

數理經濟學

Mathematical Economics

(上册)

R. G. D. Allen 著
毛育剛 譯

4109000

經濟學名著翻譯叢書第八十一種

數理經濟學(上册)

中華民國六十二年九月出版

- 原著者 R. G. D. Allen
- 翻譯者 毛 育 剛
- 編印者 臺灣銀行經濟研究室
臺北市重慶南路
- 發行者 臺灣銀行
臺北市重慶南路
- 經售者 中華書局
臺北市重慶南路
- 中央文物供應社
臺北市仁愛路
- 印刷者 臺灣銀行印刷所
臺北市青島東路

譯 序

就開始翻譯的時間先後來說，這本「數理經濟學」是我所翻譯的第二本有關經濟學的書，但就脫稿的時間而言，這是第三本書。第一本是 H. H. Liebhafsky 所著的「價格原論」(The Nature of Price Theory)，完成於1969年，已由臺灣銀行經濟研究室出版，列為經濟學名著翻譯叢書第四十六種。第二本是 Warren Smith 所著的「總體經濟學」(Macroeconomics)，係受國立編譯館之託而翻譯的，完成於1972年6月，並已於同年10月由環球書局出版。這本「數理經濟學」由1969年開始翻譯，歷時三年有餘，到今天才脫稿，所費時間既長，所耗心血亦多，而結果則最難令人滿意，我當時自不量力應允翻譯此書，實難辭其咎。

翻譯「數理經濟學」這一類的書，譯者在數學及經濟理論方面都必須有高深的造詣，而我在這兩方面的條件均嫌不足，因此譯來不能得心應手，自知錯誤必多。基於此一原因，我相信翻譯這本書的工作如由他人來從事，其成績一定比我好。

原書有三個附錄，附錄 A 與 B 是關於數學方法的，附錄 C 則為題解。由於所佔篇幅很多，所以我決定祇翻譯附錄 A 而將其餘兩個附錄從略，而且原書第一版也是沒有附錄 B 的。因此我相信如此安排，對本書的價值不會有絲毫影響，尚請讀者見諒。

在翻譯本書的過程中，我的研究助理凌國寧、邊裕淵及陳幼麴都曾給予很大的協助，如果沒有她們的協助，這本書的完成至少還會再遲延一段很長的時間，我在此向她們表示衷心的謝意。內子陳正娟女士日常為我處理各種雜務，使我有充分的時間可以從事研究和翻譯工作。稿成之後她又往往利用深夜在燈下為我謄清譯稿，她對本書的貢獻，實在不比我少。除借此表示我對她最誠摯的謝意外

初版序

本書係由三股思想孕育而成，我開始對數理經濟學發生興趣乃在1930年代早期，當時我覺得研究數理經濟學必須精通微積分，所以我寫成一本教科書，稱為經濟數學 (*Mathematical Analysis for Economists* 1938) 在該書中我沒有介紹高等代數，亦未應用任何複素數，我欲將這些數學部門與其他我心目中經濟學上之特殊應用一起來介紹，以後矩陣代數、向量及複素數，作業方法、以及其他數學方法在數理經濟上的應用，有極大的發展，我個人的觀點認為尚沒有一本高等代數及作業方法的教科書，可以適合於經濟學家。

近二十年來的第二種發展為計量經濟學 (Econometrics) 之成長。由於其發展如此快速，使我擔憂對於統計學家具有經濟計量意義的經濟理論之發展，可能會有嚴重的落伍現象。經濟理論必須可以用數學來表示，但要愈簡單愈好。

最後，近二十年來經濟思想方向的改變亦已引起經濟理論結構的重大變革，此乃受 Keynes 著作影響之故。我認為此時此地真正有需要將「新」經濟學加以綜合，並對經濟理論之形式及範圍作平心靜氣的檢討。

由於心中想到這些事，我認為我的最佳貢獻不是擴充1938年所寫的教科書，而係寫一本完全不同的書，以數學來說明經濟理論的書。本書不是經濟數學，亦非經濟計量學。本書的目的在於對數理經濟學中比較重要而簡單的理論，作相當有系統之處理。我的難題是如何從浩瀚的經濟學中選擇適當的題目，使本書內容可以合於時代潮流而不致失之過於龐雜。雖則我所選擇者僅為個人感到特別重要的部份，但內容已有過多之感。讀者倘欲研究本書未能包羅的經濟理論或方法，我只得表示歉意。

我相信如果在五年前由我來寫此書，內容將有極大之不同。我不敢妄斷本書在多少年內可以合於潮流，但我認為本書所用之一些方法，在未來一段時間內，將繼續合宜。這些方法在此時而言是比較新穎的方法，有待加以融會並溶入一般經濟理論中。此外，我的寫作原則是從實際的經濟問題着手，並維持此種密切關係，我像其他經濟學家一樣，將經濟問題稍加簡化。然後用不太艱深的數學說明之。我預期這種方式無論現在或將來，均將受到經濟學家所重視。

如果沒有朋友們在我知識能力之外給予我大力的支援，我是無法寫成這樣一本書的，我要感謝同事們所給予的經常鼓勵與指導。特別是 Lionel Robbins 教授，James Meade 教授，David Knox 先生，Ralph Turvey 先生，W. M. Gorman 先生，以及 University of Birmingham 的 F. H. Hahn 博士等他們都曾閱讀本書的原稿。他們都已看出有寫一本內容與本書相同的書之需要，而他們都是最有資格寫這樣一本書的人，但他們謙讓給我寫而使我獨佔了市場。此外，我要感謝 Helen Makower 博士，G. Morton 博士，以及 A. W. Phillips 博士，讀者讀至本書中編及後編之各章後，就會明白我要向他們致謝的道理。

R. G. D. Allen

London School of Economics

再版序

我很高興有此機會將本書內容稍作修訂。第一，我已將原版中寫錯及印錯而校對時未發現者加以改正。第二，我已就全書之遺詞用字方面作了許多修正。我希望經此修訂後，使書中的說明可更清晰而精確。

第三，再版時我已加入一些參考資料，主要為1956年以後所出版之書籍及文章。在1957及1958兩年之內，有六本卓越的書籍出版，即 Goldberg 之差分方程式導論 (*Introduction to Difference Equations*, 1958)；Murdoch 之大學線型代數 (*Linear Algebra for Undergraduates*, 1957)；Kemeny, Snell 及 Thompson 之有限數學導論 (*Introduction to Finite Mathematics*, 1957)；Thrall 及 Tornheim 之向量空間與矩陣 (*Vector Space and Matrix*, 1957)；Luce 及 Raiffa 之賽局與決策 (*Games and Decision*, 1957) 以及 Dorfman, Samuelson 及 Solow 之線型設計與經濟分析 (*Linear Programming and Economic Analysis*, 1958) 這些書都無法以簡單數學敘述，其數學水準由中級至相當高級的水準，但就數理經濟學家之教育而言，每一本書均不能忽略。

最後我欲指出者，為我已完全重寫書中某些重要部份，如 1.9 及 5.8 關於動態模型之時間落後，2.3、10.3、17.1 及 17.9 關於一般經濟均衡，16.2 關於線型設計之對偶問題等。有關向量及矩陣各章中許多地方，亦經重新安排。我已就附錄 A 加以補充。此一附錄乃介紹實用之計算子及線型體系數學者。我又增添一新附錄 B，介紹現代代數，說明代數之發展，就某種意義上言，此為附錄 A 之補充。經濟理論學家在模型建立 (model-building) 時，對於近代代數學家之嚴格而公理化方法 (axiomatic approach) 將很有興趣，我希望此一附錄可以為本書所用之代數提供一些補充說明，因為為了

簡化起見，本書所用代數為介於兩者之間者。

我要感謝許多寫信給我指教的人士，特別要謝謝下列提出各種建議的人士：University of Copenhagen 之 Sven Dano, London School of Economics 之 Lucien Foldes, University of Birmingham 及 School of Business Administration, Minnesota 之 Maurice McManus, University College of the West Indies 之 Peter Newman 以及 Centro Per la Ricorca Economica ed Econometrica, Genoa 之 Ciro Tognettic 等。

R. G. D. Allen 於
University of California
Berkeley. 1959年 1 月

緒 言

數學技術可否或應否用於經濟學上，是常被談論之問題。布丁味之好壞，要去吃才知道。經濟學家讀過本書之後，應自己來評定以數學來表示一些重要之經濟理論，是否有助於他對於理論之瞭解，以及應用此等理論。

本書之目的，在就數理經濟學家已經寫過的某些經濟理論，作一綜合敘述。這是一本概論，但非入門書。本書之對象為經濟學家而至數學家，但讀者須具有一些數學基礎。

本書內容之順序與尋常不同，並未遵循傳統之方法。其目的是以數學方法說明一些經濟系學生所須處理之問題及一些與經濟生活之事實有關之問題。內容由一些相當簡單之問題討論起而慢慢漸及於比較複雜之問題。一般所稱：總體動態經濟學 (Macro-dynamic economics) 因為只須要考慮少數廣泛之綜合問題，比較單純，且從動態方面去討論，可以接觸到真實之問題，所以本書以此為起點。至於消費者、商廠或經濟計劃者之決策問題，須包含全部變數，故留在後面再討論。

然而本書所用之數學並非由淺入深，因為此乃經濟學課本而非數學課書。所用之數學技術很少可以遵循由淺入深之順序。1938年之拙著 *Mathematical Analysis for Economists* 及1954年 Tintner 所著 *Mathematics and Statistics for Economists* 兩書之內容，足以概括本書所用之數學，其中有相當份量之微積分與一些代數及幾何。但本書有時亦在適當之處，爲了介紹一些比較高深之數學技術，而將經濟發展之連貫性打斷。

尤有進者，本書為一本關於經濟理論之書籍，並非應用經濟學或計量經濟學，但有時仍會不可避免的涉及計量經濟，因為本書之重點，在討論與實際問題有關之經濟理論。本書希望一些經濟理論

可用實際資料來驗證，雖則此等資料常不够充分，無法供統計學家應用。本書中之某些經濟分析是由其原來之作著所設計，可立即供計量經濟應用，例如 Leontief (1951, 1953) 與 Koopmans (1951) 所做之經濟分析即是。有些經濟理論尚在驗證階段，只要有所需之資料，即可從事此種工作，如 Hicks (1950) 之經濟循環理論 (Trade Cycle Theories) 即是。

在依此劃定之一般範圍內，其處理方法可謂相當單純。總體動態經濟理論 (第一、二、三章) 之要點，顯示吾人須用微分方程 (Differential equation) 及定差方程式 (Difference equation)，在敘述擺動之變動時，則須應用複素數 (Complex variables) 與向量 (Vectors) (第四、五、六章)。在此基礎上，可以說明一些經濟循環之理論，由此可討論經濟規律之實際問題 (第七、八、九章)。接着為一般均衡分析 (General equilibrium analysis) 之說明，包括 Walras 之均衡分析與 Leontief 之投入產出分析 (第十、十一章)。至此吾人發現須用到許多向量及數陣代數 (Matrix algebra)，因此加以介紹 (第十二、十三、十四章)。同時認為賽局理論 (Theory of games) 在經濟問題上頗有用，所以接着予以說明 (第十五章)。再接着為線型設計 (Linear programming) 與決策理論 (第十六、十七章)。第十八章及十九章分別為廠商理論 (Theory of the firm) 與消費者理論 (Theory of the consumer)，最後一章則討論總合問題 (Problems in aggregation) 以及福利經濟學 (Economics of welfare) (第二十章)。

明顯的，本書之內容有許多是引自英美經濟學家之著作，如 Hicks, Samuelson, Hansen, Harrod, Leontief, Koopmans, 以及年青一代之 Barnea, Baumol, Domar, Dorfman, Duesenberry, Goodwin, Klein, Makower, Morton, Phillips, Solow, Turvey 等。作者在此向以上各位經濟學家深致謝意，但作者亦不必因為僅引用此少數經濟學家之著作而抱歉，因為這些作家之著作乃為作者所

熟悉，而這些著作亦將深印於本書讀者之心中。容易引起爭論者可能僅為本書之書名，由於本書所討論者屬於一般數理經濟學者較少，而多為一些目前受人注意之經濟理論，由英美經濟學家用數理之方式發展而成。

從章節內容所給予人之印象為本書僅包含一極小部份之經濟理論。書中很少或根本沒有討論到期望值 (Expectations)，或國際貿易 (International trade)，或部門分析 (Sector Analysis)。然而本書所討論之題目，雖則範圍不大，仍不失為一般經濟學說體系中之重點所在。其他題目如期望值或國際經濟學等，可從這些理論中發展而出。經濟循環與經濟規律之分析 (第七、八、九章)，以及線型設計與決策理論 (第十六、十七、十八、十九章) 等，大多為第二次世界大戰後之產物，它們將會成為經濟理論之中心，所有經濟學家至少應該知道這些理論之目的何在。

最後必須強調之一點是數理經濟學為應用數學，為數學與經濟學之混合物，數理經濟學中之各項結果，祇有經濟學家應用數學技術始能導引而得。其他應用數學之領域如工程方面亦然。經濟學家可從工程師處學到許多數學之應用及技術問題之設立等。

世人對於數學之本質及其應用方式有許多誤解。純粹數學 (Pure mathematics) 常被視為一種語彙，認為很容易用文字翻譯，事實上不然，數學實際上為一種特殊形式之邏輯或推論。一個數學證明可能很難用文字翻譯，雖則證明開始時之前提以及所獲得之結論能夠用文字說明。

數學教學中之專注於證明及最後之“Q. E. D.”，使人認為純粹數學可以證明理論，實則並無此事，數學祇是從前提演算到結果，而前提可能為任何內部一致 (self-consistent) 之一組公理 (Axioms) 而為任何人所樂於提出者。理論僅發生於某一特定之主題上，如經濟學或電機工程，甚至應用數學。所以理論是在前提外面罩以真實生活之外衣，亦用相同之方法來解釋邏輯及數學之結

果。數學上常認為如果前提正確，而在推理過程中沒有發生問題，則結果必成立。但在經濟學或其他領域內，此事不能視為理論之證明。理論必須以事實來驗證，不論其前提或結果都必須如此。倘驗證之結果發現理論與事實不符，理論即可被推翻。數學證明之本身，不能證明理論之是否成立，而祇能使理論暫時被接受，倘事實與理論無矛盾之處。因此，數理經濟學最好被視為一組特定的內部一致之公理所獲得之結果界以經濟內容之過程，證明不過是公理所建立之結果，而不應當作為理論之確立。

設數學僅不過為邏輯推理之一種形式而已，則吾人不禁要問，何以要用僅有少數人可懂之數學而不用多數人易懂之邏輯呢？這是一種效率問題，正如一個工程公司決定用推土機而不用圓鋤一樣。使用圓鋤常較簡單，同時可使人認為此等工具可做任何工作，但推土機往往是比較經濟之工具。數學就如邏輯說明中之推土機，使用時可能有利，亦可能無利。經濟現象異常複雜，數學中之推土機被認為是最有效率之工具。求理論與現實間最大之關係，或求簡化後與現實之距離最小，利用數學演算較為安全。一個經濟學家若欲憑實際內容建立一理論模型，最好採用外在數學之形式，設不如此將難逃失敗之危險，至少亦會忽視一些重要的可能性或事件，使得其模型之實際驗證工作更為艱難。

參 考 書 目

- Allais (M.) (1954) : "L'Utilisation de l'Outil-Mathématique en Economique", *Econometrica*, 22, 58-71.
- Allen (R. G. D.) (1938) : *Mathematical Analysis for Economists* (Macmillan, 1938) .
- Herstein (I. N.) (1953) : "Some Mathematical Methods and Techniques in Economics", *Quarterly Journal of Applied Mathematics*, 6, 249-62.
- Hicks (J. R.) (1950) : *A Contribution to the Theory of the Trade Cycle* (Oxford, 1950) .
- Koopmans (T. C.) (1951) : *Activity Analysis of Production and Allocation* (Wiley, 1951) .
- Leontief (W. W.) (1951) : *The Structure of American Economy, 1919-39* (Oxford, Second Ed. 1951) .
- Leontief (W. W.) (Editor) (1953) : *Studies in the Structure of the American Economy* (Oxford, 1953) .
- Leontief (W. W.) (1954) : "Mathematics in Economics", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 60, 215-33.
- Samuelson (P. A.) (1947) : *Foundations of Economic Analysis* (Harvard, 1947) .
- Samuelson (P. A.) (1952) : "Economic Theory and Mathematics -An Appraisal" *American Economic Review*, 42, 56-66.
- Samuelson (P. A.) and other (1954) : "Mathematics", *Review of Economics and Statistics*, 36, 359-86.
- Stigler (G. J.) (1949) : "The Mathematical Method in

Economics", in *Five Lectures on Economic Problems*
(Longmans, 1949) .

Tintner (G.) (1954) : *Mathematics and Statistics for Econo-*
mists (Constable, 1954) .

數理經濟學 目錄

譯 序	(1)
初版序	(3)
再版序	(5)
緒 論	(7)
第一章 蛛網及其他簡單動態模型	(1)
1.1 符 號	(1)
1.2 蛛網模型	(2)
1.3 一個簡單連續模型	(7)
1.4 這些模型之一般性質	(8)
1.5 經濟計量問題	(12)
1.6 蛛網模型之擴展	(14)
1.7 含有存貨之模型	(15)
1.8 市場均衡之安定性	(20)
1.9 動態模型中之時間落後	(24)
第二章 Keynes 與正統經濟學派：乘數原理	(35)
2.1 總體經濟之變數及其關係	(35)
2.2 Keynes 流動性偏好之成立	(39)
2.3 一般短期均衡	(43)
2.4 一個動態貨幣模型	(46)
2.5 以真實條件表示之總體經濟模型	(48)
2.6 靜態乘數	(51)
2.7 一個動態乘數模型	(54)
2.8 儲蓄與投資之關係	(60)

2.9	產品與生產要素市場	(62)
第三章	加速原理	(69)
3.1	自發與誘發投資	(69)
3.2	加速因子	(71)
3.3	Harrod-Domar 之成長理論	(74)
3.4	Phillips 之乘數模型	(79)
3.5	Phillips 之乘數與加速因子模型	(83)
3.6	Harrod-Domar 期間形式之成長理論	(86)
3.7	Samuelson-Hicks 之乘數與加速因子模型	(91)
3.8	累進均衡之可能性	(95)
3.9	分配之投資：期間與連續分析	(98)
第四章	數學分析之一：複素數	(105)
4.1	擺動概說	(105)
4.2	三角函數	(106)
4.3	向量及複素數	(111)
4.4	複素數之極軸與指數形式	(118)
4.5	複素數之代數運算	(122)
4.6	多項式及其方程式	(127)
4.7	正弦函數與擺動運動	(134)
4.8	正弦函數之向量組成	(140)
4.9	正弦變數之導數，積分及組合	(144)
第五章	數學分析之二：線型微分方程式	(153)
5.1	微分方程式	(153)
5.2	基本結果，原始條件與任意常數	(155)
5.3	線型微分方程式：一階式	(159)
5.4	線型微分方程式：二階式	(164)
5.5	線型微分方程式之一般式	(171)

5.6	Laplace 變換式	(177)
5.7	由 Laplace 變換式求解微分方程式	(184)
5.8	連續分配 (指數) 落後	(189)
5.9	$p = \alpha + iw$ 之應用	(194)
第六章 數學分析之三：線型差分方程式		(201)
6.1	差分方程式	(201)
6.2	離散解；基本結果	(204)
6.3	線型差分方程式：一階式	(209)
6.4	線型差分方程式：二階式	(213)
6.5	線型差分方程式之一般式	(219)
6.6	經濟分析	(224)
6.7	延遲、分配落後及乘數與加速因子	(229)
9.8	差分方程式之連續解	(235)
第七章 經濟循環理論：Samuelson-Hicks		(239)
7.1	峰度投資下之簡單乘數與加速因子模型	(239)
7.2	簡單模型之詳細解答	(243)
7.3	解答之解釋	(248)
7.4	經濟循環理論之應用	(250)
7.5	存貨循環	(253)
7.6	自發性投資之擺動	(256)
7.7	含有分配投資之更一般模型	(261)
7.8	峰度投資之分析	(263)
7.9	分配投資之分析	(267)
第八章 經濟循環理論：Goodwin, Kalecki 與 Phillips		(275)
8.1	引 論	(275)
8.2	Goodwin 模型：簡單情形	(277)

8.3	Goodwin 模型之推廣	(282)
8.4	Kalecki 模型：早期模型	(286)
8.5	差分—微分方程式之解	(290)
8.6	Kalecki 模型：後期模型	(295)
8.7	Phillips 模型：經濟調整	(298)
8.8	穩定政策	(306)
8.9	穩定政策之舉例說明	(311)
第九章 經濟調整：閉路迴線控制體系		(321)
9.1	圖型說明	(321)
9.2	一些以圖型形式表示之經濟模型	(324)
9.3	線型模型對於正弦投入之反應	(330)
9.4	反饋轉移函數	(337)
9.5	線型閉路迴線體系中之自由變動	(340)
9.6	工程師之方法：線型與非線型體系	(345)
9.7	閉路迴線體系之調整	(348)
9.8	經濟穩定政策	(351)
第十章 一般經濟均衡		(357)
10.1	交易之均衡	(357)
10.2	固定生產係數時之均衡	(360)
10.3	一般市場均衡	(363)
10.4	點計方程式	(367)
10.5	市場均衡之安定性	(369)
10.6	一些比較靜態問題	(374)
10.7	生產函數	(378)
10.8	以矩陣表示之生產函數	(382)
第十一章 產業關聯		(391)
11.1	產業之投入產出分析	(391)