

内 容 简 介

本书是《平面连杆机构分析与综合》(科学出版社,1989)一书的第二版。本书第一章介绍机构自由度计算公式,并讨论机构奇异形位及瞬变系统自由度。第二章介绍机构及杆组的结构分类及类型综合,求解仅含单铰及含复铰的结构类型综合,得出了附录 I 及附录 II 的杆组结构图例。第三章介绍了机构的型转化理论,介绍了平面连杆机构型转化基本单元类型,用拓扑分析求解杆组中最小型转化数,机构中杆组的分解。第四章到第六章分别介绍机构位移、速度、加速度及力计算并给出了杆组结构单元运动分析、力计算的数学模型及子程序(附录 III 及附录 IV)。第七章介绍了液气压式连杆机构的分析。第八章介绍平面连杆机构解析法尺度综合。第九章介绍平面机构优化设计原理,内容涉及到多功能设计。第十章介绍空间机构的分析与综合。第十一章为装载机工作装置、优化设计的实例研究。

本书可供机械设计人员、高等学校机械专业的研究生、大专院校师生、从事机构综合科研的人员阅读。

图书在版编目(CIP)数据

连杆机构的分析与综合/曹惟庆等著.—2版.—北京:
科学出版社,2002.5

ISBN 7-03-009903-6

I.连… II.曹… III.连杆机构 IV.TH112.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 078436 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1989年4月第 一 版 开本: B5 (710×1000)

2002年5月第 二 版 印张: 20 1/4

2002年5月第二次印刷 字数: 373 000

印数: 2 651—4 650

定价: 42.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈新欣〉)

前 言

自《平面连杆机构分析与综合》(第一版)出版以来,得到国内专业人员的广泛关注,许多作者在他们的有关论著中引用该书并加以评论,有不少院校将该书选为研究生教材.由于该书出版已经十多年,在这段时间里,作者先后承担了三项国家自然科学基金,获得一些新的成果,需要对该书第一版进行补充和修订.

在机构创新设计中,机构分类及结构类型综合有重要价值,因而受到国内外学术界的重视.作者在第一版中介绍了由单铰组成的机构结构分类及类型综合问题,得到了及于八杆杆组的全部结构类型,图例见本书附录 I.但是在多杆机构中复合铰链的存在是不可避免的,而关于含复铰杆组的研究还很不完善,作者从复铰的组成学出发提出了复铰因子的概念,并将它作为复铰的基本结构参数,从而解决了含复铰运动链的型分类及型综合问题,得出了及于八杆的含复铰杆组全部结构类型,图例见附录 II.关于高阶杆组的型转化理论,本书所增编的第三章内容中,提出了用拓扑理论求解杆组中最小型转化数,以及机构作杆组分解的结构分析以及计算机自动生成问题.

第一版在用型转化理论求解高阶杆组的运动分析、力计算的程序设计时只给出了传统的五种双杆组的结构单元的数学模型及程序,在本书中补充细化了移动副与移动副元素的结构装配的变化,编入了虚拟单构件九种及常用的约束单构件六种、双杆组结构单元十一种的运动分析数学模型.利用 Turbo Pascal 语言编制了一套运动分析与力计算的子程序(KDAMS),能达到实现对复杂平面连杆机构运动分析、力计算的全过程自动生成,且所费机时少,所占内存小,在一般微机上都可运行.

此外,本书调整了尺度综合及优化综合的内容,亦删除了一些章节,增编了“空间机构分析与综合”一章,扩大了本书的适用范围,书名改为《连杆机构的分析与综合》,从而使其有可能更适合作为机械类各专业研究生教材.

参加本书编写工作的还有薛隆泉(第七章、第九章及部分附录 II),刘宏昭(第八章、第十章),饶建华(第三章、附录 III 及 IV),王军(第十一章).

本书承合肥工业大学丁爵曾教授悉心审稿,谨致谢忱.

作 者

2001年6月

第一版前言

平面连杆机构广泛地应用于各种机构。农业、纺织、轻工、重型、冶金、精密等各机械行业中大量应用着平面连杆机构。

在平面连杆机构中最基本的型式为四杆机构。关于四杆机构的分析与综合问题已进行了不少研究工作。但是，不论在运动学及动力学方面，四杆机构仍有进一步研究的必要。至于六杆以上的多杆机构，特别是多杆多自由度机构，目前的工作还很不完善。随着机械自动化、机械手、机器人的发展，人们对机构所需满足的运动特性及动力特性有更高的要求。在国际上亦十分注意这方面的工作^[20]。

苏联机械学家阿苏尔（Л. В. Аскуп）提出他的机构组成学即阿苏尔运动链（杆组）的概念后，不少苏联学者继承并发展了他的工作。但是，苏联学派在杆组理论上存在着不足之处，他们没有建立杆组组成原理的系统的方法。另外，研究机构结构理论的目的应是对机构运动分析及力计算甚至尺度综合有指导意义。阿尔托博列夫斯基（И. И. Артоболевский）院士在他的原著^[2]中提出了机构分类的方法，但是在内容上仅涉及二级组五种型的运动分析及力计算，三级以上机构研究得不多。

作者从60年代起就从事机构结构理论及机构组成的研究，认为苏联学派有其优点，也有其不足之处，杆组成为机构结构的一个基本单元，起了“积木式”的作用，那么杆组是否能够转化再分解，归纳为最基本的结构形式，从而使机构的分析与综合得到简化呢？由此，作者提出了平面杆组型转化的理论^[7]。作者的意图是对机构的组成、运动学与动力学提供一个研究的体系。

本书稿是在作者承担科研课题“多杆机构运动分析理论及计算图表”取得成果的基础上编写而成，初稿完成后曾在教学实践中试用。

参加本书部分章节编写的还有作者指导的几位研究生，他们是薛隆泉、贾玉明、王军等。周赫民、刘宏昭对本书提出了不少修改意见。

本稿承合肥工业大学丁爵曾教授悉心审阅，提出了许多宝贵意见，作者特为之表示谢忱。

作者

1987年6月

目 录

前言

第一版前言

第一章 运动学中的自由度和约束度	1
1.1 拉氏坐标及广义坐标	1
1.2 运动链的表示	6
1.3 运动链的活动度分析	9
1.4 运动链自由度的类型及其判定	19
第二章 运动链的结构类型综合	21
2.1 单自由度机构的结构类型综合	21
2.2 平面杆组的结构分析及其类型综合	24
2.3 含复铰的平面杆组的结构分析及其类型综合	36
2.4 巴氏桁架及其类型综合	44
第三章 机构的型转化理论	48
3.1 杆组的结构型转化	48
3.2 平面连杆机构的型转化基本单元种类	50
3.3 杆组型转化数的确定	52
3.4 机构的杆组分解	56
第四章 机构位置分析	59
4.1 概述	59
4.2 求解机构位置的线修正逼近理论——牛顿-罗夫森法	59
4.3 四杆机构位置解析之基本数学模型及子程序	63
4.4 高级杆组位置确定的基本公式	63
4.5 $m = 1$ 杆组所组成机构的位置确定	65
4.6 机构位置确定的电算流程	67
4.7 相对位移的求解	71
第五章 速度及加速度分析	74
5.1 基本概念	74
5.2 速度系数及加速度系数	80
5.3 四杆机构速度、加速度分析的基本数学模型及子程序	86
5.4 用虚拟速度、加速度法求解高级杆组的运动分析	87
第六章 静力学计算	94
6.1 概述	94
6.2 虚功原理的基本概念	94

6.3	虚功原理	101
6.4	四杆机构中运动副反力计算的基本数学模型及子程序	104
6.5	多杆多自由度机构力计算的型转化	105
6.6	应用虚功原理求解虚拟力	108
第七章 液压和气压式平面机构的分析		118
7.1	概述	118
7.2	液、气压式平面机构的结构类型	118
7.3	液、气压式平面机构的运动分析	121
7.4	液、气压式平面机构的受力分析	124
第八章 平面连杆机构综合的解析法		126
8.1	概述	126
8.2	刚体位移矩阵	128
8.3	刚体导引机构综合	130
8.4	函数生成机构综合	137
8.5	轨迹生成机构综合	145
8.6	复杂机构综合实例	151
第九章 平面机构的优化设计		156
9.1	优化设计的基本理论	156
9.2	平面四杆机构的尺度优化设计	159
9.3	多杆多自由度机构的尺度优化设计	164
9.4	多目标优化问题	170
第十章 空间连杆机构分析与综合		177
10.1	概述	177
10.2	空间连杆机构的自由度计算	179
10.3	空间刚体位移矩阵	183
10.4	刚体的速度和加速度分析	187
10.5	空间连杆机构的坐标变换	190
10.6	空间连杆机构的运动分析	197
10.7	空间 RSSR 函数机构的综合	209
第十一章 实例研究——ZL-20 装载机工作装置优化设计及计算机		
	显示	214
11.1	装载机工作装置简介	214
11.2	装载机工作装置的类型选择	215
11.3	装载机工作装置的运动分析	217
11.4	装载机工作装置的优化设计	220
11.5	装载机工作装置的计算机动态显示	225
附录 I	八杆以下杆组结构图	228
附录 II	含复合铰链的八杆以下结构图	230
附录 III	单构件和双杆组的结构单元及常用单元运动分析力计算的	

基本数学模型·····	250
附录Ⅳ 常用单构件及双杆组位移、速度、加速度和力计算子程序·····	279
参考文献·····	311
索引·····	313

第一章 运动学中的自由度和约束度

1.1 拉氏坐标及广义坐标

1.1.1 导论

对于由质点系及刚体所组成的约束系统的运动学研究，坐标系的建立常用的是直角坐标及极坐标。但如果仅限于用这两种坐标描述系统的运动状态有时会很不方便。因之选择合适的坐标系来分析是很关键的。约束系统最好用拉格朗日坐标系(Lagrangian coordinates, 以下简称拉氏坐标)来描述, 众所周知的广义坐标(generalized coordinates)亦属于这个范畴。

1.1.2 定义

用直角坐标系研究质点及分散的质点系的运动时, 一个质点 P_i 的基本坐标用 x_i, y_i, z_i 来表示。由于用三个坐标唯一地规定了质点 P_i 的位置, 因之一个质点有三个自由度。对于作平面运动的质点, 坐标 z_i 是一个常数, 因之只有两个自由度。但如果给出如下的关系式:

$$f(x_i, y_i, t) = 0 \quad (1.1)$$

在给定的时刻 t , 若已知 x_i 可用此式求 y_i 。这样一个受约束的质点具有一个自由度。

方程式(1.1)是降低系统的自由度的, 称之为约束方程式。在任何给定的时间 t , 方程式(1.1)代表平面上一条曲线。如果在方程式(1.1)中没有显示出时间 t , 曲线是固定不变的, 称之为一个稳定约束, 质点被限制在此曲线上移动。如果 t 出现在方程式(1.1)中, 曲线将随时间而改变, 这系统就称之为运动约束。如果在给定时间, 用 s 代表从曲线上某一点量起的弧线距离, 则式(1.1)可用参数形式表示为

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(s, t) \\ y_i &= y_i(s, t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

把直角坐标作为基本坐标, 方程式(1.2)是把质点的基本坐标用另外与时间有关的变量来表示, 这称之为坐标变换方程式。与基本坐标不同的坐标(例如 s)称之为拉氏坐标。

现想像两个自由质点 P_1, P_2 由基本坐标 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2) 所规定,

这样一个系统共有四个自由度. 但是如果引进下列形式的约束方程:

$$f(x_1, y_1, x_2, y_2, t) = 0 \quad (1.3)$$

将降低自由度为三, 这是因为当已知三个基本坐标时可以用上式计算另一基本坐标.

例如两个质点用一个长为 a 的刚体联接(见图 1.1), 方程式(1.3)将取下列形式:

$$f(x_i, y_i) \equiv (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - a^2 = 0 \quad (1.4)$$

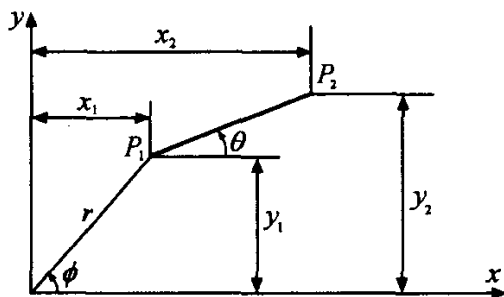


图 1.1 两质点刚体联接

在 x_i, y_i 四个基本坐标中的任何三个都可用来规定整个系统的位置. 当然还可应用其他的坐标系. 例如我们可以用 P_1 点的极坐标 (r, ϕ) 以及一个角度 θ 作为三个拉氏坐标, 即 $\{\psi_1, \psi_2, \psi_3\} = \{r, \phi, \theta\}$. 如此选择后变换方程式将成为

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \phi = \psi_1 \cos \psi_2 \\ y_1 &= r \sin \phi = \psi_1 \sin \psi_2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$x_2 = r \cos \phi + a \cos \theta = \psi_1 \cos \psi_2 + a \cos \psi_3$$

$$y_2 = r \sin \phi + a \sin \theta = \psi_1 \sin \psi_2 + a \sin \psi_3$$

一般地, 我们可以用 M 个拉氏坐标 $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M)$ 表示一组具有 N 个质点的质点系的基本坐标, 可以用下列变换方程式得到:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M, t) \\ y_i &= y_i(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M, t) \end{aligned} \quad (1.6)$$

式中 $i = 1, 2, \dots, N$.

所谓显约束方程式(explicit equation of constraint)是, 在约束方程式中包含了拉氏坐标, 或者也包括了时间的. 如下列方程式是显约束方程式的一般形式:

$$f(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M, t) = 0 \quad (1.7)$$

下列为显约束方程式之一例:

$$r - r_0 \sin pt = 0 \quad (1.8)$$

方程式(1.4)是用基本坐标来表达的约束方程式, 称之为隐约束方程式(implicit equation of constraint). 这些基本坐标可由坐标变换方程式与拉氏坐

标相联系. 如果适当地选择拉氏坐标, 就很少用到隐约束方程式.

如果在约束方程式中只包含了位移及时间的称之为完整约束 (holonomic constraint), 如果在约束方程式中出现不等式或速度关系的则称之为不完整约束 (nonholonomic constraint). 例如活塞在泵筒中之敲击, 轴销在磨损座中之拍击, 这些约束可以用不等式来表示, 例如 $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$. 这种不等式之出现往往由于单侧约束 (unilateral constraint 或 one-sided constraint), 这在机器中是常见的, 例如盘状凸较依靠弹簧力来保持接触. 火车轮的轴承是一个上凹面半圆柱体, 轮轴藉火车重力保持位置等. 德国学者罗勒 (Reuleaux) 氏在 1876 年提出运动副有封闭运动副 (closed pairs)、不封闭运动副 (unclosed pairs) 及力封闭运动副 (force closed pairs).

在以后我们特别注意完整约束.

在运动学上刚体可以用若干有限数目的受约束的质点来模拟.

例如图 1.2(a) 中构件可以用四个质点 P_1, P_2, P_3, P_4 来模拟它的运动. 只要各质点间的距离不变, 就包括五个隐约束方程式 [图 1.2(b)].

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 = a_{ij}^2 \quad (1.9)$$

$$(i, j) = (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1), (2, 4)$$

我们称图 1.2(b) 之质点系是图 1.2(a) 构件之离散质点的模拟.

四个质点有八个自由度, 再加上五个约束方程式, 因之系统的自由度为三, 即一个刚体. 一般地说, N 个质点的平面系统具有 C 个约束方程式, 其自由度为

$$F = 2N - C \quad (1.10)$$

上式是平面离散质点系自由度求解的基本关系式.

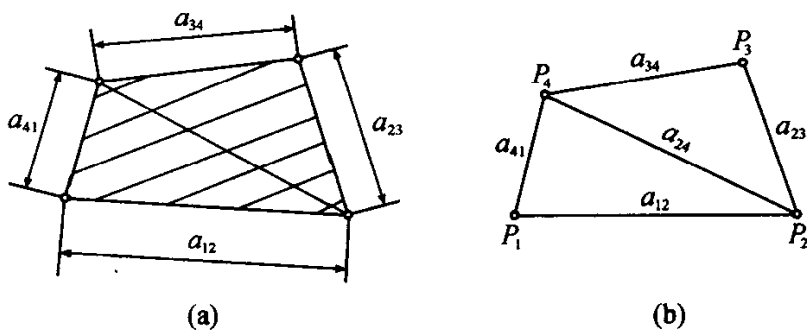


图 1.2 刚体薄片及质点系

1.1.3 例

下面就若干例子来说明. 图 1.3 表示一平面运动之薄板, Q 点在固定坐标系中的坐标 x_Q, y_Q 及参考线 QS 的倾角 ϕ 三个参数决定了这薄板的位置. P 点在薄板内, 用 (ξ_P, η_P) 参数决定其在动坐标系中的位置, P 点在定坐标系中的基本坐标将按下式求得, 这两个方程式是变换方程式:

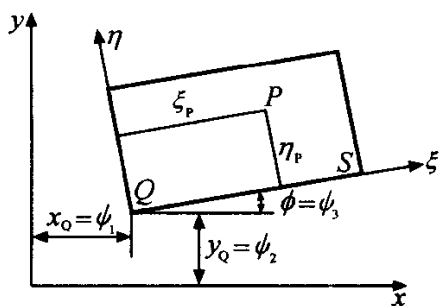


图 1.3

$$x_P = \psi_1 + \xi_P \cos \psi_3 - \eta_P \sin \psi_3 \quad (1.11)$$

$$y_P = \psi_2 + \xi_P \sin \psi_3 + \eta_P \cos \psi_3$$

图 1.4 表示一组刚体, 其中任意点如 E 及 F 的基本坐标可以用三个独立参数(ψ_1, ψ_2, ψ_3)来表达, 即 $BA = a_1, BC = a_2$

$$x_E = a_1 \sin \psi_1 + \xi_E \sin \psi_2 \quad (1.12)$$

$$y_E = a_1 \cos \psi_1 + \xi_E \cos \psi_2$$

$$x_F = a_1 \sin \psi_1 + a_2 \sin \psi_2 + \xi_F \sin \psi_3$$

$$y_F = a_1 \cos \psi_1 + a_2 \cos \psi_2 + \xi_F \cos \psi_3$$

一般地说, 在系统中受约束刚体中某点的转换方程式为

$$x_F = f_F(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M, t) \quad (1.13)$$

$$y_F = g_F(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M, t)$$

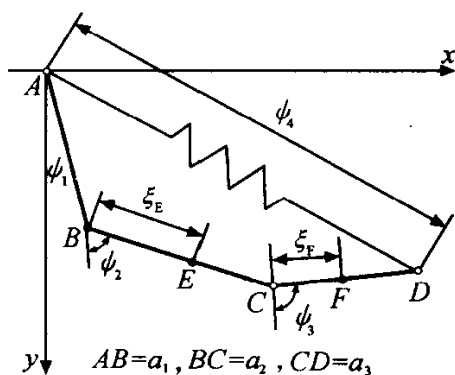


图 1.4 刚体中质点坐标系

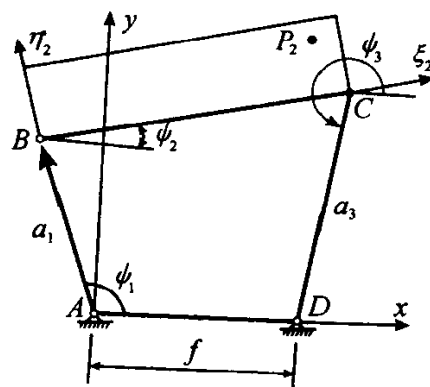


图 1.5 四杆机构的坐标系

在闭式链中, 所选择的拉氏坐标往往不是独立的, 从封闭运动链的性质中存在着显约束方程式的关系. 图 1.5 是由一个闭链所组成的四杆机构, 其中存在着下列关系式:

$$a_1 \cos \psi_1 + a_2 \cos \psi_2 + a_3 \cos \psi_3 - f = 0 \quad (1.14)$$

$$a_1 \sin \psi_1 + a_2 \sin \psi_2 + a_3 \sin \psi_3 = 0$$

一般地说, 在系统中有 N 个显约束方程式, 则可得下列方程组:

$$f_i(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M, t) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (1.15)$$

拉氏坐标的选择方法是多种多样的, 在完整约束系统中, 决定系统中任何一点位置所需要的最少坐标的数目定义为系统的自由度 F . 自由度 F 是系统的特性, 可以用离散质点的模式按式(1.10)计算而得. 系统中每一点的位置都可以用一组完整的拉氏坐标得到如式(1.13)的转换方程式来表达.

有时候为了方便起见, 引进了多于完整系统所需的拉氏坐标数. 例如在图 1.4 的三自由度系统中, 弹簧在 A 点与 D 点间的伸长可以用一个位置参数 ψ_4 来表达. 这个参数只是描述了弹簧的瞬时长度.

当我们应用的坐标数超过了一组完整系统所需的拉氏坐标数时则其中有多余坐标. 有一个多余坐标就存在着一个显约束方程. 例如在图 1.4 中的 ψ_4 就存在下述关系:

$$\left(\sum_{i=1}^3 a_i \cos \psi_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^3 a_i \sin \psi_i\right)^2 - (\psi_4)^2 = 0 \quad (1.16)$$

如果在系统中有 M 个拉氏坐标, 其中存在的最大约束方程数目为 C , 那么在理论上可以用 $(M - C)$ 个已知坐标来计算系统的坐标, 因之这个系统就具有自由度

$$F = M - C \quad (1.17)$$

若 $C = 0$, 则 $F = M$.

1.1.4 广义坐标

在自由度为 F 的系统中, 我们可以从 M 个拉氏坐标中选择 F 个作为一级坐标(primary coordinates), 用 q_1, q_2, \dots, q_F 表示, 其余 $N = M - F$ 个坐标称为二级坐标(secondary coordinates), 用 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ 表示.

在经典动力学中, 一级坐标常称之为广义坐标. 换言之, 广义坐标是独立的拉氏坐标, 这说明广义坐标的数目等于系统的自由度. ψ 或 q 对时间的微分 $\dot{\psi}$ 或 \dot{q} 称为拉氏速度或广义速度.

对于开式链(图 1.4), 三个角度(ψ_1, ψ_2, ψ_3)作为广义坐标(q_1, q_2, q_3)是很合适的. 从式(1.12)可以看出:

$$\begin{aligned} \dot{x}_E &= a_1 \dot{q}_1 \cos q_1 + \xi_E \dot{q}_2 \cos q_2 \\ \dot{y}_E &= -a_1 \dot{q}_1 \sin q_1 - \xi_E \dot{q}_2 \sin q_2 \\ \dot{x}_F &= a_1 \dot{q}_1 \cos q_1 + a_2 \dot{q}_2 \cos q_2 + \xi_F \dot{q}_3 \cos q_3 \\ \dot{y}_F &= -a_1 \dot{q}_1 \sin q_1 - a_2 \dot{q}_2 \sin q_2 - \xi_F \dot{q}_3 \sin q_3 \end{aligned} \quad (1.18)$$

一般地说, 对于开式链是很容易找出变换方程式:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_F, t) \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \dots, q_F, t) \end{aligned} \quad (1.19)$$

而且不必引入二级坐标.

对于闭式链则不然, 如图 1.5 所示, 在 ψ_1, ψ_2, ψ_3 中选择一个($F = 1$)作为广义坐标 q , 选曲柄转角 ψ_1 为 q 坐标比较方便. 在选定 q_i 坐标后要从约束方程式中(用显式)解出二级坐标往往会很困难, 即使找出也是十分复杂的. 因之, 在闭式链中往往不是单独地用广义坐标, 而把若干二级坐标保留下来倒是方便的.

对于刚体来说, 广义坐标的数目是有限的. 但对于有变形的物体, 如图 1.6 所示的梁, 则其广义坐标的数目是无限的, 可以用傅里叶级数的形式来

表达.

$$y(\xi) = q_1 \sin \frac{\pi \xi}{L} + q_2 \sin \frac{2\pi \xi}{L} + \dots \quad (1.20)$$

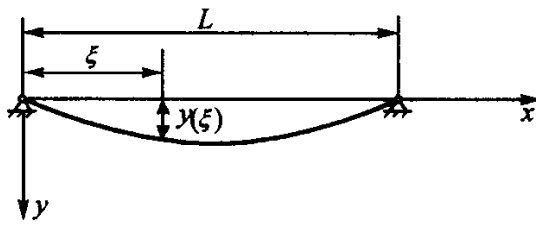


图 1.6 弹性梁

1.2 运动链的表示

运动链是由构件、运动副组成的约束系统。这约束系统如果使运动链的运动确定，即运动链中各构件之间有确定的相对运动，则运动链组成机构。运动链可以用结构简图表示，也可以用拓扑图及其矩阵表示。

1.2.1 结构简图

用符号表示构件和运动副组成运动链的一种简化示意图。

表 1.1 中示出平面运动链中构件及运动副的符号。

表 1.1

符号	构件	运动副		
		转动副	移动副	平面高副
简图				

图 1.7 为各种类型运动链的结构简图示例。

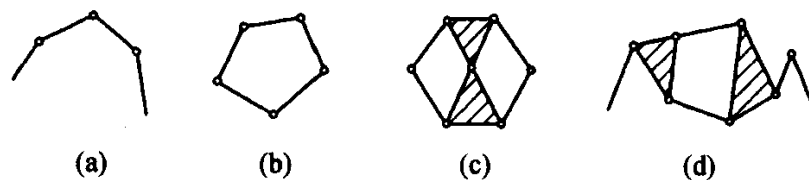


图 1.7 运动链

1.2.2 运动链的拓扑图

用结构简图表示运动链的结构是较为直观的,但难以建立数学运算关系.运动链用拓扑图及其矩阵表示便于运算.

顶(vertex)或结(node) 是一个点,代表运动链中的构件.顶点的度为相应构件上的运动副数目.

边(edge) 是一个线段,代表运动链中的运动副.

连通(connected) 一个边和顶的系统中,如果任意两个顶可以用一系列的边连接时称之为连通的.如图 1.8(a),(b)所示.

图(graph)或者网络(network) 边与顶的连通系统.图 1.8(a)和(b)表示两个不同的图.在此我们只考虑狭义的解释,即不包括以同一个顶作为边的出发和终结.

平面图(plane graph) 一个图中各边除了在顶相交外没有相交的边,称为平面图.图 1.8(a),(b)是两个平面图.图 1.8(c)不是平面图.

有向边(oriented or directed edge) 有箭头表示正向的边称之为有向边.

有向图(oriented graph) 在图中每一条边都有向.

子图(subgraph) 一个图是另一个图中的边和顶的子集合.

回路或环路(circuit or simple loop) 每一个顶与两条边关联的子图.在图 1.8(a)中边(1, 2, 3, 4, 5)形成一个回路(环路 I).

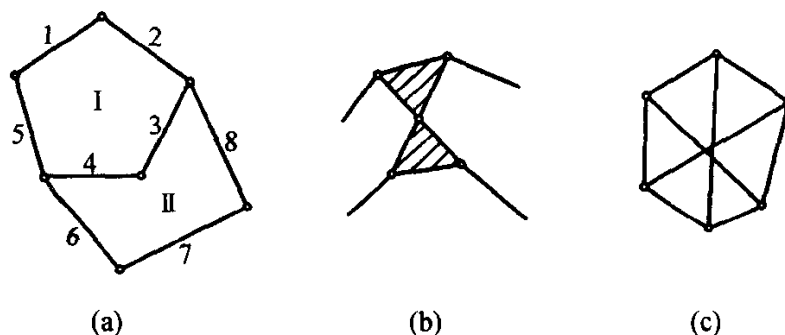


图 1.8 回路及树

缩图(contracting graph) 在图中删去只联结两边的顶所得的简化图称为缩图.

树(tree) 不包含闭路的连通图,如附图 1.8(b)所示,在树中所有的边称为枝(branches).

弦(chord) 边的集合,如果从图中移去之,将使图成为树.在图 1.8(a)中,边 1,3 是弦的集合,另外也可能选择别的弦,如边 2 及边 8.

同构(isomorphism) 具有相同关联性质的,在两个图之间在它们的点和边的关联方面保持着一对一的对应关系.这两个图就叫做同构图或称它们

为同构. 图 1.9 所示三个图是同构.

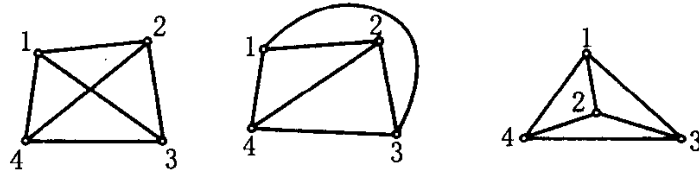


图 1.9 同构图

1.2.3 欧拉(Euler's)定理

欧拉氏指出, 在 L 个简单环路中有 V 个顶, E 条边组成一个多边形网络, 则

$$V - E + L = 1 \quad (1.21)$$

为了证明这个公式, 考虑所谓欧拉不变量:

$$I \equiv V - E + L \quad (1.22)$$

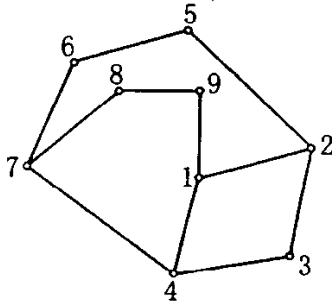


图 1.10 多边形网络

对于一个简单的多边形具有 n 个顶的单环路中, $I = n - n + 1 = 1$. 现在对于多边形网络, 可以开始从一个简单的多边形出发, 在它外面加边组成一个链, 例如在图 1.10 所示多边形(1, 2, 3, 4), 然后加一具有三个顶点(5, 6, 7)的链以及四条边(2, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 4), 于是得到第二个多边形.

这样一个变化, 使不变量有变化

$$\Delta I = \Delta V - \Delta E + \Delta L = 3 - 4 + 1 = 0$$

然后加上链(7, 8), (8, 9), (9, 1), 规定第三个多边形; 此时 $\Delta I = \Delta V - \Delta E + \Delta L = 2 - 3 + 1 = 0$.

如此继续进行, 可以看出 I 始终是按下式关系:

$$\Delta I = \Delta V - (\Delta V + 1) + 1 = 0$$

因之方程式(1.21)对多边形网络是成立的.

1.2.4 拓扑图的矩阵表达

关联(incidence) 如果一个顶是在一条边的端, 则这边与顶称为关联.

邻接(adjacent) 如果两个顶是在一条边的两端, 则这两个顶是相互邻接.

1. 关联矩阵

拓扑图 $G(V, E)$ (V, E 分别为图 G 中的顶与边的集合), 则其关联矩阵为

$$A = [a_{ij}]_{n \times m}$$

式中,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当第 } i \text{ 点与 } j \text{ 边相关联时} \\ 0, & \text{当第 } i \text{ 点与 } j \text{ 边不关联时} \end{cases}$$

n 顶点数, 即构件数目

m 边数, 即运动副数目

(1) 关联矩阵中行的非零元素的数目为该顶的度, 即该顶所关联的相应构件的运动副数目.

(2) 关联矩阵的每一列有两个非零元素.

(3) 矩阵的两行或两列置换相当于同一拓扑图中点与边的重新编号.

2. 邻接矩阵

拓扑图 $G(V, E)$ 的邻接矩阵为

$$D = [d_{ij}]_{n \times n}$$

式中,

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当顶 } i \text{ 与 } j \text{ 之间有一条边直接连接时} \\ 0, & \text{当点 } i \text{ 与 } j \text{ 之间没有边直接连接时} \end{cases}$$

邻接矩阵性质:

(1) $[d_{ij}]$ 的主对角元素 d_{ij} 皆为零, 且 $[d_{ij}]$ 为实对称矩阵.

(2) 矩阵 D 的行(或列)的非零元素数目为该行(或列)对应顶点的度, 即对应构件的运动副数目.

(3) 两行(及对应两列)的置换相当于顶的重新编号.

由以上所述可知, 关联矩阵及邻接矩阵均可描述拓扑图的全部特征. 其举例如表 1.2 所示.

表 1.2

运动链	关联矩阵	邻接矩阵
	$ \begin{matrix} & a & b & c & d & e & f & g & h \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} $	$ \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} $

1.3 运动链的活动度分析

在机构设计和分析中首先遇到的问题是如何排列给定的构件和运动副以

达到所要求的活动度(mobility)或自由度(degree of freedom). 大多数机构都是单自由度的, 至少在低速及忽略弹性变形的情况下是如此. 大量的参考文献不仅研究单自由度机构, 亦讨论多自由度机构, 近百年来有不少研究机构结构理论的公式, 其中切贝谢夫(Chebyshev)与克鲁伯(Gruebler)两氏的公式是典型的平面机构结构公式, 因之我们首先从讨论这个公式作为机构自由度分析的开始.

由于在具体应用这个公式时往往出现许多例外, 因此除了切贝谢夫-克鲁伯公式以外另有结构公式, 例如下面将讨论的独立闭链活动度准则, 应用了机械运动网络中的独立闭链来阐明机构自由度计算公式.

1.3.1 切贝谢夫-克鲁伯公式

在机构自由度公式中, 每引进一个低副就增加两个约束. 如果机构中的构件数目为 N (包括机架), 低副数目为 P_s , 则

$$F = 3(N - 1) - 2P_s = 3M - 2P_s \quad (1.23)$$

此处 $M = N - 1$ 是活动构件数.

对于单自由度机构, 令 $F = 1$, 于是得

$$3N - 2P_s - 4 = 0 \quad (1.24)$$

上述方程式称之为切贝谢夫-克鲁伯规律.

如果在机构中出现复式铰链, 则低副的总数为

$$P_s = P_1 + 2P_2 + \cdots + nP_n = \sum iP_i \quad (1.25)$$

上式中 P_i 是具有 i 个副的复式铰链数, n 代表机构中具有最多运动副数目的复式铰链数.

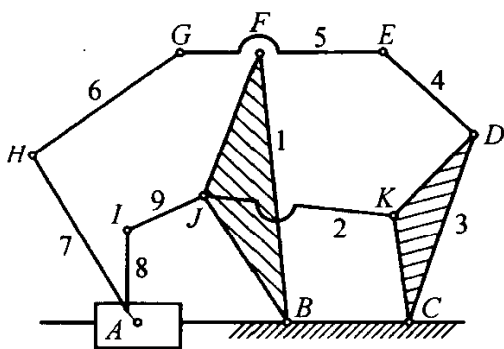


图 1.11 十杆机构

图 1.11 所示机构活动构件数为 9, 简式副数 $P_1 = 9$, 复式副数 $P_2 = 2$ (A, J 两个复式副), $P_s = P_1 + 2P_2 = 13$, 机构自由度

$$F = 3(N - 1) - 2P_s = 3 \times 9 - 2 \times 13 = 1$$

如果在公式(1.23)中引进高副, 则 $P_h = P_g + P_c$ (P_g 为齿轮副, P_c 为凸轮副数目), 于是得

$$F = 3(N - 1) - 2P_s - P_h \quad (1.26)$$

上式即为切贝谢夫-克鲁伯公式.

例 1.1 图 1.12 所示机构, 活动构件中包括系杆 CD , 即 $N - 1 = 4$, 运动副的情况为:

简式副	A, B, C	$P_1 = 3$
复式副	D	$P_2 = 1$

齿轮副 E $P_g = 1$
 简式副总数 $P_s = P_1 + 2P_2 = 5$
 高副总数 $P_h = P_g + P_c = 1$

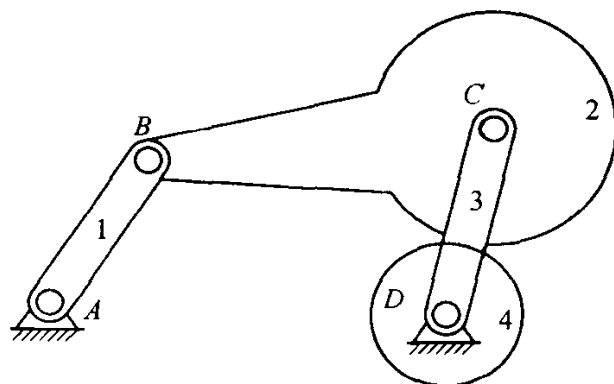


图 1.12 含高副的机构

自由度 $F = 3(N - 1) - 2P_s - P_h = 3 \times 4 - 2 \times 5 - 1 = 1$

例 1.2 图 1.13(a)表示杆 1 与地面在 A 点作相对滑动，与圆盘 2 在 B 处作纯滚动，圆盘又与地面 D 处作纯滚动。

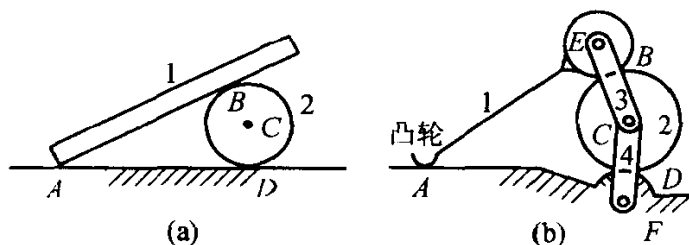


图 1.13 纯滚动约束

在求机构的自由度时，如两个构件作纯滚动，则在接触点切线方向的相对移动受到限制，亦即存在一个约束，于是 $(N - 1) = 2$ ， $P_s = 0$ ， $P_h = 3$ ，另外在 B，D 处加一纯滚动约束。

$$F = 3 \times 2 - 3 - 2 = 1$$

图 1.13(b)中把 AB 及 AD 改为具有有限节圆半径的齿轮，为了保持齿轮之间的中心距不变，假想系杆 BC 及 CF 长度不变。在 A 点处的尖端改为凸轮表面。经过如此改变的相当系统中有四个活动构件 $(N - 1) = 4$ ，在图 1.13(b)中各运动副的分配情况为

简式副 E, F,	$P_1 = 2$	} $P_s = P_1 + 2P_2 = 4$
复式副 C	$P_2 = 1$	
凸轮 A	$P_c = 1$	} $P_h = P_c + P_g = 3$
齿轮 B, D	$P_g = 2$	

所以

$$\begin{aligned}
 F &= 3(N - 1) - 2P_s - P_h \\
 &= 3 \times 4 - 2 \times 4 - 3 = 1
 \end{aligned}$$