高等学校适用教材

高等数学
一题多解200例
选编

李心灿 宋瑞霞 唐旭晖 编
邹杰涛 李国富 王琳静

陈德庄 审

机械工业出版社

本书选编了 200 个高等数学中比较典型的题目，每个题目至少给出了三种不同的解法。这些解法用到的概念、理论、方法涵盖了高等数学的主要内容。通过这 200 个题目的不同解法，可以开扩思路，培养“发散思维”、综合运用所学知识分析和解决问题的能力。

本书既可作为高等数学教学参考书，也可作为准备报考硕士研究生的读者复习高等数学的辅助用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学一题多解 200 例选编/李心灿等编．—北京：机械工业出版社，2002.8

高等学校适用教材

ISBN 7-111-10755-1

Ⅰ．高…　Ⅱ．李…　Ⅲ．高等数学—高等学校—解题　Ⅳ．O13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 055286 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）

责任编辑：郑　丹　版式设计：霍永明　责任校对：李秋荣

封面设计：张　静　责任印制：路　琳

北京机工印刷厂印刷・新华书店北京发行所发行

2002 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

1000mm×1400mm B5・9.625 印张・374 千字

0 001—3 000 册

定价：24.00 元

前　　言

数学家格拉斯曼（Grassmann）指出："数学除了锻炼敏锐的理解力，发现真理以外，它还具有开发脑力的功能。"

在数学教育中努力培养、训练学生的"发散思维"能力，对更积极、有效地培养、训练学生的创新能力具有重要的意义。所谓具有发散特性的思维，是指信息处理的途径灵活多变，所求结果的丰富多样。它是一种开放性的立体思维，即围绕某一问题从不同的方向、不同的侧面、不同的层次去思考、探索，重组眼前的信息和记忆中的信息，以获得解决问题的多种方案，是一种重要的创造性思维。

在数学中"一题多解"就是一种典型的"发散思维"训练，它能激发学生的潜能、开发学生的脑力。发散思维是许多著名数学家非常重视的一种思维形式。在数论、复变函数、椭圆函数、非欧几何、统计数学、天文学、物理学等领域作出了卓越贡献，被誉为"能从九霄云外的高度按某种观点掌握星空与深奥数学的天才"及"数学王子"的著名数学家高斯（Gauss），就非常青睐"发散思维"，并善于运用"发散思维"。他非常重视数学中的"一题多解"，如对"代数基本定理"先后给出了四种不同的证明(他 20 岁时给出了第一个证明,后来又给出了两个证明。1849 年，时年 72 岁的他在庆祝获得博士学位 50 周年的纪念会上，发表了第四个证明)；对数论中的"二次互反律"先后给出了八种不同的证明（第一个证明是用归纳法（当时他不到 19 岁），第二个证明是用二次型理论，第三个证明和第五个证明是用高斯引理，第四个证明是用高斯和，第六个证明和第七个证明是用分圆理论，第八个证明是用高次幂剩余理论）。有人曾问高斯："你为什么能对数学作出那样多的发现?"高斯说："假如别人和我一样深刻和持久地思考数学真理，他也会作出同样的发现。"他还说："绝对不能以为获得一个证明之后，研究便告结束，或把另外的证明当作多余的奢侈品"。"有时候一开始你没有得到最简和最美妙的证明，但恰恰在寻求这样的证明中才能深入到真理的奇妙联想中去。这正是吸引我去继续研究的主动力，并且最能使我们有所发现。"高斯的这些言行，很值得我们学习。

为了在高等数学这门重要的基础课教学中更有效地、具体地培养、训练学生的"发散思维"能力，我们编写了这本《高等数学一题多解 200 例选编》。这 200 例是我们从近十多年来硕士研究生入学统一考试试题和有关数学教材、著作中选

取或改编的。在此特向参考文献中的作者致谢。每一个题目，本书至少列出了三种不同的解法，有的列出了五种以上的解法。这些解法所用到的概念、理论、方法涵盖了高等数学的主要内容。通过这200例，不但可以开阔思路，启发学生综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力，把高等数学的主要内容学活、用活，更重要的是可以培养、训练学生的“发散思维”能力，增强学生思维的灵活性、开拓性，开发学生的脑力。

著名数学家、教育家波利亚（Polya）认为：“解题是智力的特殊成就，而智力乃是人类的天赋。因此解题可以认为是人的最富有特征性的活动。……解题是一种本领，就像游泳、滑雪、弹钢琴一样，你只能够靠模仿和实践才能学到它。……假如你要想从解题中得到最大的收获，你就应当在所做的题目中去找出它的特征，那些特征在你以后去求解其他的问题时，能起到指引作用。一种解题的方法，它若是经过你自己的努力得到的，或者是从别人那里学来或听来的，只要经过了你自己的体验，那么它对你来讲就可以成为一种楷模，当你在碰见别的类似的问题时，它就是可供你仿照的模型。”我很赞赏他的这些见解。

我们建议大学生读者在阅读本书时，最好先看目录中的题目，根据题目自己先进行思考、求解。若解出后（或不会解），再看本书列出的解法，并将你的解法与本书列出的解法比较（或反思一下你不会解的原因），这样你的收获就会更大，而且你还可能做出比本书更巧妙的解法。

本书承蒙陈德庄先生认真地审阅并提出宝贵意见，机械工业出版社郑丹同志为本书的编辑、出版付出了辛勤劳动，在此一并致以诚挚的感谢。

由于我们水平有限，书中不当之处在所难免，恳请同仁和读者指正。

李心灿

2002年春于北京

目 录

第二章　一元函数积分学

第三章　向量代数与空间解析几何

第四章　多元函数及其微分学

第五章 多元函数积分学

第一章　一元函数及其微分学

1. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且多项式 $g(x)=ax^2+bx+c$ 满足 $f(g(x))=g(f(x))$，其中 a,b,c 为任意实数。求 $f(x)$。

分析　要求函数 $f(x)$，关键在于利用多项式 $g(x)$ 的性质。由 $g(x)$ 中系数 a，b,c 的任意性可知 $g(x)$ 实际为零次、一次及二次多项式的集合，故可利用 a,b,c 的任意性对问题进行分析。

解法一　由于 $f(g(x))=g(f(x))$

即
$$f(ax^2+bx+c)=af^2(x)+bf(x)+c \tag{1}$$

(1) 由 a,b,c 的任意性知：当取 $a=b=0$ 时式也成立，即 $f(c)=c$

由 c 的任意性可得 $f(x)=x$。

解法二　在式(1)中取 $a=c=0$，且 $x=1$，得
$$f(b)=bf(1) \tag{2}$$

取　$b=c=0$，$x=1$　得 $f(a)=af^2(1)$　(3)

在式(2)、式(3)中令 $a=b=x$ 得　$f(x)=x$

解法三　在式(1)中令 $a=0$　$b=1$ 得
$$f(x+c)=f(x)+c$$

所以
$$\frac{f(x+c)-f(x)}{c}=1$$

即
$$\lim_{c\to 0}\frac{f(x+c)-f(x)}{c-0}=f'(x)=1$$

故
$$f(x)=x+c_1 \tag{4}$$

在式(1)中取 $a=b=c=0$，得 $f(0)=0$，代入式(4)

得　$c_1=0$　故　$f(x)=x$。

2. 设　$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0\\ x^2+x, & x>0\end{cases}$，试求 $f(-x)$。

(1992 年考研试卷三)

分析　此题可用下述几种解法求解。

解法一　令 $y=-x$，则 $x=-y$，代入 $f(x)$ 的表达式，有
$$f(-y)=\begin{cases}y^2, & -y\leqslant 0\\ (-y)^2-y, & -y>0\end{cases}$$