z+x}+z\sqrt{x+y}][\frac{x}{\sqrt{y+z}}+\frac{y}{\sqrt{z+x}}+\frac{z}{\sqrt{x+y}}]$$
$$\geqslant(x+y+z)^2,$$

于是:
$$\frac{x}{\sqrt{y+z}}+\frac{y}{\sqrt{z+x}}+\frac{z}{\sqrt{x+y}}$$
$$\geqslant\frac{(x+y+z)^2}{\frac{\sqrt{6}}{3}(x+y+z)^{\frac{2}{3}}}$$
$$=\sqrt{\frac{3}{2}(x+y+z)}.$$

故 k 的最大值为$\frac{3}{2}$.

例 4. m 个互不相同的正偶数与 n 个互不相同的正奇数的总和为 1987,对于所有这样的 m 与 n,问 $3m+4n$ 的最大值是多少?

解: 设 $a_1+a_2+\cdots+a_m+b_1+b_2+\cdots+b_n=1987$,其中 $a_i(i=1,\cdots,m)$是 m 个互不相同的正偶数,$b_j(j=1,\cdots,n)$是 n 个互不相同的正奇数,则 n 一定是奇数,并且有
$$a_1+a_2+\cdots+a_m\geqslant 2+4+\cdots+2m=m(m+1),$$
$$b_1+b_2+\cdots+b_n\geqslant 1+3+\cdots+(2n-1)=n^2,$$
因此 $m^2+m+n^2\leqslant 1987$(其中 n 为奇数).

此式等价于
$$(m+\frac{1}{2})^2+n^2\leqslant 1987+\frac{1}{4}.$$

利用柯西不等式可得
$$[3(m+\frac{1}{2})+4n]^2$$
$$\leqslant(3^2+4^2)[(m+\frac{1}{2})^2+n^2]$$
$$\leqslant 5^2(1987+\frac{1}{4}),$$
则
$$3m+4n\leqslant[5\sqrt{1987+\frac{1}{4}}-\frac{3}{2}],$$
其中$[x]$表示 x 的整数部分,即

$$3m+4n\leqslant 221.$$

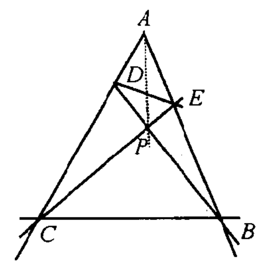
另外，当 $m=27, n=35$ 时，有

$m^2+m+n^2\leqslant 1987$，且 $3m+4n=221$.

所以对满足命题条件的 m 和 n，$3m+4n$ 的最大值为 221.

例 5. $S_{\triangle ABC}=1$，D，E 分别是边 AB，AC 上的点，BE，CD 相交于点 P，并且 $S_{BCDE}=2S_{\triangle PBC}$，求 $S_{\triangle PDE}$ 的最大值.

解： 设 $\dfrac{AD}{AB}=x$，$\dfrac{AE}{AC}=y$，则 $S_{\triangle ADE}=xy$，$S_{BCDE}=1-xy$，



$S_{\triangle PBC}=\dfrac{1}{2}(1-xy)$，

$$\frac{S_{\triangle PDE}}{S_{\triangle PBC}}=\frac{PE\cdot PD}{PB\cdot PC}=\frac{S_{\triangle APE}}{S_{\triangle ABP}}\cdot\frac{S_{\triangle APD}}{S_{\triangle APC}}$$

$$=\left(\frac{S_{\triangle APD}}{S_{\triangle ABP}}\right)\cdot\left(\frac{S_{\triangle APE}}{S_{\triangle APC}}\right)=xy.$$

因此 $S_{\triangle PDE}=\dfrac{1}{2}xy(1-xy)$.

由梅涅劳斯定理得

$$\frac{BP}{PE}\cdot\frac{EC}{CA}\cdot\frac{AD}{DB}=1,$$

于是有

$$\frac{BP}{PE}=\frac{1-x}{x(1-y)},$$

$$\frac{BP}{BE}=\frac{1-x}{x(1-y)+1-x}=\frac{1-x}{1-xy},$$

$$S_{\triangle BPC}=\frac{BP}{BE}\cdot S_{\triangle BCE}=\frac{BP}{BE}\cdot\frac{EC}{AC}\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{(1-x)(1-y)}{1-xy}.$$

下面只要求在条件：

$\dfrac{1}{2}(1-xy)=\dfrac{(1-x)(1-y)}{1-xy}$ 下，$S_{\triangle PDE}=\dfrac{1}{2}xy(1-xy)$ 的最大值.

令 $u=xy$，(由 $0<x,y<1$，得 $0<u<1$)，则条件转化为

$$\frac{1}{2}(1-u)^2=1+u-(x+y)\leqslant 1+u-2\sqrt{u}=(1-\sqrt{u})^2,$$

解得 $$0<\sqrt{u}\leqslant\sqrt{2}-1,$$
即 $$0<u\leqslant 3-2\sqrt{2}.$$

而二次函数 $f(u)=\frac{1}{2}u(1-u)$ 在 $(0,3-2\sqrt{2})$ 上是增函数，故最大值为：$f(3-2\sqrt{2})=5\sqrt{2}-7$.

因此，当 $x=y=\sqrt{2}-1$ 时，$xy=3-2\sqrt{2}$，$S_{\triangle PDE}$ 取得最大值，最大值为 $5\sqrt{2}-7$.

例 6. 已知 $0<p\leqslant a,b,c,d,e\leqslant q$. 求证：

$$(a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)\leqslant 25+6\left(\sqrt{\frac{q}{p}}-\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2.$$

证明： 首先，考虑至少存在一个数（不妨设为 a）不等于 p 或 q，且保持 b,c,d,e 不变.

设 $$W=(a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right),$$
$$m=b+c+d+e,$$
$$n=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e},$$

则 $$W=(a+m)\left(\frac{1}{a}+n\right)=1+mn+an+\frac{m}{a},$$
$$\left(na+\frac{m}{a}\right)-\left(np+\frac{m}{p}\right)=(a-p)\left(n-\frac{m}{ap}\right),$$
$$\left(na+\frac{m}{a}\right)-\left(np+\frac{m}{q}\right)=(a-q)\left(n-\frac{m}{aq}\right),$$
$$a-p\geqslant 0,\ a-q\leqslant 0.$$

若 $n-\frac{m}{ap}\leqslant 0$，则
$$na+\frac{m}{a}\leqslant np+\frac{m}{p}.$$

若 $n-\frac{m}{ap}\geqslant 0$，则
$$n-\frac{m}{aq}>0,\text{且有}\quad na+\frac{m}{a}\leqslant nq+\frac{m}{q},$$

由此可见，把 a 调整为 p 或 q，W 才能取得它的最大值，同理把 b，c，d，e 中不等于 p 或 q 的数也调整为 p 或 q.

假设 a,b,c,d,e 中有 k 个取值 p，另外 $(5-k)$ 个取值 q $(0\leqslant k\leqslant 5, k\in Z)$，则

$$\begin{aligned}W&=[kp+(5-k)q]\left[\frac{k}{p}+\frac{5-k}{q}\right]\\&=k(5-k)\left(\sqrt{\frac{q}{p}}-\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2+25\\&\leqslant 25+6\left(\sqrt{\frac{q}{p}}-\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2.\end{aligned}$$

当 $k=2$ 或 $k=3$ 时取等号，于是：

$$(a+b+c+d+e)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)\leqslant 25+6\left(\sqrt{\frac{q}{p}}-\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2,$$

其中等号当且仅当 $a_i(i=1,2,3,4,5)$ 中有两数或三数为 p，其余等于 q 时成立.

例 7. 求 $S=\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\cdots+\sin^2\theta_n$ 的最大值，其中

$$0\leqslant\theta_i\leqslant\pi,\ \theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n=\pi.$$

解： 此题等价于：

圆内接多边形各边所对圆心角为 $2\theta_i$，求圆内接多边形各边平方和的极大值.

圆内接多边形各边的平方和，既与多边形的边数有关，又与多边形的形状有关. 因此，最大值极有可能在圆内接三角形特别是正三角形时达到.

(1) 若 $n\geqslant 4$，则必有一角大于或等于 $90°$，令 A,B,C 为圆内接多边形的三个连续的顶点，且 $\angle B\geqslant 90°$，则由余弦定理得

$$AB^2+BC^2=AC^2+2AB\cdot BC\cos\beta\leqslant AC^2.$$

那么可以令 B 与 A 点或 C 点重合时，S 值不减，即令 $\theta_1=0$，重复进行上述过程，可见只有 $n=3$ 或 2 时，S 取极大值.

(2) 当 $n=2$ 时，S 的最大值显然为 2.