

高等学校适用教材

高等数学
一题多解 200 例
选 编

李心灿 宋瑞霞 唐旭晖 编
邹杰涛 李国富 王琳静

陈德庄 审



机械工业出版社

本书选编了 200 个高等数学中比较典型的题目,每个题目至少给出了三种不同的解法。这些解法用到的概念、理论、方法涵盖了高等数学的主要内容。通过这 200 个题目的不同解法,可以开扩思路,培养“发散思维”、综合运用所学知识分析和解决问题的能力。

本书既可作为高等数学教学参考书,也可作为准备报考硕士研究生的读者复习高等数学的辅助用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学一题多解 200 例选编/李心灿等编. —北京:机械工业出版社,2002.8

高等学校适用教材

ISBN 7-111-10755-1

I. 高... II. 李... III. 高等数学—高等学校—解题 IV. 013
—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 055286 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑:郑丹 版式设计:霍永明 责任校对:李秋荣

封面设计:张静 责任印制:路琳

北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2002 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

1000mm×1400mm B5·9.625 印张·374 千字

0 001—3 000 册

定价:24.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换
本社购书热线电话 (010) 68993821、68326677-2527
封面无防伪标均为盗版

前 言

数学家格拉斯曼 (Grassmann) 指出: “数学除了锻炼敏锐的理解力, 发现真理以外, 它还具有开发脑力的功能。”

在数学教育中努力培养、训练学生的“发散思维”能力, 对更积极、有效地培养、训练学生的创新能力具有重要的意义。所谓具有发散特性的思维, 是指信息处理的途径灵活多变, 所求结果的丰富多样。它是一种开放性的立体思维, 即围绕某一问题从不同的方向、不同的侧面、不同的层次去思考、探索, 重组眼前的信息和记忆中的信息, 以获得解决问题的多种方案, 是一种重要的创造性思维。

在数学中“一题多解”就是一种典型的“发散思维”训练, 它能激发学生的潜能、开发学生的脑力。发散思维是许多著名数学家非常重视的一种思维形式。在数论、复变函数、椭圆函数、非欧几何、统计数学、天文学、物理学等领域作出了卓越贡献, 被誉为“能从九霄云外的高度按某种观点掌握星空与深奥数学的天才”及“数学王子”的著名数学家高斯 (Gauss), 就非常青睐“发散思维”, 并善于运用“发散思维”。他非常重视数学中的“一题多解”, 如对“代数基本定理”先后给出了四种不同的证明(他 20 岁时给出了第一个证明, 后来又给出了两个证明。1849 年, 时年 72 岁的他在庆祝获得博士学位 50 周年的纪念会上, 发表了第四个证明); 对数论中的“二次互反律”先后给出了八种不同的证明(第一个证明是用归纳法(当时他不到 19 岁), 第二个证明是用二次型理论, 第三个证明和第五个证明是用高斯引理, 第四个证明是用高斯和, 第六个证明和第七个证明是用分圆理论, 第八个证明是用高次幂剩余理论)。有人曾问高斯: “你为什么能对数学作出那样多的发现?” 高斯说: “假如别人和我一样深刻和持久地思考数学真理, 他也会作出同样的发现。”他还说: “绝对不能以为获得一个证明之后, 研究便告结束, 或把另外的证明当作多余的奢侈品”。“有时候一开始你没有得到最简和最美妙的证明, 但恰恰在寻求这样的证明中才能深入到真理的奇妙联想中去。这正是吸引我去继续研究的主动动力, 并且最能使我们有所发现。”高斯的这些言行, 很值得我们学习。

为了在高等数学这门重要的基础课教学中更有效地、具体地培养、训练学生的“发散思维”能力, 我们编写了这本《高等数学一题多解 200 例选编》。这 200 例是我们从近十多年来硕士研究生入学统一考试试题和有关数学教材、著作中选

取或改编的。在此特向参考文献中的作者致谢。每一个题目，本书至少列出了三种不同的解法，有的列出了五种以上的解法。这些解法所用到的概念、理论、方法涵盖了高等数学的主要内容。通过这 200 例，不但可以开阔思路，启发学生综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力，把高等数学的主要内容学活、用活，更重要的是可以培养、训练学生的“发散思维”能力，增强学生思维的灵活性、开拓性，开发学生的脑力。

著名数学家、教育家波利亚 (Polya) 认为：“解题是智力的特殊成就，而智力乃是人类的天赋。因此解题可以认为是人的最富有特征性的活动。……解题是一种本领，就像游泳、滑雪、弹钢琴一样，你只能够靠模仿和实践才能学到它。……假如你要想从解题中得到最大的收获，你就应当在所做的题目中去找出它的特征，那些特征在你以后去求解其他的问题时，能起到指引作用。一种解题的方法，它若是经过你自己的努力得到的，或者是从别人那里学来或听来的，只要经过了你自己的体验，那么它对你来讲就可以成为一种楷模，当你在碰见别的类似的问题时，它就是可供你仿照的模型。”我很赞赏他的这些见解。

我们建议大学生读者在阅读本书时，最好先看目录中的题目，根据题目自己先进行思考、求解。若解出后（或不会解），再看本书列出的解法，并将你的解法与本书列出的解法比较（或反思一下你不会解的原因），这样你的收获就会更大，而且你还可能做出比本书更巧妙的解法。

本书承蒙陈德庄先生认真地审阅并提出宝贵意见，机械工业出版社郑丹同志为本书的编辑、出版付出了辛勤劳动，在此一并致以诚挚的感谢。

由于我们水平有限，书中不当之处在所难免，恳请同仁和读者指正。

李心灿

2002 年春于北京

目 录

前言

第一章 一元函数及其微分学

1. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 且多项式 $g(x) = ax^2 + bx + c$ 满足 $f(g(x)) = g(f(x))$, 其中 a, b, c 为任意实数。求 $f(x)$ 。 1
2. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$, 试求 $f(-x)$ 。 1
3. 试证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ 。 2
4. 用定义证明 $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$ 。 3
5. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ 。 4
6. 试证 $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$ 收敛。 6
7. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^2}$ 。 7
8. 设 $y = f(x^2, \varphi(x, y))$, 其中 $\varphi(x, y)$ 具有连续偏导数, 求 $\frac{dy}{dx}$ 。 9
9. 已知方程 $4y - x = (x+y)\ln(x+y)$ 确定了 y 是 x 的函数, 求 $\frac{dy}{dx}$ 。 9
10. 求函数 $y = u(x)^{2v(x)}$ 的导数, 其中 $u(x), v(x)$ 为可导函数。 10
11. 求函数 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0) (n \geq 3)$ 。 11
12. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且对任意的 x_1 和 x_2 有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$, $f'(0) = 1$ 。求证: $f'(x) = f(x)$ 。 12
13. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{1 - \sqrt{1-x^2}}$ 。 14
14. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$, 其中 n 为给定的正整数。 15
15. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - ax - b \right) = 0$, 试确定 a, b 的值。 16
16. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2(e^x - 1)}$ 。 17
17. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \tan^2 x \sqrt{1 + x^2 e^{x+1}}$ 。 18
18. 由拉格朗日中值定理, 对任意的 $x \neq 0$, 都存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得 $e^x - 1 = e^{\theta(x)}, \tau \cdot x$ 。

- 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}$ 。 18
19. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\tan x}}{x - \tan x}$ 。 19
20. 设 $f_n(x) = \sin x + \sin^2 x + \cdots + \sin^n x$ 。求证 21
- (1) 对任意自然数 n , 方程 $f_n(x) = 1$ 在 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 内有且仅有一根。
- (2) 设 $x_n \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ 是 $f_n(x) = 1$ 的根, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{\pi}{6}$ 。
21. 叙述并证明拉格朗日中值定理。 22
22. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导 ($a < b$), $f(a) = f(b)$ 。证明存在 $\xi (a < \xi < b)$, 使 $f(a) - f(\xi) = \xi f'(\xi)$ 。 24
23. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $0 < a < b$ 。证明 $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $f(b) - f(a) = \xi \ln \frac{b}{a} f'(\xi)$ 。 26
24. 设 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上二阶可导, 且 $f(0) = 0$, $f''(x) < 0$ 。求证 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, a]$ 上单调下降。 27
25. 在点 $x_0 = 0$ 附近用一个 x 的二次多项式 $ax^2 + bx + c$ 来近似函数 $\frac{1}{1 + \sin x}$, 使其差为 x^2 的高阶无穷小。 27
26. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内具有一阶连续导数, 且 $f(0) \neq 0, f'(0) \neq 0$ 。若 $af(h) + bf(2h) - f(0)$ 在 $h \rightarrow 0$ 时是比 h 高阶的无穷小, 试确定 a, b 的值。 29
27. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b) = 1$ 。试证存在 $\xi, \eta \in (a, b)$, 使得 $e^{\eta - \xi} [f(\eta) + f'(\eta)] = 1$ 。 31
28. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 且 $f''(x) > 0$ 。证明 $f(x) \geq x$ 。 32
29. 证明当 $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1}$ 。 33
30. 设 $0 < a < b$, 试证不等式 $\frac{2a}{a^2 + b^2} < \frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{\sqrt{ab}}$ 。 34
31. 试证当 $x > 0$ 时, $(x^2 - 1) \ln x \geq (x - 1)^2$ 。 36
32. 设 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域内有二阶连续的导数, 且当 h 充分小时, $f(x_0) < \frac{1}{2} [f(x_0 + h) + f(x_0 - h)]$ 恒成立。试证 $f''(x_0) \geq 0$ 。 37
33. 设 $y = f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内具有二阶连续导数, 且 $f''(x) \neq 0$ 。试证: (1) 对于 $(-1, 1)$ 内的任一 $x \neq 0$, 存在唯一的 $\theta(x) \in (0, 1)$, 使 $f(x) = f(0) + xf'(\theta(x))$ 成立。
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}$ 。 39
34. 设 $f(x), g(x)$ 都是可微函数, 且当 $x \geq a$ 时, $0 < |f'(x)| \leq g'(x)$ 。求证当 $x \geq a$ 时, 有 $|f(x) - f(a)| \leq g(x) - g(a)$ 。 40
35. 证明当 $x \neq 0$ 时, $e^x > 1 + x$ 。 41

36. 设 $a > 0$, 方程 $\ln x = ax^2$ 有几个实根? 42
37. 求心形线 $r = 1 - \cos \theta$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ 处的切线方程。 44
38. 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内具有二阶导数, 且满足 $f''(x) > g''(x)$,
 $x \in (a, b), f(b) = g(b), f'(b) = g'(b)$ 。求证对 (a, b) 内任意一点 x ,
 有 $f(x) > g(x)$ 。 45
39. 证明 $xe^{1-x} \leq 1$ 。 46
40. 证明当 $x > 0$ 时, $e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} > x - \sin x$ 恒成立。 47
41. 证明当 $0 < x < \frac{\pi}{2a}$ 时, $\sin ax > \frac{2a}{\pi}x (a > 0)$ 。 49
42. 证明 $e^\pi > \pi^e$ 。 51
43. 假设函数 $f(x)$ 在 $[a, \infty)$ 上连续, $f''(x)$ 在 (a, ∞) 内存在且大于零,
 记 $F(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x > a)$, 证明 $F(x)$ 在 (a, ∞) 内单调增加。 52
44. 一正圆锥外切于一半径为 a 的球, 求圆锥的最小体积。 54
45. 在半径为 a 的半圆内, 作平行于直径 AD 的弦 BC 。 BC 为何值时, 梯形 $ABCD$
 的面积最大? 56
46. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 在第一象限中的切线, 使它被坐标轴所截的线段最短。 58
47. 设有边长为 $2a$ 和 $2b$ 的矩形。试求外接于该矩形的椭圆的最小面积, 假设椭圆
 对称轴与矩形两边平行。 61

第二章 一元函数积分学

1. 求 $\int \sin 2x dx$ 。 64
2. 求 $\int \csc x dx$ 。 64
3. 求 $\int \frac{2x+1}{\sqrt[3]{1+5x}} dx$ 。 65
4. 求 $\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx$ 。 66
5. 求 $\int \frac{1}{x \sqrt{1+x^2}} dx$ 。 68
6. 求 $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ 。 69
7. 求 $\int \frac{1}{1+e^{2x}} dx$ 。 70
8. 求 $\int \frac{1}{x \sqrt{x^2 - a^2}} dx \quad (a > 0)$ 。 71
9. 求 $\int \frac{1}{\sqrt{1+a^x}} dx (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 。 72

10. 求 $\int \frac{1}{x \sqrt{a^2 - x^2}} dx$ ($a > 0$)。 73
11. 求 $\int \frac{1}{(1+x) \sqrt{1-x^2}} dx$ 。 75
12. 求 $\int \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}} dx$ 。 76
13. 求 $\int x^3 \cdot \sqrt{9-x^2} dx$ 。 77
14. 求 $\int \frac{\arctan e^x}{e^x} dx$ 。 78
15. 求 $\int x \cdot \cot x \cdot \csc^2 x dx$ 。 79
16. 求 $\int \frac{\operatorname{arccot} \sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} dx$ 。 80
17. 求 $\int x^n \ln x dx$ ($n \neq -1$)。 81
18. 求 $I = \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$ 。 82
19. 求 $\int \frac{1}{x^6(1+x^2)} dx$ 。 85
20. 求 $\int \frac{1}{\sin^4 x} dx$ 。 87
21. 求 $\int \frac{1}{1+\sin x} dx$ 。 87
22. 求 $\int \frac{\cos x \cdot \sin x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$ 。 89
23. 求 $\int \frac{1}{\sin 2x + 2\sin x} dx$ 。 91
24. 求 $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$ 。 93
25. 计算 $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}} dx$ 。 94
26. 计算 $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$ 。 96
27. 计算 $\int_{-1}^1 \frac{2x^2 + x(e^{-x} + e^x)}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx$ 。 98
28. 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ 。 99
29. 计算 $\int_1^3 \arccos \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$ 。 101
30. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 满足 $f(x) = f(x-\pi) + \sin x$, 在 $[0, \pi]$ 中,
 $f(x) = x$. 计算 $\int_{\pi}^{3\pi} f(x) dx$ 。 102

31. 设 $f(x)$ 连续, $\int_0^{x^3-1} f(t)dt = x$, 求 $f(7)$ 。 104
32. 设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上均连续 ($a < b$), 证明 $\left[\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx \right]^2$
 $\leq \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx$ 。 104
33. 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(x) > 0$, 利用闭区间上连续函数性质,
 证明存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$ 。 106
34. 计算 $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{1+x} + e^{3-x}} dx$ 。 107
35. 广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ 是否收敛? 为什么? 108
36. 计算 $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx$ 。 111
37. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 ($a < b$), $\int_a^b f(x)dx = 0, \int_a^b xf(x)dx = 0$ 。
 试证至少存在不同的两点 $\xi_1, \xi_2 \in (a, b)$, 使得 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$ 。 112
38. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续且单调不减, 证明当 $0 \leq \mu \leq 1$ 时, 有 $\int_0^\mu f(x)dx \geq$
 $\mu \int_0^1 f(x)dx$ 。 113
39. 设 $f(x)$ 为在闭区间 $[A, B]$ 上连续的函数, 且有 $A < a < b < B$ 。试证
 $\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \frac{f(x+2h) - f(x)}{h} dx = 2[f(b) - f(a)]$ 。 116
40. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 且非负单调递减。证明对于满足 $0 < a < b < 1$
 的任何 a, b 有 $\int_0^a f(x)dx \geq \frac{a}{b} \int_a^b f(x)dx$ 。 117
41. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续且单调减少, 证明不等式 $\int_a^b xf(x)dx$
 $\leq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx$ 。 119
42. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且可导, $f(a) = 0$, 试证明: $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{M}{2}(b-a)^2$,
 其中 $M = \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$ 。 120
43. 求证 $f(x) = xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界。 122
44. 设 $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \cdot \sin t dt$ 。试证明 $F(x)$ 为正常数。 123
45. 设曲线 $y = \cos x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$, $y = 1$ 和 $x = \frac{\pi}{2}$ 围成平面图形 D 。试求平面
 图形 D 绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积。 124
46. 求曲线 $y = 4 - (x-2)^2$ 与 x 轴所围成的平面图形绕 y 轴旋转而成的

- 立体体积。 125
47. 设曲线 $y = x^2 (0 \leq x \leq 1)$, $y = 1$ 和 $x = 0$ 围成平面图形为 D , 试求平面图形 D 绕 $x = 1$ 旋转而成的旋转体的体积。 126

第三章 向量代数与空间解析几何

1. 设 $a = \{1, 0, 0\}$, $b = \{0, 1, -2\}$, $c = \{2, -2, 1\}$ 。试在 a 与 b 确定的平面内, 求一个模长为 3 的向量 q , 使 $q \perp c$ 。 129
2. 已知 $a = \{1, 0, 1\}$, $b = \{1, 1, 0\}$ 。求 c , 使 $c \perp a$, $c \perp b$, 且 $|c| = \sqrt{3}$ 。 130
3. 已知 $A(1, 2, 3)$, $B(0, 1, 2)$, $C(1, 0, 2)$, 求 $|AB \times AC|$ 。 130
4. 已知平面过三点 $M_1(1, 2, 3)$, $M_2(0, 0, -1)$, $M_3(3, 2, 1)$, 求此平面方程。 131
5. 求两个平面 $\pi_1: 3x - z + 12 = 0$ 和 $\pi_2: 2x + 6y + 17 = 0$ 所构成的二面角的平分面方程。 132
6. 已知 $|OM_0| = 1$, OM_0 的方向角分别为 α, β, γ , 求过 M_0 且垂直 OM_0 的平面方程。 133
7. 已知直线 $L_1: \frac{1+x}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{3}$, $L_2: \begin{cases} 2x+y-1=0 \\ 3x+z-2=0 \end{cases}$ 。证明 $L_1 \parallel L_2$, 并求 L_1 和 L_2 确定的平面方程。 134
8. 已知 $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, 3)$, $C(3, -1, 5)$, $D(1, 2, 3)$ 。 A, B, C, D 四点是否共面? 是否共线? 136
9. 求过直线 $L: \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x-y-z+1=0 \end{cases}$ 且与平面 $\pi: x+y-z=0$ 垂直的平面方程。 137
10. 设平面 π 通过点 $P(1, 1, 2)$, 且与平面 $\pi_1: x+2y-3z=0$ 垂直, 又与直线 $L: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{1}$ 平行。求平面 π 的方程。 138
11. 将直线方程 $\begin{cases} x-y+z+2=0 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$ 化为对称式方程和参数式方程。 139
12. 求过点 $M(2, -5, 3)$ 且和平面 $\pi_1: 2x-y+z-1=0$ 及 $\pi_2: x+y-z-2=0$ 平行的直线方程。 140
13. 求过点 $P(1, 1, 1)$ 且与直线 $L: \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-1}$ 垂直相交的直线方程。 141
14. 过点 $A(1, 2, 0)$ 作一直线, 使其与 z 轴相交, 且和平面 $\pi: 4x+3y-2z+1=0$ 平行, 求此直线方程。 143
15. 求过点 $A(1, 1, 1)$ 且和两直线 $L_1: \begin{cases} y=x+1 \\ z=2x-3 \end{cases}$, $L_2: \begin{cases} y=x-2 \\ z=x+1 \end{cases}$ 相交的直线方程。 144
16. 求直线 $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ 在平面 $\pi: x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 L_0 的

- 方程。 148
17. 求直线 $L: \begin{cases} 2x + y + z - 4 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$ 关于平面 $\pi: x + y + z + 1 = 0$ 对称的直线
方程。 149
18. 求两异面直线 $L_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$ 和 $L_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-2}{1}$ 间的距离。 153
19. 求过两球面的交线 $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases}$ 的正圆柱面的方程。 154
20. 证明直线 $L: \begin{cases} x + \frac{z}{3} = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ 在曲面 $S: x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$ 上。 156

第四章 多元函数及其微分学

1. 证明 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ 。 158
2. 求 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$ 。 159
3. 设 $z = f(x, y) = (xy)^{x+y}$, 求 $f'_x(1, 1), f'_y(1, 2)$ 。 160
4. 设 $z = y^{y^x}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 。 161
5. 设 $z = u^2 \cos v^2, u = x + y, v = x - y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 。 162
6. 设 $x^2 + y^2 = e^{\arctan \frac{y}{x}}$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 。 163
7. 设 $x^2 + y^2 + z^2 = y\varphi\left(\frac{z}{y}\right)$, 其中 φ 是可微函数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 。 164
8. 设 $z = f(x, y)$ 是由方程 $z - y - x + xe^{z-y-x} = 0$ 所确定的二元函数,
求 dz 。 165
9. 设 z 是由方程 $x + y + z = e^{2z}$ 所确定的 x 与 y 的隐函数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。 166
10. 设 $z = f(x, x + z, yz)$, 其中 f 具有连续的偏导数, 求 dz 。 167
11. 设 $u = x + y, v = x - y, w = x + y + z$, 其中 $w = w(u, v)$ 具有连续的二阶
偏导数, 试变换方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 。 169
12. 设函数 $z = f(u)$, 方程 $u = \varphi(u) + \int_y^x p(t) dt$ 确定 u 是 x, y 的函数, 其中 $f(u)$,
 $\varphi(u)$ 可微, $p(t), \varphi'(u)$ 连续, $\varphi'(u) \neq 1$, 求 $p(y) \frac{\partial z}{\partial x} + p(x) \frac{\partial z}{\partial y}$ 。 171
13. 设 $F(x - az, y - bz) = 0$ 确定 z 是 x, y 的函数, F 是可微函数。证明
 $az'_x + bz'_y = 1$ 。 173
14. 设 $u = f(x, y, z), y = \varphi(x, t), t = \psi(x, z)$, 其中 f, φ, ψ 均有连续的偏导数,

- 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z}$ 。 174
15. 设 $x = u + v, y = u^2 + v^2, z = u^3 + v^3 + e^x$, 求 $\frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 。 175
16. 设 $y(x)$ 由方程组 $\begin{cases} y = f(x, t) \\ t = F(x, y) \end{cases}$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx}$ (假定隐函数存在定理条件满足)。 177
17. 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ x^3 - y + z^2 = 1 \end{cases}$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处的切线及法平面方程。 179
18. 求曲面 $x = u + v, y = ve^u, z = u - v$ 在 $u = v = 0$ 处的切平面方程。 180
19. 求点 $M(1, 2, 0)$ 到直线 $L: \begin{cases} z = x - 3 \\ y = 0 \end{cases}$ 的最短距离。 182
20. 求曲线 $y = e^x$ 与直线 $x - y - 1 = 0$ 之间的最短距离。 183
21. 在椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 上求一点, 使其到直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 的距离最短。 185
22. 求函数 $u = xyz$ 在约束条件 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3 (x > 0, y > 0, z > 0)$ 下的极值。 186

第五章 多元函数积分学

1. 计算二重积分 $\iint_D y dx dy$, 其中 D 是由直线 $x = -2, y = 0, y = 2$ 以及曲线 $x = -\sqrt{2y - y^2}$ 所围成的平面区域。 189
2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 并设 $\int_0^1 f(x) dx = A$, 求 $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y) dy$ 。 190
3. 计算 $I = \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} |3x + 4y| dx dy (a > 0)$ 。 191
4. 计算 $\iint_D (x + y) dx dy$, 其中 $D: x^2 + y^2 \leq x + y + 1$ 。 193
5. 计算二重积分 $\iint_D e^{\max\{x^2, y^2\}} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 。 194
6. 计算 $\int_1^2 dx \int_2^{\frac{1}{x}} \frac{y}{2} e^{xy} dy$ 。 196
7. 求由两同心圆 $x^2 + y^2 = 1$ 和 $x^2 + y^2 = 4$ 所围的在第一象限内的四分之一圆环板的重心, 其中板的面密度 ρ 为常数。 197
8. 求 $I = \iiint_D y dx dy dz$, 其中 $\Omega: x^2 + (y - 2)^2 + z^2 \leq 4$ 。 199
9. 计算由旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 和平面 $z = a^2 (a > 0)$ 所围成的空间区域 Ω 的体积。 200

10. 计算 $\iiint_{\Omega} (x+y+z)dv$, 其中 $\Omega: x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4R^2$ 202
11. 设 $f(x)$ 连续, $F(t) = \iiint_{\Omega_t} f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$.
 $\Omega_t: x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2$
 求 $F'(t) (t > 0)$ 203
12. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 试证 $\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_x^y f(x)f(y)f(z) dz =$
 $\frac{1}{3!} \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^3$ 204
13. 计算 $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$, 其中 Ω 为球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 在第一卦限的部分. ... 208
14. 设有一正椭圆柱体, 其底面的长、短轴分别为 $2a, 2b$. 用过此柱体底面的短轴
 且与底面成 α 角 $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$ 的平面截此柱体, 得一楔形体, 求此楔形体
 的体积 V 209
15. 计算 $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds$, 其中 L 是曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{9}{2}$ 与平面 $y + z = 1$ 的
 交线. ... 210
16. 计算 $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$, 直线 $y = x$ 及 x 轴在第一象限
 内所围成的扇形的整个边界. ... 212
17. 求 $\oint_L y^2 ds$, 其中 $L: x^2 + y^2 = a^2 (a > 0)$ 214
18. 计算 $\int_L y dx + x dy$, L : 从点 $A(-R, 0)$ 沿上半圆周 $x^2 + y^2 = R^2$ 到
 点 $B(R, 0)$ 215
19. 设曲线积分 $\int_C xy^2 dx + y\varphi(x) dy$ 与路径无关, 其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数,
 且 $\varphi(0) = 0$, 计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} x^2 y dx + y\varphi(x) dy$ 的值. ... 217
20. 计算 $I = \oint_L \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2}$, 其中 L 是以点 $(1, 0)$ 为中心、半径为 R 的圆周 $(R > 1)$,
 取逆时针方向. ... 218
21. 计算 $\oint_L (2xy - 2y) dx + (x^2 - 4x) dy$, 其中 $L: x^2 + y^2 = 9$, 取正向
 (逆时针方向). ... 219
22. 计算 $\oint_C (z - y) dx + (x - z) dy + (x - y) dz$, 其中 C 是曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$,
 从 z 轴正向往 z 轴负向看 C 的方向是顺时针的. ... 222
23. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有一阶连续导数, L 是上半平面 $(y > 0)$ 内的有
 向分段光滑曲线, 其起点为 (a, b) , 终点为 (c, d) , 记 $I = \int_L \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] dx$

- $+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy$ 。 223
 (1)证明曲线积分 I 与路径 L 无关。
 (2)当 $ab=cd$ 时,求 I 的值。
24. 求在圆柱面 $x^2+y^2=ay(a>0)$ 上的介于平面 $z=0$ 与曲面 $z=\frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}$
 ($h>0$)之间部分的面积。 226
25. 计算 $I=\oint_L(y^2-z^2)dx+(2z^2-x^2)dy+(3x^2-y^2)dz$,其中 L 是平面
 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线,从 z 轴正向看去, L 为逆时针
 方向。 228
26. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}(x^3+az^2)dydz+(y^3+ax^2)dzdx+(z^3+ay^2)dxdy$,其中
 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧。 230
27. 计算曲面积分 $I=\oint_{\Sigma}xdydz+ydzdx+zdxdy$,其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$
 的外侧。 233
28. 计算 $\iint_{\Sigma}\frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$,其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$
 的上侧, a 为大于零的常数。 234
29. 计算 $\oint_{\Sigma}\frac{xcos\alpha+ycos\beta+zc\cos\gamma}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dS$,其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧,
 $cos\alpha,cos\beta,cos\gamma$ 是其外法线向量的方向余弦。 236
30. 计算 $\oint_{\Sigma}x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, $\Sigma:(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$,
 取外侧。 237
31. 求椭圆柱面 $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$ 位于 xOy 平面上方和平面 $z=y$ 的下方的那部分的
 面积。 240
32. 计算 $\iint_{\Sigma}\mathbf{rot}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$,其中 $\mathbf{F}=\{x-z,x^3+yz,-3xy^2\}$, Σ 是锥面
 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 在 xOy 面上方的部分,取上侧。 241
33. 试证 $\oint_{\Sigma}(x+y+z+\sqrt{3}a)dS\geq 12\pi a^3(a>0)$,其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2$
 $-2ax-2ay-2az+2a^2=0$ 。 244

第六章 无穷级数 常微分方程

1. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$ 的敛散性。 246
2. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$ 的敛散性。 247

3. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4+(-1)^n)^n}$ 的敛散性。 248
4. 设 $a_n \geq 0$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 试证 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛。 249
5. 试证 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 收敛, 并求其和。 250
6. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n} x^n$ 的收敛半径。 254
7. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{n4^n}$ 的收敛域。 255
8. 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} (x^2+x+1)^n$ 的收敛域。 256
9. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ 的和函数。 257
10. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 的和函数。 259
11. 把函数 $f(x) = \frac{1}{x(x+2)}$ 在 $x=1$ 处展成泰勒级数。 259
12. 将 $f(x) = \frac{1}{x^2} (xe^x - e^x + 1)$ ($x \neq 0$) 展成 x 的幂级数。 261
13. 把 $f(x) = \begin{cases} x, & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \leq x < \frac{3}{2}\pi \end{cases}$ 展成以 2π 为周期的傅里叶级数。 262
14. 将 $f(x) = x (1 \leq x \leq 2)$ 在 $[1, 2]$ 上展成以 2 为周期的傅里叶级数。 264
15. 设函数 $f(x) = x^2, x \in [0, \pi]$, 将 $f(x)$ 展开为以 2π 为周期的傅里叶级数。 266
16. 求微分方程 $xy' - y = x^2 \cos 2x$ 的通解。 268
17. 求微分方程 $y' - y = e^{2x}$ 的通解。 269
18. 求微分方程 $y' + ay = f(x)$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = a > 0$ 的特解,
其中 $f(x)$ 是连续函数。 270
19. 求微分方程 $(2x+y)dx + (x-y^2)dy = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1$ 的特解。 271
20. 求微分方程 $(2y+x)dx + (2x+1)dy = 0$ 的通解。 272
21. 求微分方程 $x^3y' - x^2y + y^3 = 0$ 的通解。 275
22. 求微分方程 $x^3dx = xy^2dx + x^2ydy$ 的通解。 276
23. 求微分方程 $2xydx + (y^2 - 3x^2)dy = 0$ 的通解。 277
24. 求微分方程 $ydx + (y-x)dy = 0$ 的通解。 279
25. 求微分方程 $(x-y^2)dx + 2xydy = 0$ 的通解。 280
26. 求微分方程 $y'' + y' = x^2$ 的通解。 281
27. 求解初值问题 $xy'' - y' = x^2, y'|_{x=1} = 0, y|_{x=1} = 0$ 。 282
28. 求微分方程 $y'' = 1 - y'^2$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 0$ 的特解。 283

29. 求微分方程 $x^2y'' + xy' - y = x^3$ 的通解。	286
30. 设 $y = e^x(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$ (C_1, C_2 为任意常数) 为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解, 试求该方程。	288
31. 从海平面向海中沉放一种探测仪, 按要求, 需确定仪器下沉深度 y 与速度 v 之间的函数关系。仪器在重力作用下, 从海平面由静止开始铅直下沉, 设其质量为 m , 体积为 V , 海水比重为 ρ , 下沉阻力与速度成正比, 比例系数为 K , 试建立 y 与 v 所满足的微分方程, 并求 $y = y(v)$ 。	289
参考文献	291

第一章 一元函数及其微分学

1. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 且多项式 $g(x) = ax^2 + bx + c$ 满足 $f(g(x)) = g(f(x))$, 其中 a, b, c 为任意实数。求 $f(x)$ 。

分析 要求函数 $f(x)$, 关键在于利用多项式 $g(x)$ 的性质。由 $g(x)$ 中系数 a, b, c 的任意性可知 $g(x)$ 实际为零次、一次及二次多项式的集合, 故可利用 a, b, c 的任意性对问题进行分析。

解法一 由于 $f(g(x)) = g(f(x))$

即
$$f(ax^2 + bx + c) = af^2(x) + bf(x) + c \quad (1)$$

(1) 由 a, b, c 的任意性知: 当取 $a = b = 0$ 时式也成立, 即 $f(c) = c$

由 c 的任意性可得 $f(x) = x$ 。

解法二 在式(1)中取 $a = c = 0$, 且 $x = 1$, 得

$$f(b) = bf(1) \quad (2)$$

取 $b = c = 0, x = 1$ 得 $f(a) = af^2(1) \quad (3)$

在式(2)、式(3)中令 $a = b = x$ 得 $f(x) = x$

解法三 在式(1)中令 $a = 0, b = 1$ 得

$$f(x + c) = f(x) + c$$

所以
$$\frac{f(x + c) - f(x)}{c} = 1$$

即
$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{f(x + c) - f(x)}{c - 0} = f'(x) = 1$$

故
$$f(x) = x + c_1 \quad (4)$$

在式(1)中取 $a = b = c = 0$, 得 $f(0) = 0$, 代入式(4)

得 $c_1 = 0$ 故 $f(x) = x$ 。

2. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x^2 + x, & x > 0 \end{cases}$, 试求 $f(-x)$ 。

(1992 年考研试卷三)

分析 此题可用下述几种解法求解。

解法一 令 $y = -x$, 则 $x = -y$, 代入 $f(x)$ 的表达式, 有

$$f(-y) = \begin{cases} y^2, & -y \leq 0 \\ (-y)^2 - y, & -y > 0 \end{cases}$$