高等工程數學

習題及複習題詳解

1988年第六版

上 冊

E·克雷塞格 原著
駱效宗 譯著

曉園出版社
世界图书出版公司

高等工程数学习题及复习题详解(第 6 版)(上册)

E. 克雷塞格　原著

骆效宗　译著

晓园出版社出版社

世界图书出版公司北京公司重印

北京朝阳门内大街 137 号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

1994 年 4 月第　一　版　　开本：711×1245 1/24

1994 年 4 月第一次印刷　　印张：30.5

印数：0001－800　　字数：52.2 万字

ISBN 7－5062－1749－X/O · 104

定价：34.50 元 (W$_B$9311/4)

世界图书出版公司通过中华版权代理公司向台湾晓园出版社购得重印权

限国内发行

高等工程数学习题及复习题详解(第6版)(中册)

E. 克雷塞格　原著

骆效宗　译著

*

晓园出版社出版

世界图书出版公司北京公司重印

北京朝阳门内大街137号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店経售

*

1994年4月第　一　版　　开本：711×1245 1/24

1994年4月第一次印刷　　印张：37.5

印数：0001－800　　字数：67.5万字

ISBN 7－5062－1750－3/O・105

定价：41.90元　(W_B9311/5)

前　　言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則澈底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與舖路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精微的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

Kreyszig 高等工程數學詳解

（上册目錄）

Kreyszig 高等工程數學詳解

（中冊目錄）

第一章　一階常微分方程式

1.1 節　一階微分方程式

指示出下列微分方程式的階數，且證明所給予的函數即爲其解。

1. $y'+8y=0$，$y=ce^{-8x}$

解 一階微分方程式

$\because\quad y'=-8ce^{-8x}$

$\therefore\quad y'+8y=-8ce^{-8x}+8(ce^{-8x})=0$

故爲其解。

2. $y''=e^{x}$，$y=e^{x}+ax+b$

解 二階微分方程式

$\because\quad y'=e^{x}+a$

$\quad\quad y''=e^{x}$

$\therefore\quad y''=e^{x}$

故爲其解。

3. $y''+16y=0$，$y=A\cos 4x+B\sin 4x$

解 二階微分方程式

$\because\quad y'=-4A\sin 4x+4B\cos 4x$

$\quad\quad y''=-16A\cos 4x-16B\sin 4x$

$$\therefore\quad y''+16y=-16A\cos 4x-16B\sin 4x+16(A\cos 4x+B\sin 4x)=0$$

故爲其解。

4. $y'-y\cot x=0$，$y=c\sin x$

解 一階微分方程式

$\because\quad y'=c\cos x$

$$\therefore\quad y'-y\cot x=c\cos x-c\sin x\cot x=c\cos x-c\cos x=0$$

故爲其解。

5. $y''+4y'+5y=0$，$y=e^{-2x}(A\cos x+B\sin x)$

解 二階微分方程式

$$\because\quad y'=e^{-2x}(-A\sin x+B\cos x)-2e^{-2x}(A\cos x+B\sin x)=e^{-2x}[(-A-2B)\sin x+(B-2A)\cos x]$$

$$y''=e^{-2x}[(-A-2B)\cos x-(B-2A)\sin x]$$
$$-2e^{-2x}[(-A-2B)\sin x+(B-2A)\cos x]$$
$$=e^{-2x}[(4A+3B)\sin x+(3A-4B)\cos x]$$

$$\therefore\quad y''+4y'+5y=e^{-2x}[(4A+3B)\sin x+(3A-4B)\cos x]$$
$$+4e^{-2x}[(-A-2B)\sin x+(B-2A)\cos x]$$
$$+5e^{-2x}(A\cos x+B\sin x)$$
$$=e^{-2x}[(4A+3B-4A-8B+5B)\sin x$$
$$+(3A-4B+4B-8A+5A)\cos x]$$
$$=0$$

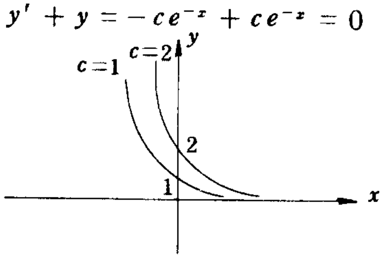
故為其解。

證明下列所給的函數是其對應的方程式之解，並選定一些常數 c，繪出各函數所表示的圖形。

6. $y'+y=0$, $y=ce^{-x}$

解 $y'=-ce^{-x}$

$\therefore\quad y'+y=-ce^{-x}+ce^{-x}=0$

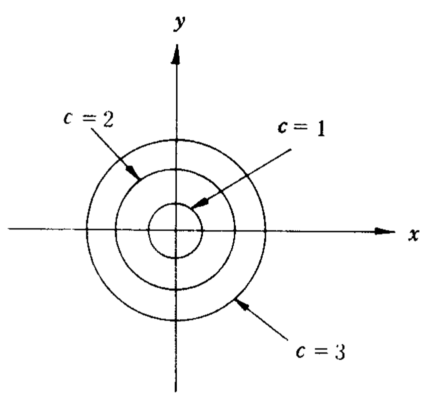


7. $y'=-\dfrac{x}{y}$, $x^2+y^2=c$

解 $y=\pm\sqrt{c-x^2}$

$$y'=\frac{\mp x}{\sqrt{c-x^2}}$$

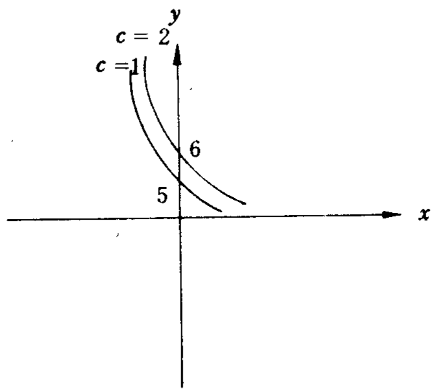
$$\therefore\quad yy'=\pm\sqrt{c-x^2}\left(\frac{\mp x}{\sqrt{c-x^2}}\right)$$
$$=-x$$
$$y'=-\frac{x}{y}$$



8. $y'+y=5$, $y=ce^{-x}+5$

解 $y'=-ce^{-x}$

$\therefore\quad y'+y=-ce^{-x}+ce^{-x}+5=5$



9.　$y'^2=4y$ ，$y=0$ ，$y=(x+c)^2$

解　① $y=0$

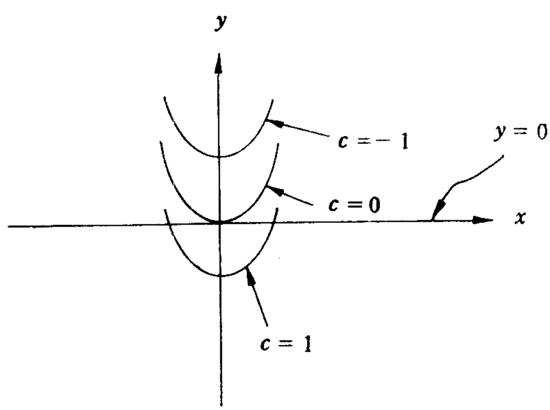
$\because\quad y'=0$

$\therefore\quad y'^2=0=4y$

② $y=(x+c)^2$

$\because\quad y'=2(x+c)$

$\therefore\quad y'^2=[2(x+c)]^2=4(x+c)^2=4y$



求下列微分方程式之解

10.　$y'=x^3$

解　$y'=\dfrac{dy}{dx}=x^3$

$dy=x^3\,dx$

兩邊積分得

$\int dy=\int x^3\,dx \qquad \therefore\quad y=\dfrac{1}{4}x^4+c$

c 為常數

11. $y'=e^{-x/2}$

解 $y'=\dfrac{dy}{dx}=e^{-x/2}$ ，$dy=e^{-x/2}\,dx$

兩邊積分得

$\int dy=\int e^{-x/2}\,dx \qquad \therefore \quad y=-2e^{-x/2}+c$

c 爲常數

12. $y'=\cos 3x$

解 $y'=\dfrac{dy}{dx}=\cos 3x$ ，$dy=\cos 3x\,dx$

兩邊積分得

$\int dy=\int \cos 3x\,dx \qquad \therefore \quad y=\dfrac{1}{3}\sin 3x+c$

c 爲常數

13. $y''=\sin 2x$

解 $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}=\sin 2x$

$y'=\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{2}\cos 2x+c_1$

$\therefore \quad y=-\dfrac{1}{4}\sin 2x+c_1x+c_2$

c_1 ，c_2 爲常數。

在以下四題中，試求出一個僅含 y 與 y' 的一階微分方程式,使所給的函數爲其解。

14. $y=e^{-2x}$

解 $y'=-2e^{-2x}$

$\because \quad y'\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=e^{-2x}=y \quad \therefore \quad -\dfrac{1}{2}y'=y$

因此 $y'+2y=0$ 爲所需方程式

15. $y=\cos x$

解 $y'=-\sin x$

$\therefore \quad y'\cdot\cot x=-\cos x=-y$

因此 $y'\cdot\cot x+y=0$ 爲所需方程式

16. $y=e^{-x^2}$

解 $y'=-2xe^{-x^2}$

$\therefore \quad y' \cdot \dfrac{-1}{2x} = e^{-x^2}$

因此　$2xy + y' = 0$　爲所需方程式

17.　$y = x^4$

解　$y' = 4x^3$

$\therefore \quad y' \cdot x = 4x^4 = 4y$

因此　$xy' = 4y$　爲所需方程式

在以下五題中，證明所給的函數是其對應的方程式之解，並求出 c 值，使所得到的特解滿足所給的條件，然後，繪出此解的圖形。

18.　$y' + y = 5$，$y = ce^{-x} + 5$，當 $x = 0$ 時，$y = 4$

解　$y' = -ce^{-x}$

$\therefore \quad y' + y = -ce^{-x} + ce^{-x} + 5 = 5$

故爲其解

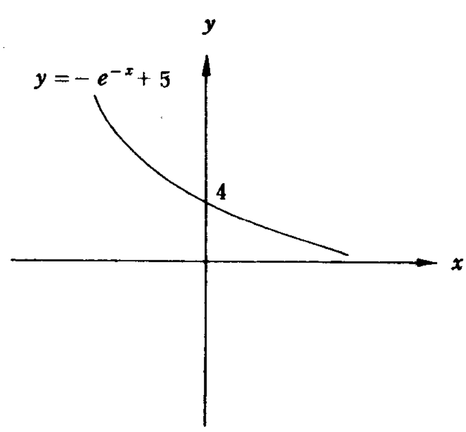
當 $x = 0$ 時，$y = 4$

代入方程式　$y = ce^{-x} + 5$

$4 = c + 5$

$\therefore \quad c = -1$

故 $y = -e^{-x} + 5$



19.　$y' = 2xy$，$y = ce^{x^2}$，當 $x = 1$ 時　$y = \dfrac{1}{2}e$

解　$y' = 2cxe^{x^2}$

$\therefore \quad y' = 2x(ce^{x^2}) = 2xy$

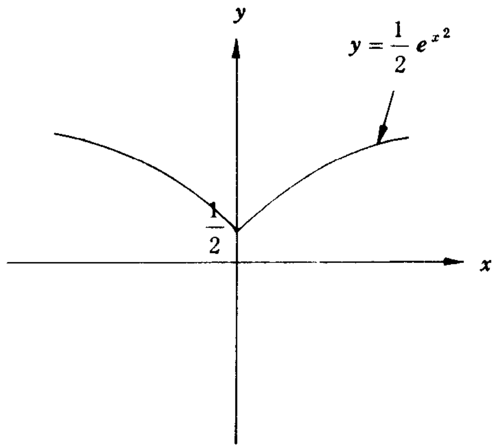
故爲其解。

當 $x = 1$ 時　$y = \dfrac{1}{2}e$

代入方程式 $y = ce^{x^2}$

$\frac{1}{2}e = ce \qquad \therefore \quad c = \frac{1}{2}$

故 $y = \frac{1}{2}e^{x^2}$



20. $y' = y\cot x$ ，$y = c\sin x$ ，當 $x = \frac{\pi}{2}$ 時 $y = 2$

解 $y' = c\cos x$

$\therefore \quad y' = c\sin x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = (c\sin x) \cdot \cot x = y\cot x$

故爲其解。

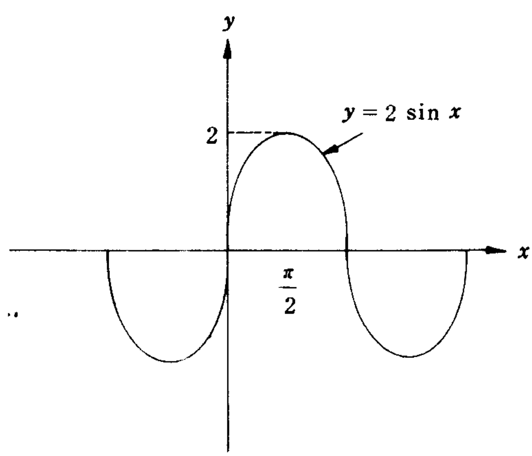
當 $x = \frac{\pi}{2}$ 時 $y = 2$

代入方程式 $y = c\sin x$

$2 = c\sin\frac{\pi}{2} = c$

$\therefore \quad c = 2$

故 $y = 2\sin x$



21. $xy'=3y$ ，$y=cx^3$ ，當 $x=-2$ 時　$y=4$

解　$y'=3cx^2$

$\therefore\quad xy'=x\cdot 3cx^2=3cx^3=3y$

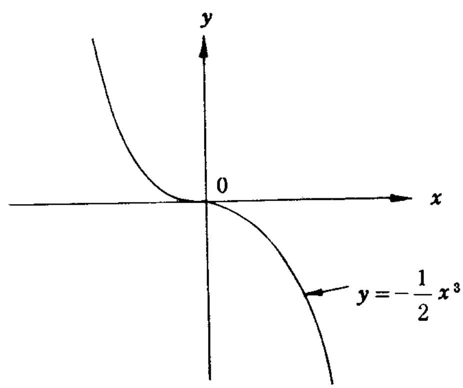
故爲其解。

當 $x=-2$ 時　$y=4$

代入方程式　$y=cx^3$

$$4=c(-2)^3=-8c \qquad \therefore\quad c=-\frac{1}{2}$$

故 $y=-\dfrac{1}{2}x^3$



22. $4yy'+x=0$ ，$x^2+4y^2=c$ ，當 $x=0$ 時　$y=1$

解　$y=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{c-x^2}$

$$y'=\frac{\mp x}{2\sqrt{c-x^2}}$$

$$\therefore\quad 4yy'+x=4\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{c-x^2}\right)\left(\frac{\mp x}{2\sqrt{c-x^2}}\right)+x=0$$

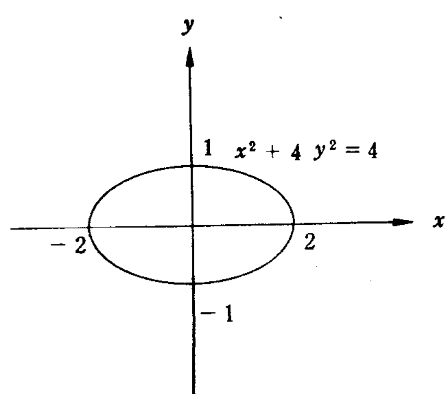
故爲其解。

當 $x=0$ 時　$y=1$

代入方程式　$x^2+4y^2=c$

$$0+4=c \qquad \therefore\quad c=4$$

故　$x^2+4y^2=4$



23. （半衰期）一放射性物質的半衰期是指其消失一半的量之時間。在例題5中 $_{88}R_a^{226}$ 之半衰期爲何？（以年爲單位）

解 例題5中 $y(t)=2e^{kt}$ 其中 $k\approx-1.4\cdot10^{-11}$ 秒$^{-1}$

$\because\ y(0)=2$

則半衰期爲 $y(t)=1=2e^{kt}$

$kt=\ln(0.5)=-0.69314718$

$$\therefore\ t=\frac{-0.69314718}{-1.4\times10^{-11}}=4.95\times10^{10}\text{ 秒}$$

$=1570$ 年 ≈1600 年

故 $_{88}R_a^{226}$ 之半衰期約爲1600年

24. （半衰期）鐳 $_{88}R_a^{224}$ 之半衰期爲3.64日。今有1克鐳，請問一天後剩下多少克？一年後呢？

解 $y(0)=1$ 令 $y(t)=e^{kt}$

半衰期爲3.64日

則 $0.5=y(t)=e^{3.64k}$

$k=-0.19$

一天後 $y(1)=e^{-0.19}\approx0.83$

一年後 $y(365)=e^{-0.19\times365}=7.6\times10^{-31}$

故一天後仍有0.83克。一年後仍有 7.6×10^{-31} 克

25. （落體）實驗顯示，若一物體在眞空中因重力作用而落下，則其加速度是一常數（等於9.80米／秒^2 = 32.1呎／秒^2，稱爲重力加速度）試以一微分方程式描述此定律，設 $s(t)$ 是下落的距離爲時間的函數。證明用此微分方程式，我們可以得到很熟悉的定律：

$$s(t)=\frac{g}{2}t^2$$

（實際上，祇要忽略空氣阻力，此式亦可應用到空氣中的自由落體上。例如：我們在離地面不甚高的地方丟一石子或鐵球）

解 因 $s(t)$ 爲下落的距離，故其加速度爲 $\dfrac{d^2s}{dt^2}$，依題意得知

$$\frac{d^2s}{dt^2}=g$$

其解爲 $s(t)=\dfrac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2$

設 $t=0$ 時，落下距離與初速度皆爲零

$\therefore\ c_1=c_2=0$

故　$s(t)=\frac{1}{2}gt^2$

26. 若在25.題中，物體在 $t=0$ 時之初位置 $s=s_0$，初速度 $v=v_0$，試證其解爲：

$$s(t)=\frac{g}{2}t^2+v_0t+s_0$$

解　由25.題得：

$$s(t)=\frac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2$$

$$s(0)=c_2=s_0$$

$$v(t)=\frac{ds}{dt}=gt+c_1$$

$$v(0)=c_1=v_0$$

$$\therefore\quad s(t)=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0$$

27. 一火箭垂直發射，在塔台發射初期時加速度爲 $7t$ 米／秒^2，在 $t=10$ 秒時，引擎關閉，則此火箭可飛多高？（忽略空氣阻力）

解　第一階段：（前10秒）

$$v_1=\int_0^t a\,dt=\int_0^t 7t\,dt=\frac{7}{2}t^2$$

$$v_{1f}=\frac{7}{2}\times(10)^2=350\text{ m/sec}$$

$$S_1=\int_0^t v_1dt=\int_0^t\frac{7}{2}t^2dt=\frac{7}{6}t^3$$

$$S_{1f}=\frac{7}{6}\times(10)^3=\frac{7000}{6}=1166.7$$

第二階段：祇受重力加速度 g

$0=v_{1f}-gt=350-9.8t$，g 爲重力加速度

$\therefore\quad t=35.7$

$$S_{2f}=v_{1f}t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$= 350 \times 35.7 - \frac{1}{2} \times 9.8 \times (35.7)^2$$

$$= 6245 \text{米}$$

$$\therefore \quad S = S_{1f} + S_{2f} = 1166.7 + 6245 = 7411.7 \text{米}$$

28. （**飛機起飛**）有一飛機自一跑道長爲 2 km之機場起飛。若該飛機開始之初速爲10m／sec，且在50秒內以等加速度跑完跑道全程。請問其起飛速度爲何？

解 假設其加速度爲a，移動距離爲x，初速 $v = v_0 = 10$ m／sec

則$\dfrac{d^2x}{dt^2} = a =$ 常數

速度 $v = \dfrac{dx}{dt} = v_0 + at$

移動距離 $x = v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2$

50秒內移動 2 km　即　2000 m，代入上式得

$$2000 = 10 \times 50 + \frac{1}{2} a \times 50^2$$

$\therefore \quad a = 1.2$

則起飛速度爲

$$v = v_0 + at = 10 + 1.2 \times 50 = 70$$

故起飛速度爲 70 m／sec

29. （**指數衰變；大氣壓力**）**實驗顯示在高度 h 的大氣壓力 p 的變化率與大氣壓力成正比，假設在6000米（約18000呎）高的大氣壓力爲海平面大氣壓力 p_0 的 $\frac{1}{2}$，求任意高度的大氣壓力公式。**

解 $p' = -kp$

$\therefore \quad \dfrac{dp}{dh} = -kp$

$p = ce^{-kh}$

$h = 0$ 時，$p = p_0 \Rightarrow c = p_0$

$\therefore p = p_0 e^{-kh}$

$h = 6000$ 時，$p = \dfrac{p_0}{2}$ 代入上式