面向自考、函授、电大、夜大、高职考生

新编高等数学自学指南

（上册）

李广民　冯晓慧　任春丽　编

西安电子科技大学出版社
2001

前　言

在学习高等数学中，不少人有过这样的体验：对于教材中的定理及其逻辑证明能够看懂，也能记住一些，但在独立做题时，常会有困惑之感，且会出错，而且错了也不知道错在哪里，为什么错。对于灵活性较大、综合性较强的题目，更觉得无从下手。尤其是参加成人教育学习的读者，学习课时较少，有些同学在学习中没有老师指导。为了帮助这部分学生深入理解高等数学的基本内容，熟悉各种题型，抓住重点，突破难点，掌握必要的解题方法与技巧，提高应试能力，顺利地通过自学考试，编者以《高等工科院校成人教育〈高等数学〉教学基本要求》为依据，编写了本书。

本书在选材、例题、习题的结构形式上尽量适应成人自学的特点。本书分为上、下两册，共计12章。上册包括：函数，极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用。下册包括：向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数，常微分方程。

各章内容由以下四部分组成：

1. 本章要点。列出了本章的主要内容。包括基本概念、定理、性质及重要公式等。为了便于查阅、比较、记忆，绝大部分内容以表格形式给出。

2. 疑难解答。针对教学实践中基本概念、基本理论和基本运算中经常出现的概念性错误，以问答的形式给予解释。在阐述过程中侧重于基本概念的深化理解，澄清一些模棱两可的模糊认识，注意相关概念的区别与联系；对于一些重要概念和方法，也

给出了小结和归纳。

3. 例题分析。考虑到自学考试题型的特点，精选了极具启发性、针对性、典型性的例题。这些例题内容广泛，可归纳为四个类型：客观题、解答题、综合题及错解分析。本书把重点放在对典型例题的分析解答上，注重解题思路的分析，解题方法、解题技巧的总结与归纳、以尽量做到论证说理清楚，解题思路广阔。有些例题还根据实际问题给出了多种解法，体现了解题的灵活性。有不少例题还带有附注或应注意的问题。错解分析中的例题多数选自学生的课外作业和考试答卷，具有代表性和针对性。其目的是通过对错解的剖析，给出正确解法，使读者从正反两方面的对比中学会正确的思维方法，提高解题能力。

4. 自测习题。为了便于复习，每章后面选编了一定数量的习题并附有答案，这些习题尽可能适应自学考试的特点。

在附录中给出了初等数学中常用的公式，近年三套成人自学考试试题及解答，专升本试题及解答，西安电子科技大学高等数学期末考试试题两套及解答。

本书由李广民(1、2、7、11、12 章)，冯晓慧(5、6、9、10 章)，任春丽(3、4、8 章)编写。在本书的编写过程中，刘三阳、王金金先生和于力女士给予了热情的关心和指导。本书的出版还得到了西安电子科技大学出版社领导及编辑部的大力支持，他们为本书的出版付出了辛勤劳动，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平所限，疏漏与错误在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2000.10

第 1 章

函　　数

1.1 本章要点

1. *函数概念*

1）定义

设 x，y 是变量，如果当变量 x 在某一范围内取一数值时，变量 y 按照确定的法则，总有一个确定的数值和它对应，变量 y 叫做变量 x 的函数，记为 $y=f(x)$.

2）函数的表示法

一个函数的自变量与因变量之间的对应法则可以用数学式子、表格和坐标平面上的曲线给出，这些表示函数的方法分别称为解析法、列表法和图像法.

解析法表示的函数便于计算及理论研究；列表法表示的函数直接给出了自变量及函数值，无需计算；图像法表示的函数形象直观，一目了然. 这里主要研究解析法表示的函数.

3）复合函数

如果 y 是 u 的函数：$y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数：$u=\varphi(x)$，则称 y 是 x 的复合函数，记为

$$y = f[\varphi(x)]$$

这里 x 是自变量，y 是函数，u 是中间变量.

4）反函数

设函数 $y=f(x)$，若把 y 看作自变量，把 x 看作 y 的函数，即 $x=\varphi(y)$，称为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，或改写为 $y=f^{-1}(x)$.

直接函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图形相同；$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

2. 基本初等函数

基本初等函数如下表所示：

名　称	函数关系	定义域
幂函数	$y=x^\alpha$（α 为实数）	$x\in(0, +\infty)$
指数函数	$y=a^x(a>0, a\neq1)$	$x\in(-\infty, +\infty)$
对数函数	$y=\log_a x\ (a>0, a\neq1)$	$x\in(0, +\infty)$
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty, +\infty)$
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty, +\infty)$
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k=0, \pm1, \cdots$
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$，$k=0, \pm1, \cdots$
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1, 1]$
	$y=\arccos x$	$x\in[-1, 1]$
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty, +\infty)$
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty, +\infty)$

3. 初等函数与非初等函数

初等函数与非初等函数如下表所示：

名　称	定　　义	例
初等函数	由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合而得到，并且用一个式子来表达的函数	$y=\sin^2 x+\log_2 x$ $y=e^{2x}+\sqrt{1+x^2}$
非初等函数	不是初等函数的函数	$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$

4. 函数的性质

函数的性质如下表所示：

$f(x)$	定义域	定　　义	例
单调增(减)	(a, b)	$\forall x_1, x_2 \in (a, b)$，$x_1<x_2$，有 $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$	$y=x^2$，$x\in(0, +\infty)$ $y=\dfrac{1}{x}$，$x\in(0, +\infty)$
有界性	(a, b)	$\exists M>0$，$\forall x\in(a, b)$，有 $\lvert f(x)\rvert\leqslant M$	$y=\dfrac{1}{1+x^2}$，$x\in(-\infty, +\infty)$ $y=\sin x$，$x\in(-\infty, +\infty)$
奇(偶)性	$(-l, l)$	$\forall x\in(-l, l)$，有 $f(-x)=-f(x)$ $(f(-x)=f(x))$	$y=\arctan x+x^3$ $y=\cos x+\sqrt{x^2+1}$

1.2　疑难解答

问题 1　如何求函数的定义域？

答　高等数学中主要讨论由解析法表示的函数，函数的定义

域就是解析式有意义的自变量的取值范围，因此求函数的定义域，通常用“排除法”. 即：分母不能为零；负数不能开偶次方；零和负数没有对数；零和负指数幂的底不能为零；反三角函数不能超出主值范围等等. 对于由实际问题确定的函数，其定义域应根据实际问题的意义而定. 求函数定义域的基本方法，是根据上述的限制条件，列出不等式(或不等式组)，再解不等式以确定函数的定义域.

例 求函数 $y=\lg(x-1)+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$的定义域.

解 由于真数必须大于 0，故 $x-1>0$，对于$\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$，必须 $x+1>0$，所以函数的定义域为满足不等式组

$$\begin{cases}x-1>0\\x+1>0\end{cases}$$

的 x 的全体. 即为 $x>1$，故定义域为$(1,+\infty)$.

问题 2 如何判定函数的奇偶性?

答 判别函数的奇偶性，通常有两种方法：

方法一 根据定义直接验证.

例如，函数 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

因为 $f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)$

$$=\ln\left[\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right]$$

$$=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$=-f(x)$$

所以，$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$是奇函数.

方法二 利用奇偶函数的运算性质，即

(1) 奇函数乘(除)以偶函数等于奇函数；

(2) 奇函数乘(除)以奇函数等于偶函数；

(3) 偶函数乘(除)以偶函数等于偶函数；

(4) 奇函数加(减)奇函数等于奇函数；

(5) 偶函数加(减)偶函数等于偶函数.

例如，因为 $y=x$，$y=\sin x$ 都是奇函数，所以

$$f(x)=x\sin x,\ g(x)=\frac{\sin x}{x}$$

都是偶函数. 又因为 $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 是奇函数，$y=\cos x$ 是偶函数，所以

$$f(x)=\cos x\cdot\ln(x+\sqrt{x^2+1}),$$

$$g(x)=\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\cos x}$$

都是奇函数.

问题 3　如何求周期函数的周期?

答　求周期函数的周期通常有两种方法.

方法一　根据周期函数的定义，解关于 T 的方程

$$f(x+T)-f(x)=0$$

求出与 x 无关的所有 T 值中的最小正数.

例　求周期函数 $\sin^2 x$ 的周期.

解　方程 $\sin^2(x+T)-\sin^2 x=0$ 可依次变形为

$$[\sin(x+T)+\sin x][\sin(x+T)-\sin x]=0$$

$$\sin\frac{2x+T}{2}\cos\frac{T}{2}\cos\frac{2x+T}{2}\sin\frac{T}{2}=0$$

由 $x\in(-\infty,+\infty)$ 的任意性可得 $\sin(T/2)=0$ 或 $\cos(T/2)=0$，即

$$T=2k\pi \text{ 或 } T=(2k+1)\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

容易看出满足上式的最小正常数是 $T=\pi$. 故 $\sin^2 x$ 的周期为 π.

方法二 利用一些基本结果求给定函数的周期.

例如，由于 $\sin^2 x$ 的周期为 π，而由 $\cos^2 x=1-\sin^2 x$，$|\sin x|=\sqrt{\sin^2 x}$，$|\cos x|=\sqrt{\cos^2 x}=\sqrt{1-\sin^2 x}$ 可知，$\cos^2 x$，$|\sin x|$，$|\cos x|$的周期均为 π.

问题 4 设 $f(x)$是定义在$(-\infty, +\infty)$上的函数，且$\forall a>0$，$f(x)$在$[-a, a]$上有界，那么 $f(x)$在$(-\infty, +\infty)$内是否一定为有界函数？

答 不一定. 例如 $f(x)=x^2$，$\forall x\in[-a, a]$，取 $M_a=a^2$，则有$|f(x)|=|x^2|=|x|^2\leqslant a^2=M_a$，即 $f(x)$在$[-a, a]$上有界，但 $f(x)=x^2$ 在$(-\infty, +\infty)$上无界. 这个例子说明：在有限区间上的结果不能随意推广到无穷区间上去.

问题 5 如何证明函数在已知区间上有界或无界？

答 (1) 要证明函数 $f(x)$在区间 I 上有界，根据定义，只要找到与 x 无关的常数 $M>0$，使得$\forall x\in$ I，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

这里，M 的大小并无限制. 因此，在证明过程中通常用适当放大的方法，即用比较简单的函数 $\varphi(x)$代换 $f(x)$，使$|f(x)|\leqslant|\varphi(x)|$，然后再找 $M>0$，使$|\varphi(x)|<M$.

例 证明 $f(x)=\operatorname{th} x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$在其定义域上有界.

证 $\forall x$，因为

$$|f(x)|=|\operatorname{th} x|=\left|\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right|\leqslant\frac{|e^x|+|e^{-x}|}{e^x+e^{-x}}$$

$$=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1$$

故 $f(x)=\operatorname{th} x$ 在其定义域上有界.

注 本例中的 $\varphi(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1$，满足$|f(x)|\leqslant|\varphi(x)|$，而

$|\varphi(x)|$很容易进行估计.

(2) 要证明 $f(x)$在 I 上无界，即证明：不存在某个常数 $M>0$，使对一切 $x\in$ I，都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

这等价于对任意的 $M>0$，至少有一点 $x_0\in$ I，使

$$|f(x_0)|>M$$

例 证 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在(0，1)内无界.

证 $\forall M>0$，取 $x_0=\dfrac{1}{M+1}\in(0,1)$，而

$$|f(x_0)|=M+1>M$$

故 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在(0，1)内无界.

1.3 例题分析

1.3.1 客观题

例 1 单项选择题：

(1) ____是一对相同的函数.

A) x 与 $e^{\ln x}$　　B) $2\ln x$ 与 $\ln x^2$

C) $\dfrac{x}{x(x+1)}$与$\dfrac{1}{x+1}$　　D) 1 与 $\cos^2x+\sin^2x$

(2) 设函数 $y=\arcsin(x-2)$，它的定义域为____.

A) $|x|<1$　　B) $1<x\leqslant2$

C) $1\leqslant x\leqslant3$　　D) $|x|\leqslant3$

(3) 设 $f(x)$是奇函数，$g(x)$是偶函数，则函数____是奇函数.

A) $f[g(x)]$　　B) $g[f(x)]$

C) $f[f(x)]$　　D) $g[g(x)]$

(4) $\max\{f(x), g(x)\}=$____.

A) $\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|]$

B) $\frac{1}{2}[|f(x)-g(x)|-f(x)-g(x)]$

C) $\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]$

D) $f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|$

(5) 已知函数 $f(x)$是奇函数，而且当 $x>0$ 时，是增函数；$x<0$ 时，$f(x)$____.

A) 是增函数

B) 是减函数

C) 可能是增函数，也可能是减函数

D) 既非增函数，也非减函数

(6) 设 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，则等式____成立.

A) $f(x)+1=f(x+1)$

B) $f(-x)=f(x)$

C) $f(-x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ $(x\neq0)$

D) $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$ $(x\neq0)$

分析

(1) 由于 $y=x$ 的定义域为$(-\infty, +\infty)$，而 $y=e^{\ln x}$的定义域为$(0, +\infty)$，故 $y=x$ 与 $y=e^{\ln x}$不是相同的函数；$y=2\ln x$与 $y=\ln x^2$ 的定义域分别为$(0, +\infty)$，$(-\infty, +\infty)$，它们不是同一函数；$y=\frac{x}{x(x+1)}$与 $y=\frac{1}{x+1}$的定义域不相同，也不是同一函数；$y=1$，$y=\cos^2x+\sin^2x$ 的定义域均为$(-\infty, +\infty)$，函数关系也相同，且恒等于 1，故填 D).

(2) $y=\arcsin(x-2)$的定义域为$|x-2|\leqslant1$，即为 $1\leqslant x\leqslant3$，

故填 C).

(3) 因为 $f[g(-x)]=f[g(x)]$，所以，$f[g(x)]$为偶函数；

因 $g[f(-x)]=g[-f(x)]=g[f(x)]$，所以，$g[f(x)]$为偶函数；

因 $f[f(-x)]=f[-f(x)]=-f[f(x)]$，所以，$f[f(x)]$为奇函数；

因 $g[g(-x)]=g[g(x)]$，所以，$g[g(x)]$为偶函数.

从而填 C).

(4) 因为

$$\max\{f(x),\ g(x)\}=\begin{cases}f(x), & f(x)\geqslant g(x)\\ g(x), & f(x)<g(x)\end{cases}$$

而

$$\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|]$$

$$=\begin{cases}g(x), & f(x)\geqslant g(x)\\ f(x), & f(x)<g(x)\end{cases}$$

$$\frac{1}{2}[|f(x)-g(x)|-f(x)-g(x)]$$

$$=\begin{cases}-g(x), & f(x)\geqslant g(x)\\ -f(x), & f(x)<g(x)\end{cases}$$

$$\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|]$$

$$=\begin{cases}f(x), & f(x)\geqslant g(x)\\ g(x), & f(x)<g(x)\end{cases}$$

$$f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|$$

$$=\begin{cases}2g(x), & f(x)\geqslant g(x)\\ 2f(x), & f(x)<g(x)\end{cases}$$

故填 C).

(5) 由于函数 $f(x)$是奇函数，而且当 $x>0$ 时单增，故当 $x_2>x_1>0$时，有 $f(x_2)>f(x_1)$，可得$-x_2<-x_1<0$，$f(-x_2)-$

$f(-x_1)=-f(x_2)+f(x_1)=f(x_1)-f(x_2)<0.$

即 $$f(-x_2)<f(-x_1)$$

可见 $f(x)$ 在 $x<0$ 时也单增. 从而填 A).

(6) 由 $f(x)+1=\frac{1-x}{1+x}+1=\frac{2}{1+x}$

$$f(x+1)=\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=\frac{-x}{2+x}$$

则 A) 不成立;

由 $f(-x)=\frac{1+x}{1-x}\neq f(x)$, 则 B) 不成立;

由 $f(-x)=\frac{1+x}{1-x}$, $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x+1}$ $(x\neq0)$, 则 C) 不成立;

由 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x-1}{x+1}(x\neq0)$, $-f(x)=\frac{x-1}{x+1}$, 故填 D).

例 2 多项选择题:

(1) 与 $y=2x$ 完全相同的函数有____.

A) $y=\lg 10^{2x}$ B) $y=10^{\lg 2x}$

C) $y=2\sin(\arcsin x)$ D) $y=2t(\cos^2 t+\sin^2 t)$

(2) 分析 $y=a^2\sin^2 bx$ 的复合过程, 正确的是____.

A) $y=au$, $u=av$, $v=w^2$, $w=\sin bx$

B) $y=uv$, $u=a^2$, $v=\sin^2 w$, $w=bx$

C) $y=a^2u$, $u=v^2$, $v=\sin w$, $w=bx$

D) $y=u^2$, $u=av$, $v=\sin w$, $w=bx$

(3) 下列函数中, 是初等函数的是____.

A) $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$

B) $f(x)=\begin{cases}2, & x<1\\ 4, & x>1\end{cases}$

C) $f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$

D) $f(x)=\begin{cases}1-x^3, & x>0\\ 1+x^3, & x\leqslant 0\end{cases}$

(4) $f(x)$在 x 的某个变化范围 D 内有界，可以定义当 $x\in D$ 时，存在常数 K(或 L, M)，使____成立.

A) $|f(x)|<K$　　B) $f^2(x)\leqslant K$

C) $f(x)<K$　　D) $L<f(x)<M$

(5) 任何对称区间上的函数，____的说法不正确.

A) 不是奇函数就是偶函数

B) 不可能既是奇函数又是偶函数

C) 总可以表示为奇、偶函数之和

D) 总可以表示为奇、偶函数之积

分析

(1) 两个函数是否相同，一看对应法则，二看定义域. 用上述两个标准可验证：A)，D)中的函数与 $y=2x$ 相同. B)，C)中的函数在它们各自的定义域与 $y=2x$ 的对应法则相同，但定义域不同，故它们与 $y=2x$ 不表示同一函数，本题选择 A)，D).

(2) 分析复合函数就是将其分解为基本初等函数(有限个)及其四则运算(有限次). 而 A)，B)中的 $w=\sin bx$，$v=\sin^2 w$ 都不是基本初等函数. 故应选 C)，D).

(3) 分段函数并非都是非初等函数，只要改写后符合初等函数的定义，就是初等函数. 本题所给的四个分段函数可分别改写为

$$\sqrt{x^2}/x;\ 3+\sqrt{(x-1)^2}/(x-1);\ \sqrt{x^2};\ 1-\sqrt{x^6}$$

它们都是初等函数. 当然，这样的改写有时是困难的甚至是不可能的. 因此，对于分段函数，除特殊需要外，没有必要去鉴别它是不是初等函数.

(4) 一般教材上把 $f(x)$在 D 上有界定义为：$\exists K>0$，$\forall x\in D$，都有 $|f(x)|\leqslant K$. 实际上 A)，B)，D)与这一定义是等价的.

首先，在函数有界性的表达中，不等式能否取等号是无关紧要的. 若 $|f(x)|<K$，当然有 $|f(x)|\leqslant K$. 反之，由 $|f(x)|\leqslant K$ 可得 $|f(x)|<K'$，这里 $K'=K+1$ 仍是常数.

其次，$L\leqslant f(x)\leqslant M$ 与 $|f(x)|\leqslant K$ 也是一致的，因为当 $|f(x)|\leqslant K$，即 $-K\leqslant f(x)\leqslant K$ 时，记 $L=-K$，$M=L$，就有 $L\leqslant f(x)\leqslant M$. 反之，若 $L\leqslant f(x)\leqslant M$，只要取 $K=\max\{|L|,|M|\}$，便得 $|f(x)|\leqslant K$. 此外，显然有

$$f^2(x)\leqslant K\Leftrightarrow|f(x)|\leqslant K',K'=\sqrt{K}$$

注 $f(x)<K$ 只表示 $f(x)$有上界而非有界. 故本题应选 A)，B)，D).

(5) A)错，例如 $f(x)=x+1$，非奇，非偶.

B)错，因既奇且偶的函数是存在的，如 $f(x)=0$.

C)正确. 因为

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]\\&=H(x)+G(x)\end{aligned}$$

其中，

$H(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$为偶函数；

$G(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$是奇函数.

D)错. 因为非零奇函数和偶函数之积为奇函数，故对任何非奇函数而言，D)不成立. 故本题应选 A)，B)，D).

例 3 填空题：

(1) 函数 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$的反函数是 $y=$________.

(2) 设 $f(x)=ax+b$，当 $a=$______________，$b=$任意数时，$f[f(x)]=x$.

(3) 设 $f(x)=1+\ln x$，$g(x)=\sqrt{x}+1$，则 $f[g(x)]=$
________.

(4) 设 $f(x)$ 是周期函数，且其周期为 1，那么 $F(x)=f(3x+1)$ 也是周期函数，它的周期是________.

(5) 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，则 $f[f(x)]=$________.

(6) 设 $f(x)$ 满足等式 $f^2(\ln x)-2xf(\ln x)+x^2\ln x=0$ $(0<x\leqslant \mathrm{e})$，且 $f(0)=0$，则 $f(x)=$________.

分析

(1) 由 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ 中解出 x，得 $x=\dfrac{1+y}{1-y}$，故 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ 的反函数为 $y=\dfrac{1+x}{1-x}$，可填 $\dfrac{1+x}{1-x}$.

(2) $f[f(x)]=af(x)+b=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b=x$，则 $a^2=1$，$ab+b=0$，则 $a=-1$，故填 $a=-1$.

(3) $f[g(x)]=1+\ln g(x)=1+\ln(\sqrt{x}+1)$，应填 $1+\ln(\sqrt{x}+1)$.

(4) 因

$$\begin{aligned}F\left(x+\frac{1}{3}\right)&=f\left[3\left(x+\frac{1}{3}\right)+1\right]\\&=f(3x+1+1)\\&=f(3x+1)=F(x)\end{aligned}$$

所以 $F(x)$ 的周期为 $\dfrac{1}{3}$.

(5) $$f[f(x)]=\begin{cases}f(1), & |x|\leqslant 1\\ f(0), & |x|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$$

应填 1.

(6) 从等式 $f^2(\ln x)-2xf(\ln x)+x^2\ln x=0$ 中解出 $f(\ln x)$，

有

$$f(\ln x)=x(1\pm\sqrt{1-\ln x})$$
$$f(x)=e^x(1\pm\sqrt{1-x})$$

且 $f(0)=0$，可得 $f(x)=e^x(1-\sqrt{1-x})$ ($f(x)=e^x(1+\sqrt{1-x})$ 舍去).

1.3.2 解答题

例 4 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{9-x^2}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$；

(2) $y=\sqrt{\dfrac{x^2(x-4)}{(x^2-1)(9-x^2)}}$.

解 (1) 欲使函数有意义，必须有

$$\begin{cases}9-x^2\geqslant 0\\ \left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1\end{cases}$$

$9-x^2\geqslant 0$，即 $(3-x)(3+x)\geqslant 0\Rightarrow\begin{cases}3-x\geqslant 0\\3+x\geqslant 0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}3-x\leqslant 0\\3+x\leqslant 0\end{cases}$

前一不等式组的解为 $-3\leqslant x\leqslant 3$，后一不等式组无解；

$\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1\Leftrightarrow -1\leqslant\dfrac{2x-1}{7}\leqslant 1\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1\leqslant 7\\2x-1\geqslant -7\end{cases}$，解得 $-3\leqslant x\leqslant 4$，故所求定义域为两者的公共部分，即 $-3\leqslant x\leqslant 3$.

(2) 由于在实数范围内，负数不能开平方，所以

$$\frac{x^2(x-4)}{(x^2-1)(9-x^2)}\geqslant 0$$

因此，需要解以下的方程组：

(i) $\begin{cases}x^2(x-4)\geqslant 0\\(x^2-1)(9-x^2)>0\end{cases}$

(ii) $\begin{cases}x^2(x-4)\leqslant 0\\(x^2-1)(9-x^2)<0\end{cases}$