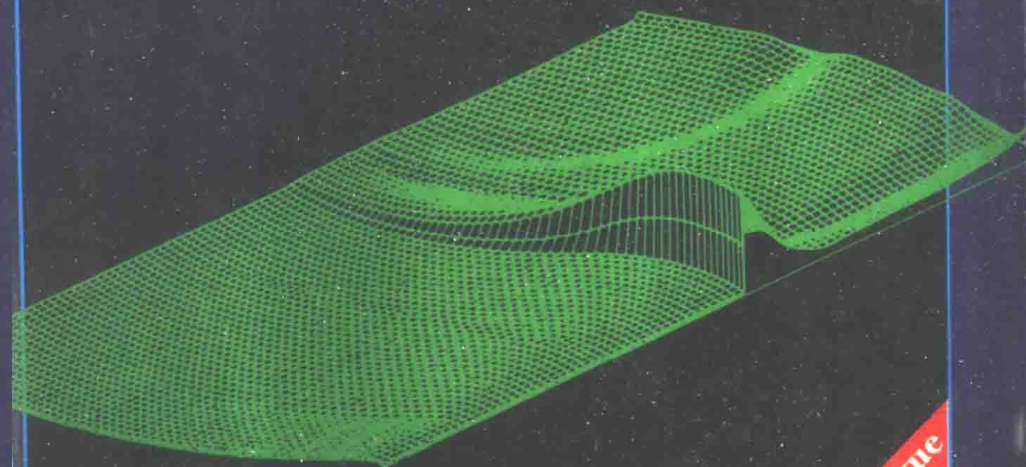


多维双曲波问题的 双特征方法

DUOWEI SHUANGQUBO
WENTI DE SHUANG TEZHENG
FANGFA

陈景秋 王宗笠 著



Chongqing Daxue
Chubanshe

重庆大学出版社

本书出版受华夏英才基金支持

多维双曲波问题的双特征方法

陈景秋 王宗筌 著

重庆大学出版社

内 容 简 介

作为引论,上卷简要地介绍了计算流体力学的一些基本概念和方法,下卷系统地介绍了连续介质动力学中多维双曲波问题的双特征线数值解法,包括可压缩流体力学的非线性双曲波问题和弹性动力学中的弹性波问题。

本书可供应用数学、力学、计算物理、航空航天、气象、海洋等专业的高校教师、科研人员和工程技术人员参考,也可供高校相应专业的研究生和高年级大学生参考。

图书在版编目(CIP)数据

多维双曲波问题的双特征方法/陈景秋,王宗筦著.重庆:重庆大学出版社,2000.6

ISBN 7-5624-2073-4

I. 多... II. ①陈... ②王... III. 非线性波;双曲波—数值计算 IV. O353.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 20874 号

多维双曲波问题的双特征方法

陈景秋 王宗筦 著

责任编辑 李淑芳

*

重庆大学出版社出版发行

新华书店经销

重庆大学建大印刷厂印刷

*

开本:850×1168 1/32 印张:8.625 字数:231 千

2001 年 6 月第 1 版 2001 年 6 月第 1 次印刷

印数:1—1000

ISBN 7-5624-2073-4/O·184 定价:15.00 元

前 言

本书系统地介绍了连续介质动力学中多维双曲波问题的双特征线数值解法,包括可压缩流体动力学的非线性双曲波问题以及弹性动力学中的弹性波问题.为了便于不熟悉数值解法的读者阅读,在上卷中简要地介绍了计算流体动力学(CFD: Computational Fluid Dynamics)作为引论;熟悉流体力学数值解法的读者可以跳过上卷,直接阅读下卷.我们假定读者熟悉流体力学,具有张量计算和偏微分方程的基础知识.不熟悉弹性动力学问题的读者,不必阅读最后两章.

本书下卷是在陈景秋(Chen Jingqiu)1988年在德国亚琛技术大学发表的博士论文“Ein Bicharakteristikenverfahren zur Berechnung der Druckwellenfokussierung in Kompressiblen Fluiden”的基础上,总结近年来有关的科研成果撰写而成的.

在科学和工程技术领域中波动是最广泛的物理现象之一.直观地说,波是任何可识别的信号以可识别的速度在介质中的传播.很难精确地区分所有不同类型的波,但可以区别两类主要的波:双曲波和色散波.双曲波在数学上用双曲型偏微分方程来描述.最简单的双曲波可用方程 $u_t + au_x = 0$ 描述,这个方程的精确解是熟知的.数学物理中的波动方程 $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ 给出另外一个有精确解的例子.在这里特征线具有基本的意义,扰动信号是沿特征线传播的.以上只是一维线性的情况.对于多维非线性双曲波问题,其求解要复杂得多,通常只能数值求解,但特征线仍具有基本的意义.这是由问题的物理本质决定的.

在多维非线性双曲波问题数值解法中,双特征方法保持了精

确度高、物理意义清晰的优点,特别是在处理复杂几何界面时有“贴体”的网格,既克服了在复杂几何条件下采用通常差分法构造贴体网格这一主要的困难,又避免了适应复杂几何条件的有限元法在每个时间步必须全局求解的缺点. Sauer^[47]将特征线区别为旁特征线和双特征线,双特征线简称双特征. 双特征方法由于其理论上的优点得到了广泛的应用,尤其是 Butler^[43]和 Rusanov^[46]建立了二阶精度的双特征方法以后. 从理论上说双曲型问题可用特征方法数值地求解,但在特征锥太尖或太钝时会出现实际计算的困难,例如气体动力学中 Mach 数太小或太大的情形. 在流体力学中,不可压缩流的基本方程可看成可压缩流基本方程在小 Mach 数下的极限,通过引入人工可压缩性,可将不可压缩流方程化为可压缩流方程求解. Navier-Stokes 方程仅比 Euler 方程多了线性形式的耗散项,Navier-Stokes 方程逼近的好坏很大程度上取决于 Euler 方程的逼近,所以 Euler 方程的数值解法对于计算流体力学具有基本的重要性. 在线性和非线性弹性波的研究中,双特征方法也有很精彩的应用,限于篇幅本书只讨论了线弹性的情形.

第 6 章一般地讨论了一阶拟线性双曲型方程组和间断关系式. 第 7 章对于三维不定常无粘流动,建立了 Euler 方程的双特征相容方程及其数值格式. 第 8 章建立了三维不定常无粘流动的双特征方程及其数值格式,其重点是讨论激波的反射相交等复杂的间断面的拟合构造问题,这对于通常的差分方法是很困难的. 第 9 章和第 10 章讨论平板中弹性波传播问题的双特征解法. 鉴于波传播问题的物理特点,整个下卷是采取几何方式来描述的,使得复杂的多维问题的描述显得更加清晰.

衷心感谢华夏英才基金资助本书的出版,诚挚感谢重庆大学对本书出版的支持.

限于作者水平,内容错误和疏漏之处在所难免,敬请读者批评指正.

作者 2000.6 于重庆大学

目 录

上卷 计算流体力学引论 1

1 流体力学基本方程 3

1.1 Navier-Stokes 方程的一般形式 3

1.2 Navier-Stokes 方程的正交曲线坐标形式 7

1.3 不可压均匀流体无粘性流动 9

1.4 可压无粘流动的 Euler 方程 10

1.5 不可压粘性流动 11

1.6 浅水方程 12

2 有限差分法基础 17

2.1 微分方程的数值解 17

2.2 模型方程 20

2.3 微分方程的差分格式 23

2.4 差分格式稳定性分析 26

2.5 对流方程的差分格式 29

2.6 扩散方程的差分格式 32

2.7 对流扩散方程的差分格式 34

2.8 差分格式的构造方法 36

2.9 有限差分离散数值效应 41

2.10 解隐格式方程的迭代法和追赶法 46

2.11 多步显格式 48

2.12 多维问题的算子分裂法 50

2.13 交错方向法(ADI法) 54

2.14	非线性对流扩散方程的交错方向法	56
3	不可压无粘无旋定常流的差分法	59
3.1	基本方程	59
3.2	差分格式的构造	60
3.3	差分方程组的解法	63
4	计算网格的构造方法	67
4.1	网格的代数生成法	68
4.2	边界拟合坐标法	74
4.3	一般坐标变换下的二维流动方程	78
4.4	一般坐标变换下的 Navier-Stokes 方程	82
4.5	有限体积法 (FVM)	83
5	无粘性可压缩流动	88
5.1	基本运动方程和间断关系式	88
5.2	一维无粘可压不定常流动的特征线方法	92
5.3	二维 Euler 方程的 FTCS 格式	100
5.4	二维 ICE 格式	105
5.5	单调差分格式	110
5.6	间断的 Riemann 分解和 Годунов 格式	113
5.7	矢通量分裂法	124
5.8	TVD 格式	131
5.9	隐式近似因子分解 (AF) 方法	143
下卷 多维双曲波问题的双特征方法		145
6	双曲型问题	147
6.1	一阶拟线性双曲型方程组	147
6.2	三维不定常流动的运动方程	150
6.3	间断关系式	153

7 无粘不定常流动问题的双特征方法	156
7.1 无粘不定常流动问题的双特征方法	156
7.2 相容方程与 Whitham 方程的关系	160
7.3 轴对称不定常流动问题的双特征差分格式	163
7.4 连续点双特征差分格式	166
7.5 间断点双特征差分格式	173
7.6 三维不定常流动的一种双特征数值格式	177
7.7 二维不定常无粘可压流动算例 水中激波的反射和聚焦	179
8 三维超音速无粘定常流动	184
8.1 方程和间断面关系式	184
8.2 三维定常超音速流动中的斜激波	186
8.3 激波的反射	188
8.4 激波的相交	190
8.5 三维超音速定常无粘流动的双特征方法	192
8.6 三维超音速定常无粘流动的双特征差分格式	195
8.7 连续点双特征差分格式	199
8.8 激波点双特征差分格式	202
8.9 流场的步进计算	212
8.10 算例 涡轮机中的轴向流动	213
9 线弹性动力学基本方程	218
9.1 线弹性动力学基本方程	218
9.2 Hamilton 变分原理	221
9.3 间断关系式	222
9.4 线弹性动力学二维问题	223
9.5 平面应变问题的双特征方程	225
10 平板弹性动力学问题的双特征方法	230
10.1 广义 Hamilton 原理	230
10.2 平板弹性动力学问题的 Hamilton 原理	231

10.3	平板弹性动力学问题的二阶近似	236
10.4	连续点的双特征方法	238
10.5	冲击波面的双特征方法	242
10.6	方向条件和相容方程的数值积分	245
10.7	连续点的双特征差分格式	250
10.8	间断面点的双特征差分格式	256
10.9	算例	259
参考文献		263

上 卷

计算流体力学引论

1 流体力学基本方程

1.1 Navier-Stokes 方程的一般形式

将三维空间中的点用 Descartes 直角坐标 x_1, x_2, x_3 来描述. 在 $t = t$ 时考虑一个封闭的物质体系, 它占有的空间区域为 $\Omega(t)$, 外表面 $\partial\Omega(t)$ 的外法线单位向量是 $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, 流体在点 (x_1, x_2, x_3) 处的密度、应力、速度和单位质量的总能量分别是 $\rho(x_i, t)$ 、 $\boldsymbol{\sigma}(x_i, t)$ 、 $\mathbf{V}(x_i, t)$ 和 $E(x_i, t)$, 而 $\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3)$, 根据物质的质量守恒、动量守恒和能量守恒定律, 可以得到流体物质体积的积分形式的平衡方程

$$\int_{\Omega(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{\partial\Omega(t)} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (1-1-1)$$

$$\int_{\Omega(t)} \frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} dV + \int_{\partial\Omega(t)} \rho \mathbf{V} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{F} dV + \int_{\partial\Omega(t)} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} dS \quad (1-1-2)$$

$$\int_{\Omega(t)} \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} dV + \int_{\partial\Omega(t)} \rho E \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega(t)} \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{V}) dS - \int_{\partial\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1-1-3)$$

其中 $\mathbf{F}(x_i, t)$ 是单位质量力, $\mathbf{q}(x_i, t)$ 是热流密度矢量.

应用 Reynolds 输运定理和 Gauss 定理, 可以由积分形式的守恒方程 (1-1-1) ~ (1-1-3) 得到相应的微分形式的平衡方程. 利用

Hamilton 算子“ ∇ ”,可写为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (1-1-4)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} \mathbf{V}) = \rho \mathbf{F} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (1-1-5)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{V}) = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{V}) - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (1-1-6)$$

这是所谓散度形式或守恒形式. 此方程组可以简化为非守恒形式

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1-1-7)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{F} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (1-1-8)$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{V} - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (1-1-9)$$

其中 e 为单位质量的内能, $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla$ 是物质导数算子, 而且

有 $E = e + \frac{1}{2} \mathbf{V}^2$, “:” 表示张量的两次缩并.

对于 Newton 流体本构方程为

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (1-1-10)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda (\nabla \cdot \mathbf{V}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} \quad (1-1-11)$$

其中 p 为静水压力, $\boldsymbol{\tau}$ 为粘应力张量, λ 和 μ 是粘性系数, $\mathbf{I}$ 是二阶单位张量, $\mathbf{D}$ 是变形率张量

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T] \quad (1-1-12)$$

$(\nabla \mathbf{V})^T$ 表示 $\nabla \mathbf{V}$ 的转置, $\nabla \mathbf{V}$ 是速度梯度.

将方程(1-1-10)代入(1-1-8)和(1-1-9), 得到

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} &= \rho \mathbf{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \\ &\quad (\nabla \cdot \mathbf{V}) \nabla \lambda + 2\mathbf{D} \cdot \nabla \mu \end{aligned} \quad (1-1-13)$$

$$\text{和} \quad \rho \frac{De}{Dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{V} + \phi - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (1-1-14)$$

其中 ϕ 是耗散函数

$$\phi = \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{V} = \lambda (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 + 2\mu \mathbf{D} : \mathbf{D} \quad (1-1-15)$$

能量方程可以用熵 S 写成以下形式

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = \phi - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (1-1-16)$$

此外设流体服从 Fourier 传热定律

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad (1-1-17)$$

其中 T 是绝对温度, k 是传热系数.

热力学定律决定了 $\phi \geq 0$, 于是有

$$3\lambda + 2\mu \geq 0, \mu \geq 0 \quad (1-1-18)$$

通常广泛采用的 Stokes 假设为

$$3\lambda + 2\mu = 0 \quad (1-1-19)$$

在此假设之下, 如果 λ 和 μ 为常数, 方程(1-1-13)成为

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \rho \mathbf{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \frac{1}{3}\mu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) \quad (1-1-20)$$

设长度、速度、密度、粘性系数和热传导系数依次用其相应的特征量 $L, V^*, \rho^*, \mu^*, k^*$, 而 $t, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{F}, E$ (和 e), $\mathbf{q}$ 依次用 $L/V^*, \rho^* V^{*2}, V^{*2}/L, V^{*2}, \rho^* V^{*3}$ 无量纲化, 并保留原来的字母表示相应的无量纲量, 则方程(1-1-1) ~ (1-1-9)形式不变. 如果用 $\rho^* V^{*2}$ 和 $\mu^* V^*/L$ 对 p 和 $\boldsymbol{\tau}$ 作无量纲化, 则无量纲的本构方程为

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \frac{1}{Re}\boldsymbol{\tau} \quad (1-1-21)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda (\nabla \cdot \mathbf{V}) + 2\mu \mathbf{D} \quad (1-1-22)$$

其中 $Re = \rho^* V^* L / \mu^*$ 为 Reynolds 数. 对于完全气体有无穷纲形式的 Fourier 定律

$$\mathbf{q} = -\frac{\gamma}{RePr} k \nabla e \quad (1-1-23)$$

$$\text{和} \quad e = T / [\gamma(\gamma - 1)M^2] \quad (1-1-24)$$

其中 Prandtl 数 $Pr = \mu^* c_p / k^*$, Mach 数 $M = V^* / \sqrt{\gamma R T^*}$, c_p 为定压

比热, R 为气体常数, γ 为等熵指数.

若耗散函数 ϕ 定义为 $\phi = \tau: \nabla V / Re$, 则能量方程 (1-1-14) 的无量纲形式不变. 引进满足 $T^* S^* = V^{*2}$ 的特征温度值 T^* 和特征熵值 S^* , 则能量方程 (1-1-16) 的无量纲形式不变.

方程 (1-1-4) ~ (1-1-6) 或方程 (1-1-7) ~ (1-1-9) 称为完全的 Navier-Stokes 方程, 简称 NS 方程. 以通常的直角坐标记号 x, y, z , u, v, w 代替 $x_1, x_2, x_3, V_1, V_2, V_3$, 则守恒形式的完全 NS 方程可以表示为

$$U_t + F_x + G_y + H_z = Q \quad (1-1-25)$$

其中 $U_t = \partial U / \partial t$, $F_x = \partial F / \partial x$, $G_y = \partial G / \partial y$, $H_z = \partial H / \partial z$, 而 $F = F_i + F_v$, $G = G_i + G_v$, $H = H_i + H_v$, 各向量定义如下:

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho f_x \\ \rho f_y \\ \rho f_z \\ \rho(f_x u + f_y v + f_z w) \end{bmatrix}$$

$$F_i = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (\rho E + p)u \end{bmatrix} \quad F_v = \frac{-1}{Re} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} + \frac{\gamma k}{Pr} \frac{\partial e}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (1-1-26)$$

$$G_i = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (\rho E + p)v \end{bmatrix} \quad G_v = \frac{-1}{Re} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} + \frac{\gamma k}{Pr} \frac{\partial e}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho w u \\ \rho w v \\ \rho w^2 + p \\ (\rho E + p) w \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_v = \frac{-1}{R_e} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} + \frac{\gamma k}{Pr} \frac{\partial e}{\partial z} \end{bmatrix}$$

其中 f_x, f_y, f_z 分别为质量力的 3 个坐标方向上的分量, $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yy}, \tau_{yz}, \tau_{zz}$ 分别是粘应力分量.

1.2 Navier-Stokes 方程的正交曲线坐标形式

设 x, y, z 为点的 Descartes 直角坐标, 线性独立的函数

$$q_i = q_i(x, y, z), \quad (i = 1, 2, 3)$$

当其 Jacobi 行列式

$$J = \frac{\partial(q_1, q_2, q_3)}{\partial(x, y, z)}$$

处处不为零或无穷时, 建立了 (x, y, z) 和 (q_1, q_2, q_3) 之间的 1-1 变换, q_i 称为点的曲线坐标, $i = 1, 2, 3$.

设空间点 P 的矢径为 $\mathbf{r}$, 在 Descartes 坐标系中

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

在 P 点处定义坐标系 (q_1, q_2, q_3) 的基矢量如下:

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \mathbf{k}, \quad i = 1, 2, 3$$

若基矢量满足 $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0 (i \neq j)$, 则坐标系 (q_1, q_2, q_3) 称为正交的.

$$d\mathbf{r} = dq_1 \mathbf{e}_1 + dq_2 \mathbf{e}_2 + dq_3 \mathbf{e}_3 =$$

$$\sum_{i=1}^3 |\mathbf{e}_i| dq_i \mathbf{e}_i / |\mathbf{e}_i| =$$

$$\sum_{i=1}^3 h_i dq_i \mathbf{n}_i$$

其中

$$h_i = |\mathbf{e}_i| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{e}_i / |\mathbf{e}_i|$$

流体速度 $\mathbf{V}$ 在坐标基 $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$ 中可以写为

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{n}_i$$

在坐标基 $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$ 中连续方程(1-1-8)成为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{1}{h_k} h_1 h_2 h_3 \rho v_k \right) = 0 \quad (1-2-1)$$

在 $\mathbf{n}_1$ 方向上动量方程(1-1-9)表述为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_1) + \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{h_k} h_1 h_2 h_3 T_{k1} \right) + \\ \frac{1}{h_1 h_2} \left(T_{12} \frac{\partial h_1}{\partial q_2} - T_{22} \frac{\partial h_2}{\partial q_1} \right) + \\ \frac{1}{h_1 h_3} \left(T_{13} \frac{\partial h_1}{\partial q_3} - T_{33} \frac{\partial h_3}{\partial q_1} \right) = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_1 \end{aligned} \quad (1-2-2)$$

将式中的下标 1, 2, 3 循环置换, 即得另外两个方向的动量方程. 在方程(1-2-2)中各量定义如下:

$$T_{ij} = \rho v_i v_j + p \delta_{ij} - \frac{1}{Re} \tau_{ij}$$

$$\tau_{ij} = \lambda (\nabla \cdot \mathbf{V}) \delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{1}{h_k} h_1 h_2 h_3 v_k \right)$$

$$D_{ii} = \frac{1}{h_i} \left(\frac{\partial v_i}{\partial q_i} \right) + \frac{v_j}{h_i h_j} \frac{\partial h_i}{\partial q_j} + \frac{v_k}{h_i h_k} \frac{\partial h_i}{\partial q_k}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{h_i} \frac{\partial v_j}{\partial q_i} + \frac{1}{h_j} \frac{\partial v_i}{\partial q_j} - \frac{1}{h_i h_j} \left(v_i \frac{\partial h_j}{\partial q_i} + v_j \frac{\partial h_i}{\partial q_j} \right) \right], i \neq j$$

D_{ii} 中的 i, j, k 是 1, 2, 3 的循环置换.

能量方程(1-1-10)成为