

高等工程數學

習題及複習題詳解

1988年第六版

上 冊

E·克雷塞格 原著
駱效宗 譯著

曉園出版社
世界圖書出版公司

4
3
2
1

高等工程数学习题及复习题详解(第6版)(上册)

E. 克雷塞格 原著
骆效宗 译著

★

晓园出版社出版社

世界图书出版公司北京公司重印

北京朝阳门内大街 137 号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

★

1994年4月第 一 版 开本: 711×1245 1/24
1994年4月第一次印刷 印张: 30.5
印数: 0001-800 字数: 52.2 万字

ISBN 7-5062-1749-X/O·104

定价: 34.50 元 (W_{9311/4})

世界图书出版公司通过中华版权代理公司向台湾晓园出版社购得重印权
限国内发行

B38

高等工程数学习题及复习题详解(第6版)(中册)

E. 克雷塞格 原著

骆效宗 译著

*

晓园出版社出版

世界图书出版公司北京公司重印

北京朝阳门内大街137号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1994年4月第一版 开本: 711×1245 1/24

1994年4月第一次印刷 印张: 37.5

印数: 0001-800 字数: 67.5万字

ISBN 7-5062-1750-3/O·105

定价: 41.90元 (W_{9311/5})

世界图书出版公司通过中华版权代理公司向台湾晓园出版社购得重印权

限国内发行

前 言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與鋪路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

Kreyszig 高等工程數學詳解

(上册目錄)

第一章 一階常微分方程式 1

1. 一階微分方程式 1 / 2. 可分離微分方程式 12 / 3. 模式化：可分離方程式 20 / 4. 可簡化為分離變數型式的方程式 32 / 5. 恰當型微分方程式 47 / 5. 積分因子 64 / 7. 一階線性微分方程式 80 / 8. 模式化：電路 102 / 9. 曲線族：正交軌線 122 / 10. 近似解：方向場，量代法 138 / 11. 解之存在與唯一性 152 / 複習題 162

第二章 線性微分方程式 183

1. 齊次二階方程式 183 / 2. 二階齊次常微分方程式 194 / 3. 通解、基本解、初值問題 200 / 4. 特徵方程式的實根、複根及重根 214 / 5. 微分算子 226 / 6. 模式化：自由振動 234 / 7. 尤拉-柯西方程式 253 / 8. 解的存在與唯一性 261 / 9. 任意階線性常係數方程式 267 / 10. n 階常係數微分方程式 281 / 11. 非齊次方程式 288 / 12. 非齊次方程式：以未定係數法求解 296 / 13. 模式化：強迫振動、共振 308 / 14. 電路之模式化 319 / 15. 複數法求特解 335 / 16. 非齊次方程式：利用參數變化法求解 338 / 複習題 349

第三章 微分方程組、相位平面、穩定性 371

1. 微分方程組 371 / 2. 相平面 386 / 3. 臨界點、穩定性 396 / 複習題 408

第四章 微分方程式之冪級數解法，正交函數 421

1. 冪級數法 421 / 2. 冪級數法理論 427 / 3. Legendre's 方程式；Legendre's 多項式 442 / 4. 冪級數法之推廣。指示方程式 458 / 5. Bessel's 方程式。第一類 Bessel 函數 492 / 6. 第二類 Bessel 函數 508 / 7. 函數之正交集 521 / 8. Sturm-Liouville 問題 537 / 9. $P_n(x)$ 及 $J_n(x)$ 之正交性 547 / 複習題 572

第五章 拉卜拉氏變換 591

1. Laplace 變換、反變換；線性 591 / 2. 微分、積分之 Laplace 變換 605 / 3. s 軸及 t 軸上之平移；單位階梯函數 621 / 4. 進一步應用。 δ 函數 642 / 5. 變換後函數之微分與積分 650 / 6. 褶積。積分方程式 655 / 7. 部分分式。(聯立)微分方程組 671 / 8. 週期函數。進一步應用 683 / 複習題 710

Kreyszig 高等工程數學詳解

(中冊目錄)

第六章 向 量 729

2. 向量分量 729 / 3. 向量加法。純量之積 738 / 4. 向量空間
742 / 5. 內積(點積) 763 / 8. 向量叉積之分量 773 /
9. 純量三重積。其他多重積 787 / 複習題 797

第七章 矩陣與行列式 811

2. 矩陣的加法, 矩陣的純量積 811 / 3. 矩陣的乘法 824 / 4. 轉
置矩陣 836 / 5. 線性聯立方程式, 高斯消去法 846 / 6. 矩陣的
秩數 856 / 8. 反矩陣 863 / 9. 二階及三階行列式 875 /
10. 高階行列式 879 / 11. 行列式決定秩數, Cramer's Rule 884
/ 12. 特徵值, 特徵向量 901 / 13. 厄米特, 反厄米特矩陣及單位矩
陣 918 / 14. 厄米特, 反厄米特矩陣之特徵值 929 / 15. 特徵
向量的性質, 對角化 939 / 16. 聯立微分方程式 960 / 複習題 975

第八章 向量微分, 向量場 1003

1. 純量場與向量場 1003 / 2. 向量微積分 1014 / 3. 曲線 1023
/ 4. 切線弧長 1029 / 5. 速度與加速度 1039 / 6. 曲線的曲率與
扭率 1043 / 7. 多變數函數的連鎖法則與均值定理 1052 / 8. 方向
導數, 純量場的梯度 1060 / 9. 向量場之散度 1072 / 10. 向量場
之旋度 1079 / 複習題 1087

第九章 線與面積分、積分定理 1103

1. 線積分 1103 / 2. 雙重積分 1114 / 3. 平面之格林定理 1136
/ 4. 曲面上的面積分 1153 / 5. 面積分 1166 / 6. 三重積分、高
斯散度定理 1192 / 7. 散度定理更進一步的應用 1205 / 8. 司托
克士定理 1209 / 複習題 1236

第十章 傅立葉級數和積分 1259

- 1.週期函數與三角函數 1259 / 2.傅立葉級數 1275 / 3.任意週期 $P=2L$ 的函數 1302 / 4.奇函數與偶函數 1329 / 5.半幅展開式 1351 / 6.不用積分求傅立葉級數(跳躍法) 1375 / 7.強迫振動 1389 / 8.近似三角多項式,平方誤差 1404 / 9.傅立葉積分 1410 / 10.傅立葉餘弦轉換,傅立葉正弦轉換 1424 / 11.傅立葉轉換 1430 / 複習題 1436

第十一章 偏微分方程 1479

- 1.基本概念 1479 / 3.分離變數法(乘積法) 1491 / 4.波動方程式之達朗白解法 1501 / 5.熱流 1517 / 6.在無限長之桿內的熱流 1532 / 8.長方形薄膜 1542 / 9.以極座標所表之拉普拉斯運算 1555 / 10.圓形薄膜,貝色方程式 1570 / 11.拉普拉斯方程式;位勢論 1580 / 12.球面座標中之拉式方程式,勒壤得方程式 1586 / 13.應用於偏微分方程式之拉氏變換法 1597 / 複習題 1602

第一章 一階常微分方程式

1.1 節 一階微分方程式

指示出下列微分方程式的階數，且證明所給予的函數即為其解。

1. $y' + 8y = 0, y = ce^{-8x}$

解 一階微分方程式

$$\because y' = -8ce^{-8x}$$

$$\therefore y' + 8y = -8ce^{-8x} + 8(ce^{-8x}) = 0$$

故為其解。

2. $y'' = e^x, y = e^x + ax + b$

解 二階微分方程式

$$\because y' = e^x + a$$

$$y'' = e^x$$

$$\therefore y'' = e^x$$

故為其解。

3. $y'' + 16y = 0, y = A \cos 4x + B \sin 4x$

解 二階微分方程式

$$\because y' = -4A \sin 4x + 4B \cos 4x$$

$$y'' = -16A \cos 4x - 16B \sin 4x$$

$$\begin{aligned} \therefore y'' + 16y &= -16A \cos 4x - 16B \sin 4x \\ &\quad + 16(A \cos 4x + B \sin 4x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

故為其解。

4. $y' - y \cot x = 0, y = c \sin x$

解 一階微分方程式

$$\because y' = c \cos x$$

$$\therefore y' - y \cot x = c \cos x - c \sin x \cot x$$

$$= c \cos x - c \cos x$$

$$= 0$$

故為其解。

5. $y'' + 4y' + 5y = 0, y = e^{-2x} (A \cos x + B \sin x)$

解 二階微分方程式

$$\begin{aligned} \because y' &= e^{-2x} (-A \sin x + B \cos x) - 2e^{-2x} (A \cos x + B \sin x) \\ &= e^{-2x} [(-A - 2B) \sin x + (B - 2A) \cos x] \end{aligned}$$

2 高等工程數學詳解

$$\begin{aligned}
 y'' &= e^{-2x} [(-A-2B) \cos x - (B-2A) \sin x] \\
 &\quad - 2e^{-2x} [(-A-2B) \sin x + (B-2A) \cos x] \\
 &= e^{-2x} [(4A+3B) \sin x + (3A-4B) \cos x] \\
 \therefore y'' + 4y' + 5y &= e^{-2x} [(4A+3B) \sin x + (3A-4B) \cos x] \\
 &\quad + 4e^{-2x} [(-A-2B) \sin x + (B-2A) \cos x] \\
 &\quad + 5e^{-2x} (A \cos x + B \sin x) \\
 &= e^{-2x} [(4A+3B-4A-8B+5B) \sin x \\
 &\quad + (3A-4B+4B-8A+5A) \cos x] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

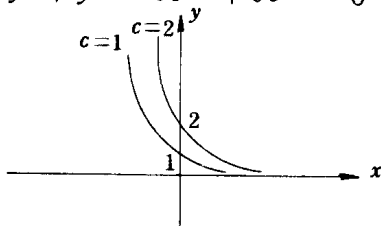
故為其解。

證明下列所給的函數是其對應的方程式之解，並選定一些常數 c ，繪出各函數所表示的圖形。

6. $y' + y = 0$, $y = ce^{-x}$

解 $y' = -ce^{-x}$

$\therefore y' + y = -ce^{-x} + ce^{-x} = 0$



7. $y' = -\frac{x}{y}$, $x^2 + y^2 = c$

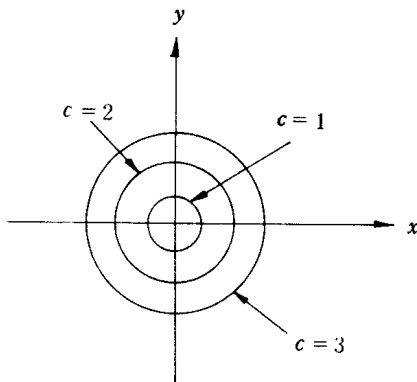
解 $y = \pm \sqrt{c - x^2}$

$y' = \frac{\mp x}{\sqrt{c - x^2}}$

$\therefore yy' = \pm \sqrt{c - x^2} \left(\frac{\mp x}{\sqrt{c - x^2}} \right)$

$= -x$

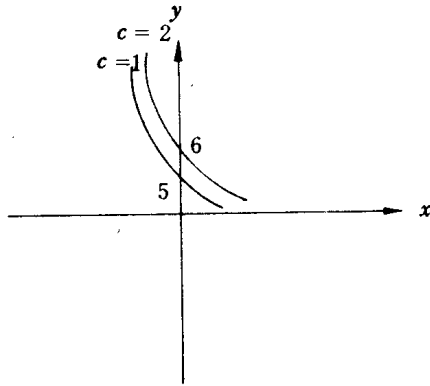
$y' = -\frac{x}{y}$



8. $y' + y = 5$, $y = ce^{-x} + 5$

解 $y' = -ce^{-x}$

$\therefore y' + y = -ce^{-x} + ce^{-x} + 5 = 5$



9. $y'^2 = 4y$, $y = 0$, $y = (x+c)^2$

解 ① $y = 0$

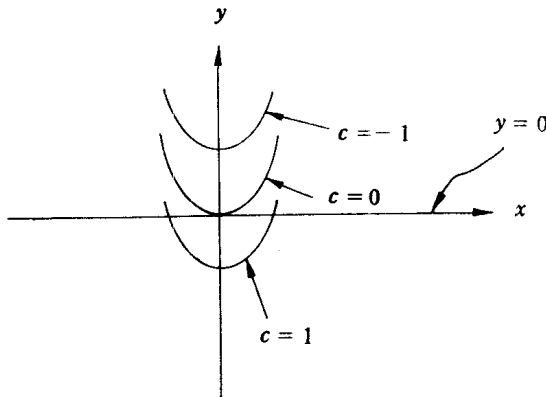
$$\therefore y' = 0$$

$$\therefore y'^2 = 0 = 4y$$

② $y = (x+c)^2$

$$\therefore y' = 2(x+c)$$

$$\therefore y'^2 = [2(x+c)]^2 = 4(x+c)^2 = 4y$$



求下列微分方程式之解

10. $y' = x^3$

解 $y' = \frac{dy}{dx} = x^3$

$$dy = x^3 dx$$

兩邊積分得

$$\int dy = \int x^3 dx \quad \therefore y = \frac{1}{4}x^4 + c$$

c 為常數

4 高等工程數學詳解

11. $y' = e^{-x/2}$

解 $y' = \frac{dy}{dx} = e^{-x/2}$, $dy = e^{-x/2} dx$

兩邊積分得

$$\int dy = \int e^{-x/2} dx \quad \therefore y = -2e^{-x/2} + c$$

c 為常數

12. $y' = \cos 3x$

解 $y' = \frac{dy}{dx} = \cos 3x$, $dy = \cos 3x dx$

兩邊積分得

$$\int dy = \int \cos 3x dx \quad \therefore y = \frac{1}{3} \sin 3x + c$$

c 為常數

13. $y'' = \sin 2x$

解 $y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \sin 2x$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} \cos 2x + c_1$$

$$\therefore y = -\frac{1}{4} \sin 2x + c_1 x + c_2$$

c_1, c_2 為常數。

在以下四題中，試求出一個僅含 y 與 y' 的一階微分方程式，使所給的函數為其解。

14. $y = e^{-2x}$

解 $y' = -2e^{-2x}$

$$\therefore y' \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-2x} = y \quad \therefore -\frac{1}{2} y' = y$$

因此 $y' + 2y = 0$ 為所需方程式

15. $y = \cos x$

解 $y' = -\sin x$

$$\therefore y' \cdot \cot x = -\cos x = -y$$

因此 $y' \cdot \cot x + y = 0$ 為所需方程式

16. $y = e^{-x^2}$

解 $y' = -2xe^{-x^2}$

$$\therefore y' \cdot \frac{-1}{2x} = e^{-x^2}$$

因此 $2xy + y' = 0$ 為所需方程式

17. $y = x^4$

解 $y' = 4x^3$

$$\therefore y' \cdot x = 4x^4 = 4y$$

因此 $xy' = 4y$ 為所需方程式

在以下五題中，證明所給的函數是其對應的方程式之解，並求出 c 值，使所得到的特解滿足所給的條件，然後，繪出此解的圖形。

18. $y' + y = 5$, $y = ce^{-x} + 5$, 當 $x = 0$ 時, $y = 4$

解 $y' = -ce^{-x}$

$$\therefore y' + y = -ce^{-x} + ce^{-x} + 5 = 5$$

故為其解

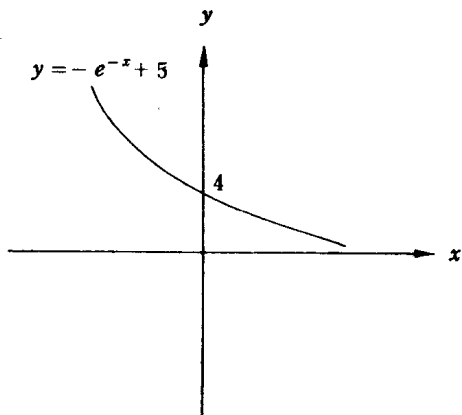
當 $x = 0$ 時, $y = 4$

代入方程式 $y = ce^{-x} + 5$

$$4 = c + 5$$

$$\therefore c = -1$$

故 $y = -e^{-x} + 5$



19. $y' = 2xy$, $y = ce^{x^2}$, 當 $x = 1$ 時 $y = \frac{1}{2}e$

解 $y' = 2cxe^{x^2}$

$$\therefore y' = 2x(ce^{x^2}) = 2xy$$

故為其解。

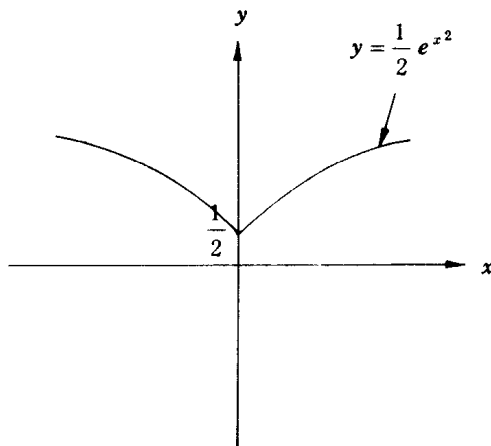
當 $x = 1$ 時 $y = \frac{1}{2}e$

6 高等工程數學詳解

代入方程式 $y = ce^{x^2}$

$$\frac{1}{2}e = ce \quad \therefore c = \frac{1}{2}$$

故 $y = \frac{1}{2}e^{x^2}$



20. $y' = y \cot x$, $y = c \sin x$, 當 $x = \frac{\pi}{2}$ 時 $y = 2$

解 $y' = c \cos x$

$$\therefore y' = c \sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = (c \sin x) \cdot \cot x = y \cot x$$

故為其解。

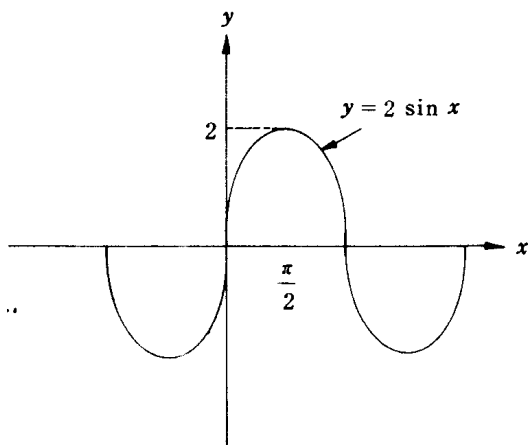
當 $x = \frac{\pi}{2}$ 時 $y = 2$

代入方程式 $y = c \sin x$

$$2 = c \sin \frac{\pi}{2} = c$$

$$\therefore c = 2$$

故 $y = 2 \sin x$



21. $xy' = 3y$, $y = cx^3$, 當 $x = -2$ 時 $y = 4$

解 $y' = 3cx^2$

$\therefore xy' = x \cdot 3cx^2 = 3cx^3 = 3y$

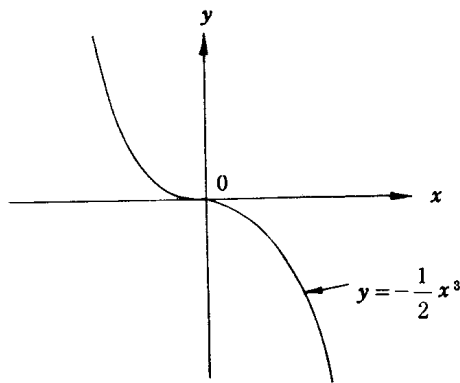
故為其解。

當 $x = -2$ 時 $y = 4$

代入方程式 $y = cx^3$

$4 = c(-2)^3 = -8c \quad \therefore c = -\frac{1}{2}$

故 $y = -\frac{1}{2}x^3$



22. $4yy' + x = 0$, $x^2 + 4y^2 = c$, 當 $x = 0$ 時 $y = 1$

解 $y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{c - x^2}$

$y' = \frac{\mp x}{2\sqrt{c - x^2}}$

$\therefore 4yy' + x = 4\left(\pm \frac{1}{2}\sqrt{c - x^2}\right)\left(\frac{\mp x}{2\sqrt{c - x^2}}\right) + x = 0$

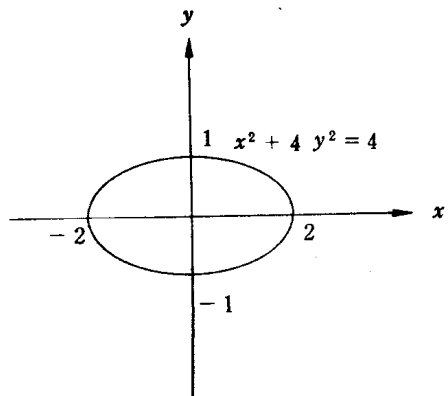
故為其解。

當 $x = 0$ 時 $y = 1$

代入方程式 $x^2 + 4y^2 = c$

$0 + 4 = c \quad \therefore c = 4$

故 $x^2 + 4y^2 = 4$



8 高等工程數學詳解

23. (半衰期) 一放射性物質的半衰期是指其消失一半的量之時間。在例題 5 中 ${}_{88}\text{Ra}^{226}$ 之半衰期為何? (以年為單位)

解 例題 5 中 $y(t) = 2e^{kt}$ 其中 $k \approx -1.4 \cdot 10^{-11} \text{ 秒}^{-1}$

$$\because y(0) = 2$$

$$\text{則半衰期為 } y(t) = 1 = 2e^{kt}$$

$$kt = \ln(0.5) = -0.69314718$$

$$\therefore t = \frac{-0.69314718}{-1.4 \times 10^{-11}} = 4.95 \times 10^{10} \text{ 秒}$$

$$= 1570 \text{ 年} \approx 1600 \text{ 年}$$

故 ${}_{88}\text{Ra}^{226}$ 之半衰期約為 1600 年

24. (半衰期) 鐳 ${}_{88}\text{Ra}^{226}$ 之半衰期為 3.64 日。今有 1 克鐳，請問一天後剩下多少克？一年後呢？

解 $y(0) = 1$ 令 $y(t) = e^{kt}$

半衰期為 3.64 日

$$\text{則 } 0.5 = y(t) = e^{3.64k}$$

$$k = -0.19$$

$$\text{一天後 } y(1) = e^{-0.19} = 0.83$$

$$\text{一年後 } y(365) = e^{-0.19 \times 365} = 7.6 \times 10^{-31}$$

故一天後仍有 0.83 克。一年後仍有 7.6×10^{-31} 克

25. (落體) 實驗顯示，若一物體在真空中因重力作用而落下，則其加速度是一常數（等於 $9.80 \text{ 米/秒}^2 = 32.1 \text{ 呎/秒}^2$ ，稱為重力加速度）試以一微分方程式描述此定律，設 $s(t)$ 是下落的距離為時間的函數。證明用此微分方程式，我們可以得到很熟悉的定律：

$$s(t) = \frac{g}{2} t^2$$

(實際上，祇要忽略空氣阻力，此式亦可應用到空氣中的自由落體上。例如：我們在離地面不甚高的地方丟一石子或鐵球)

解 因 $s(t)$ 為下落的距離，故其加速度為 $\frac{d^2s}{dt^2}$ ，依題意得知

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g$$

$$\text{其解為 } s(t) = \frac{1}{2} g t^2 + c_1 t + c_2$$

設 $t = 0$ 時，落下距離與初速度皆為零

$$\therefore c_1 = c_2 = 0$$

$$\text{故 } s(t) = \frac{1}{2} g t^2$$

26. 若在25.題中，物體在 $t = 0$ 時之初位置 $s = s_0$ ，初速度 $v = v_0$ ，試證其解為：

$$s(t) = \frac{g}{2} t^2 + v_0 t + s_0$$

解 由25.題得：

$$s(t) = \frac{1}{2} g t^2 + c_1 t + c_2$$

$$s(0) = c_2 = s_0$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = g t + c_1$$

$$v(0) = c_1 = v_0$$

$$\therefore s(t) = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + s_0$$

27. 一火箭垂直發射，在塔台發射初期時加速度為 $7t$ 米/秒²，在 $t = 10$ 秒時，引擎關閉，則此火箭可飛多高？（忽略空氣阻力）

解 第一階段：（前10秒）

$$v_1 = \int_0^t a dt = \int_0^t 7t dt = \frac{7}{2} t^2$$

$$v_{1f} = \frac{7}{2} \times (10)^2 = 350 \text{ m/sec}$$

$$S_1 = \int_0^t v_1 dt = \int_0^t \frac{7}{2} t^2 dt = \frac{7}{6} t^3$$

$$S_{1f} = \frac{7}{6} \times (10)^3 = \frac{7000}{6} = 1166.7$$

第二階段：祇受重力加速度 g

$$0 = v_{1f} - g t = 350 - 9.8 t, \quad g \text{ 為重力加速度}$$

$$\therefore t = 35.7$$

$$S_{2f} = v_{1f} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$= 350 \times 35.7 - \frac{1}{2} \times 9.8 \times (35.7)^2$$

$$= 6245 \text{ 米}$$

$$\therefore S = S_{1f} + S_{2f} = 1166.7 + 6245 = 7411.7 \text{ 米}$$

28. (飛機起飛) 有一飛機自一跑道長為 2 km 之機場起飛。若該飛機開始之初速為 10 m/sec，且在 50 秒內以等加速度跑完跑道全程。請問其起飛速度為何？

解 假設其加速度為 a ，移動距離為 x ，初速 $v = v_0 = 10 \text{ m/sec}$

$$\text{則 } \frac{d^2 x}{dt^2} = a = \text{常數}$$

$$\text{速度 } v = \frac{dx}{dt} = v_0 + at$$

$$\text{移動距離 } x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

50 秒內移動 2 km 即 2000 m，代入上式得

$$2000 = 10 \times 50 + \frac{1}{2} a \times 50^2$$

$$\therefore a = 1.2$$

則起飛速度為

$$v = v_0 + at = 10 + 1.2 \times 50 = 70$$

故起飛速度為 70 m/sec

29. (指數衰變；大氣壓力) 實驗顯示在高度 h 的大氣壓力 p 的變化率與大氣壓力成正比，假設在 6000 米（約 18000 呎）高的大氣壓力為海平面大氣

壓力 p_0 的 $\frac{1}{2}$ ，求任意高度的大氣壓力公式。

$$\text{解 } p' = -kp$$

$$\therefore \frac{dp}{dh} = -kp$$

$$p = ce^{-kh}$$

$$h = 0 \text{ 時, } p = p_0 \Rightarrow c = p_0$$

$$\therefore p = p_0 e^{-kh}$$

$$h = 6000 \text{ 時, } p = \frac{p_0}{2} \text{ 代入上式}$$