

数学旅行家： 漫游数王国

[美]卡尔文·C·克劳森 著 袁向东 袁钧 译 ● 上海教育出版社

[illegible]

图书在版编目 (C I P) 数据

数学旅行家: 漫游数王国 / (美) 克劳森著; 袁向东, 袁钧译. —上海: 上海教育出版社, 2001. 12

(通俗数学名著译丛 / 史树中, 李文林主编)

ISBN 7-5320-7883-3

I. 数... II. ①克... ②袁... ③袁... III. 数—通俗读物 IV. 01-49

中国版本图书馆CIP数据核字 (2001) 第088426号

Calvin C. Clawson

The Mathematical Traveler

Exploring the Grand History of Numbers

Plenum Press

©

根据普利能出版社 1994 年第 1 版译出

本书中文版权由上海市版权代理公司帮助取得

通俗数学名著译丛

数学旅行家: 漫游数王国

[美] 卡尔文·C·克劳森 著

袁向东 袁 钧 译

上海世纪出版集团 出版发行
上海教育出版社

(上海永福路 123 号 邮政编码: 200031)

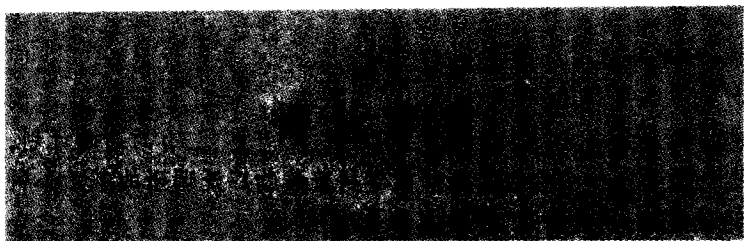
各地 新华书店经销 上海新华印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 10.25 插页 4 字数 241,000

2001 年 12 月第 1 版 2001 年 12 月第 1 次印刷

印数 1—5,150 本

ISBN 7-5320-7883-3/G · 7972 定价: (软精) 18.20 元



数学,这门古老而又常新的科学,已阔步迈进了 21 世纪.

回顾过去的一个世纪,数学科学的巨大发展,比以往任何时代都更牢固地确立了它作为整个科学技术的基础的地位.数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透,并越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献.同时,数学作为一种文化,已成为人类文明进步的标志.因此,对于当今社会每一个有文化的人士而言,不论他从事何种职业,都需要学习数学,了解数学和运用数学.现代社会对数学的这种需要,在未来的世纪中无疑将更加与日俱增.

另一方面,20 世纪数学思想的深刻变革,已将这门科学的核心部分引向高度抽象化的道路.面对各种深奥的数学理论和复杂的数学方法,门外汉往往只好望而却步.这样,提高数学的可接受度,就成为一种当务之急.

一般说来,一个国家数学普及的程度与该国数学发展的水平相应并且是数学水平提高的基础.随着中国现代数学研究与教育的长足进步,数学普及工作在我国也受到重视.早在 60 年代,华罗庚、吴文俊等一批数学家亲自动手撰写的数学通俗读物,激发了一代青少年学习数学的兴趣,影响绵延至今.改革开放以来,我国数学界对传播现代数学又作出了新的努力.但总体来说,我国的数学普及工作与发达国家相比尚有差距.我国数学要率先赶超世界先进水平,数学普及与传播方面的赶超乃是一

个重要的环节和迫切的任务.为此,借鉴外国的先进经验是必不可少的.

《通俗数学名著译丛》的编辑出版,正是要通过翻译、引进国外优秀数学科普读物,推动国内的数学普及与传播工作,为我国数学赶超世界先进水平的宏伟工程贡献力量.丛书的选题计划,是出版社与编委会在对国外数学科普读物广泛调研的基础上讨论确定的.所选著述,基本上都是在国外已广为流传、受到公众好评的佳作.它们在内容上包括了不同的种类,有的深入浅出介绍当代数学的重大成就与应用;有的循循善诱启迪数学思维与发现技巧;有的富于哲理阐释数学与自然或其他科学的联系;等等,试图为人们提供全新的观察视角,以窥探现代数学的发展概貌,领略数学文化的丰富多采.

丛书的读者对象,力求定位于尽可能广泛的范围.为此丛中适当纳入了不同层次的作品,以使包括大、中学生;大、中学教师;研究生;一般科技工作者等在内的广大读者都能开卷受益.即使是对于专业数学工作者,本丛书的部分作品也是值得一读的.现代数学是一株分支众多的大树,一个数学家对于他所研究的专业以外的领域,也往往深有隔行如隔山之感,也需要涉猎其他分支的进展,了解数学不同分支的联系.

需要指出的是,由于种种原因,近年来国内科技译著尤其是科普译著的出版并不景气.在这样的情况下,上海教育出版社按照国际版权公约,不惜耗资购买版权,组织翻译出版这套《通俗数学名著译丛》,这无疑是值得称道和支持的举措.参加本丛书翻译的专家学者们,自愿抽出宝贵的时间来进行这类通常不被算作成果但却能帮助公众了解和欣赏数学成果的有益工作,同样也是值得肯定与提倡的.

像这样集中地翻译、引进数学科普读物,在国内还不多见.值得高兴的是,这项工作从一开始就得到了数学界许多人士的赞同与支持,特别是数学大师陈省身先生两次为丛书题词,使我

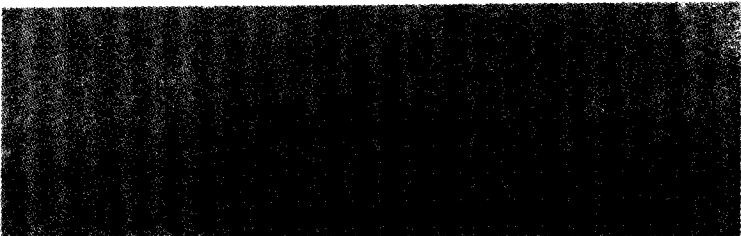


们深受鼓舞.到目前为止,这套丛书已出版了 13 种,印数大多逾万,有的已经是第四次印刷,这对编译者来说确是令人欣慰的信息.我们热切希望广大读者继续关心、扶植这项工作,使《通俗数学名著译丛》出版获得更大的成功.

让我们举手迎接数学科学的新的黄金时代,让公众了解、喜爱数学,让数学走进千家万户!

《通俗数学名著译丛》编委会

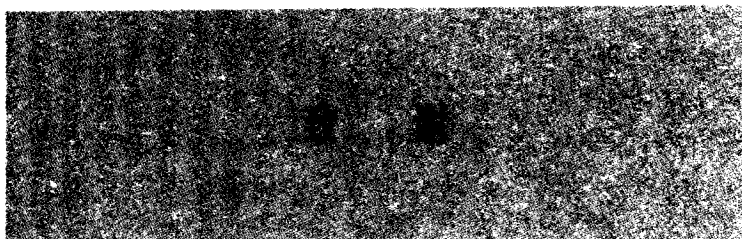
2001 年 8 月



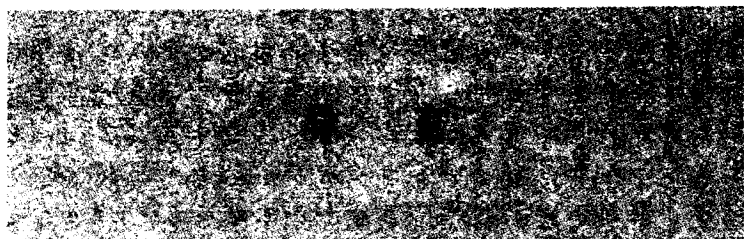
“数”(shù),似乎是人们司空见惯的东西,“数”(shǔ)几乎是人人都掌握的一门最简单不过的技能.可是你想过没有:在物质世界中存不存在抽象的数?我们祖先是怎样创造(发现?)自然数的?为什么在一段很长的时期里许多学者拒绝负数?为什么自古以来,总有一些数学家就是不接受无理数?……数学旅行家循着历史的足迹“拜访”了众多的凡人与智者,试图探索在数的发展道路上隐藏的秘密,从而对上述问题作出解释.对数感兴趣的人不妨跟着本书去做一次旅行,去领略数王国的奇闻与美景.

本书导言部分、第1章至第7章由袁钧翻译,其余部分由袁向东翻译.最终由冯绪宁教授审阅.

译者
2000年11月



本书的出版得到了很多人的帮助.我要特别感谢我的那些在一起工作的朋友,他们耐心地阅读了手稿并提出了不少宝贵的建议,他们是玛丽·爱德华兹(Marie Edwards),布鲁斯·泰勒(Bruce Taylor),琳达·谢泼德(Linda Shephard),菲利斯·兰伯特(Phyllis Lambert)和布赖恩·赫伯特(Brian Herbert).我还要感谢犹他大学哲学系和数学系的教授,他们在教学中的认真与献身精神,使我热爱上了数学.



这是一本关于数的书.但本书并不仅仅讲述正经八百的数学.数学确实要研究数,同时,数的应用跟人类的经验与感受交织在一起,以致谈论数的方方面面将深入触及大量人类本性中非常神秘的东西.本书确实包含数学的内容,但也涉及人类学、生物学、心理学、解剖学、历史学和哲学.

人类一直被称为“使用工具的猿”,“使用火的猿”和“会说话的猿”.然而应该更恰当地称我们为“会计数的猿”.数和计数渗透进我们的文化,无处不在.如果你愿意,不妨设想一下,没有任何数或计数的社会是什么样的.我们跟数已经充分协调一致,可以用它来计量我们生活中的每一种现象.我们在住的街道旁标上门牌号码,我们彼此打电话要用到数——电话号码.我们的货币,还有我们的日历和钟表都是以数为基础的.今天早晨我醒来后翻身看了看数字式钟,它告诉我是 6:45.我想起今天是 17 号,这提醒我必须付 110 美元的汽车款.当我吃早饭时,我从收音机的 97.3 兆赫的频道中听到股票市场上升了 14 点.我的一天(其他人也一样)就这样开始了.为了在现代社会中生活,我们得依靠数.

经济、我们的技术和科学全都依赖于我们对于数的使用,这种依赖性反映在我们早早地就向孩子们介绍数;在我们教他们做的第一批事情中,有一件就是怎样数到 10.当有人提起数学【1】——数的研究时,甚至是最初期的入门,成千上万的美国人会感

到战栗。“这太枯燥了，”他们抱怨说，“太困难了——全是些符号。”但他们当中有些人去拉斯维加斯通宵达旦地玩一种数字相加的游戏——二十一点牌戏。或者，他们玩掷数游戏——一种掷双骰子赌博。也许他们会呆在家里玩“独占游戏”，这种游戏要求他们把两枚骰子上的点数加在一起，然后计算该走多少步。如果他们正好走到别人的领地中，他们必须算出租金数。如果该地是无主的，他们要拿出足够的钱数买下它。整个游戏就是用数字加加减减，用数字作计算。人们都喜爱数。有时他们宣称正规的数学索然无味，但事实上，无论是玩游戏、预支政府支票或玩股票，人们很喜爱数。

如果我们确实对于数有一种神秘的嗜好，那么看来大家会喜欢这本书。我们从研讨自然数开始我们的冒险——那是些我们首先要学会去数的数，也就是一、二、三、四，等等。所谓的“等等”，意思是我们可以永远地数下去而绝不会到达最后一个数。

自然数是人类发现的第一种数。他们用这种数所做的第一件事是数(shǔ)。在第1章里，我们将给计数下个定义，然后研究人脑中实施计数的那一部分。接着，我们将考虑计数与数有了多长的历史，它们最初是如何使用的(第2章)。在第3章，我们将考虑是否还有其他物种也会计数。在第4章中，我们会看到最早的农夫所使用的数，以及美索不达米亚人和埃及人使用的最早用文字记录的数。然后，我们将回顾中国人和美洲土著人早期对于数的贡献(第5章)。接下去我们将弄清楚古希腊人首先遇到但在其后两千多年没有解开的一个大秘密——这秘密最终导致了奇妙的无理数。在第7章，我们将介绍负数及我们现在使用的印度-阿拉伯数字。之后我们准备看一看无穷大的概念以及这一概念如何影响了我们对于数的信念(第8章)。至此，我们也将

[2] 随着数的演进充分解开无理数这个秘密(第9章)。然后我们将充分发挥想像力并去发现一些奇妙的超越数，例如 π ——这些数都相当奇特，对于每一个这样的数，我们都不能把它完全写下



来(第 10 章).接下去我们将研究一种全新的数,即复数,它们在科学和工程中被广泛使用(第 11 章).跟着出现的是我们介绍的最后一种数——超限数(第 12 章).在第 13 章中,我们停下来考虑一些了不起的能嘎扎嘎扎地咀嚼数字的怪物.据此,我们还将准备从哲学角度考虑一下数(第 14 章).在最后一章,我们将回顾 20 世纪的贡献,考虑数学在 21 世纪将走向何方,从而结束我们的旅行(第 15 章).

自然数与我们的文化联系得如此紧密,以致在研究它们时,我们实际上看到了人类历史的缩影.这是一段充满了惊异、奇妙和欢乐的历史.

尽管我们中的大多数人一直对于数的重要性满不在乎,但随着时光的流逝,一些人已经认识到数所起的作用.在公元前四百多年之前,一位名叫塔兰托的菲洛劳斯(Philolaus of Tarentum)的希腊人说过:

实际上,凡能被了解的东西都有一个数与之对应,因为没有这些[数]就不可能用心智领悟和认识任何事物.¹⁾

伟大的希腊哲学家柏拉图(Plato)教导说,数不仅在我们的世界中占据中心地位,而且还能引导我们走向真理本身.在写他的老师苏格拉底(Socrates)和一位朋友格罗孔(Glaucon)的对话时,柏拉图表述了雅典人对数的看法:

苏格拉底:一切算术和计算都必须跟数有关吗?

格罗孔:是的.

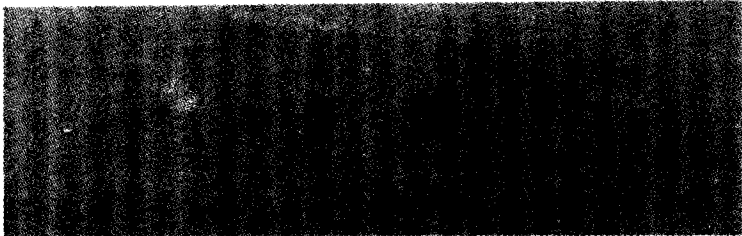
苏格拉底:它们看来能把心智引向真理?

格罗孔:是的,以一种非凡的方式.²⁾

那么本书的论点是什么？阅读这本关于数的书，我们又想对我们自身增加什么理解呢？本书展示了：数，因而数学，是我们本性的构成要素；没有数，我们就不能发挥人的功能。

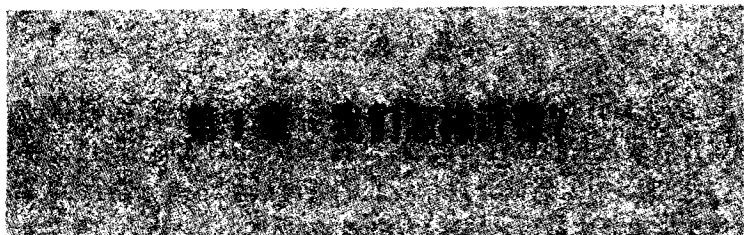
相反的论点很简单，但不幸的是很多美国人都持有这种观点：我们大多数人都在计数，在绝对必要时做着加法或减法，但广而言之数学却是大学象牙塔里的那些长胡子老者从事的神秘勾当。它对我们的生活，对于我们的家庭或我们的职业并不那么重要。因此它对我们的打扰多于帮助。

本书将正视这些对立面。它将表明数学深深地埋在我们的机体内，以至不被察觉。这对帮助我们定义自身是有积极意义的。要是有一天我们能到其他遥远的太阳系旅行，去访问其他高智能的生物，他们可能会问“你们是谁？”我们将骄傲地说：“我们【4】是计数器，我们了解数。”



导言

第 1 章	我们怎样计数?	1
第 2 章	早期的计数	13
第 3 章	其他物种的计数——它们有多聪明?	31
第 4 章	古代的数	44
第 5 章	中国与美洲的数	72
第 6 章	数学天堂中的问题	91
第 7 章	负数	116
第 8 章	跟无穷打交道	129
第 9 章	戴德金分割:无理数	155
第 10 章	π 的故事:超越数	176
第 11 章	数王国的扩张:复数	202
第 12 章	难以想像的大:超限数	217
第 13 章	天才的计算家	227
第 14 章	数到底意味着什么?	241
第 15 章	数的过去、现在和未来	258
各章注解		276
名词解释		285
参考书目		295
索引		300



计数与数在人的自然本性内隐藏得有多深？计数是我们的脑在充分进化后所获得的小小技能吗？它是完全依赖于文化学习的吗？或者，计数是深埋于脑中的“有线硬件”的功能？计数真的对人类那么要紧，以至成为我们遗传基质中的一个部分？换句话说，我们到底是怎样计数的？

词 汇

在开始我们美妙的冒险旅行之前，让我们先花几分钟时间来谈谈词汇。每当我们想更精确地交流思想时，总会促使我们去定义新的术语或以更确切的方式重新定义老的术语。这能增进人们之间的理解，无论他们从事的是特殊的技艺、技术还是科学工作。然而，专业化的词汇也可能把有兴趣学习新技术或科学的人拒之门外。一些自己开业的人，如医生、精神病医生和律师，已经遭到谴责，他们各自制造一种全新的语言，目的只是不让爱管闲事的局外人接近他们的行业。我们不会对此说三道四。

数学确实包含着大量专门的定义以增加交流的精确性。我们的做法是在需要的时候提供那些新的术语，但我们将总是去学习那些简单的而不是复杂的或绕着弯的陈述方式。通常，新概念【5】并不难学，只是奇特的新词汇让人感到陌生。我们的目的是增加大家对数的理解，而不仅仅是学一些新词。当引进一个数学术语时，我们将给出一个简短易懂的定义。我们不会引入不是必须

的新词。

自然数

为了对什么是数有个正确全面的理解,我们首先研究自然数.自然数是我们最熟悉的数;是我们数(shǔ)数时用的数:一、二、三、四、……。省略号意味着我们能继续数下去,想数多大都行;用数本身来数(shǔ)是没有极限的.当然,由于我们只能在时间允许的范围去数,所以在现实中数出的数是有限的.有时自然数被叫做“整数”或“正整数”;尽管这三个说法等价,我们通常还是喜欢叫它们是“自然数”。

对于数,有三种基本用法.当我们想知道一组对象有多少个时,我们说的是基数(Cardinal number).一组对象的汇集被数学家们称为一个集合.因此,如果我们有一篮苹果共十一个,这组苹果的基数即 11,这一组十一个苹果就是一个集合.集合中的单个对象叫做元素(element).因此,每个苹果就是这个苹果集合中的一个元素。

基数:表明一个集合中有多少单个对象的数。

集合:一组对象的汇集。

元素:集合中特定的单个对象。

你很容易看出基数这个概念对人类是多么有用.它回答这种问题:停车场内有多少辆汽车?在我的钱包里有多少美元?我的表弟威尔福德和他的太太马维斯有几个孩子?所有这些问题的答案都是基数。

下面我们来给数的第二种用法下定义.它是显示事物的相对次序的.当你去咖啡馆买你特别喜欢的波希米亚咖啡时,你发现排着长队.要等多久才能轮到你呢?你拿到一个号写着 47,你还注意到叫号牌上显示:“现在轮到 35 号.”这里,数 47 并不告诉你一个集合里有多少个对象,但让你知道你相对于其他人所处的位置.在你前面还有十二位顾客.于是,47 展现了在一个

数的序列中你的序号.这一类数就是序数(ordinal number).

我们通常用到很多序数.你的街址就是序数.这不是指房屋、人或任何集合中元素的个数,而只是指明你的房子在城里你所在的街区中相对于其他房子的位置.只要你在讲表明事物的相对位置的数,你就在谈序数.

序数:指明一集合中某一元素的相对位置的数.

数的第三个用法在于进行简单的识别.它们是所谓的标码数(tag number).它们既不是用来数(shǔ)集合中元素的个数,也不显示其相关次序.你的电话号码就是一个标码数.它既不需要确认由电话号码组成的集合中有多少个电话号码,也不用显示你的电话号与其他电话号的相对位置.社会安全号是标码数.绝大多数公共汽车线路数与飞机航班号也是标码数.然而我们并不真的对标码数感兴趣,因为这类数仅仅起到名字的作用.在任何情况下,一个名字总是可以用数来代替的.因此,下面的内容我们只涉及序数与基数,而不去管标码数.自然数可用作基数和序数.之所以能用作基数是因为它们能标示集合中元素的个数.它们能用做序数是因为每一个自然数在数的序列中都有唯一指定的位置.5总是位于4之后与6之前.因此,自然数是有序的.

计数的几个特征

从童年时代起,我们就被教会使用自然数了.父母教我们数到十,通常是这么做的:一个接一个地掰着手指,一、二、三、……每当说出一个数之后,父母就去掰下一个手指.我们觉得这是很【7】开心的游戏并很快学会了模仿他们.不久我们就能按正确的顺序说出表示数的词:一、二、三、四、……。然而,仅仅按正确顺序说出这些词还不是计数.计数需要知道得更多:它要我们回答“多少个”这样的问题.我们的父母在这方面也帮助我们.你妈妈把三块积木堆放在你面前.“宝贝,是多少?多少块积木?”她尽力使你数出它们.最初你可能只会把它们弄得东一块西一块的.



但你最终学会了.在你数的时候,你能指着东西说出其正确的数的名字.你弄清楚了你说出的最后的名字正是你妈妈想要你说出的“数”.你理解“多少”这个概念了吗?如果你还很小,大概不理解.然而你上学之前的某一天,你好像理解了“众物”(manyness)的集合.尤其是当你姐姐说她没有拿走玩具兵时,你却知道少了一个,因为你已经数过它们了.

说到这里,我们应该停下来对计数这个词提供一个附加的词.你可能学会了做具体的计数.你会掰着一个个手指说出正确的数词.现在我们引入一个数学家所心爱的术语——映射(mapping).当你数的时候,你让一个手指确切地代表一个词.你不会让两根手指代表同一个词,或是掰着同一个手指说出两个词.这就是一对一的方法.每根手指得到它自己的一个数词,而且仅有一个.数学上管这叫一一映射.这是我们计数过程的要害所在.

一一映射(one-to-one mapping):对一个集合(如,手指)的每一个元素,确切地指定第二个集合(如,数词)的一个且仅有一个元素与之对应.

在你童年的某一个时期,大约是两岁到五岁之间吧,你在思维方面有了巨大的长进,因为你学习了数学中你将碰到的两个最难的概念.你学会用汇集或集合来想像事物,并理解了每个集合里包含的众物,它由基数来确定.你知道不同的集合可能有同【8】样的基数,也可能有不同的基数.你学习了计数的方法从而能发现集合的正确的基数.这本身也构成了一个由技能组成的汇集,你觉得奇怪吗?

现在我们可以来问那个基本的问题了:我们怎样计数?用的是什么样的思维过程?大脑的哪一部分被催活了?脑中是否有一个特殊的区域来产生这种活力?这是纯粹通过学习得到的技能还是我们继承来的遗传技能?我们在计数时使用了词汇,那么语言对计数来说是必须的吗?

████████████████████

一个完整的计数过程依靠三项活动.首先我们想要去回答“有多少”这个问题.我们已经确定了一个集合并希望知道其中有多少事物.下两项活动是同时发生的.我们依次用手指触着或指着集合中的每一个元素并说出适当的表示数的词.指点与说出正确的数词当然就是我们所做的映射这一行为.这一行为完成时我们即说出了最后的数词——我们寻找的那个基数,于是我们的计数过程就完成了.因此,我们需要做的是(1)想知道有多少,(2)依次触摸或指点,(3)依次说出数词.看来,大脑中用来计数的那些部分包括:负责进行抽象的区域以及实现持续的运动功能和语言功能的区域.

有时我们并不真的用手指来指点,而只用眼睛从一个物体移向另一个物体.不过,移动眼睛也是持续的运动.在这种情况下我们只是中断了指点与触摸而继以眼睛的移动.有时我们并不说出数词而只是想着它们.

我们是否已经确定了对于计数而言所必须的最少的活动?如果真是这样,我们便可以假定计数是依赖于语言的,因为在我们能对任何东西计数之前必须学会数词.因此,计数可能是在有了语言之后(或者说不在其前)获得的一种技能.

是否存在一种不依赖语言的计数方式呢?如果存在,那么这种计数的方式可能比现代快速的说话能力还要古老,因此它可能并不依赖于大脑中与语言有关的区域.

卡尔·梅宁格(Karl Menninger)的《数词与数的符号:数的文化史》一书,在理解早期的计数与数等方面作出了经典贡献.^①在他的书中,梅宁格指出非语言的计数不仅可能,而且对于早期[9]人类来说几乎肯定是有的.直到20世纪,一些原始部落只使用两个数词:一和二^①,对其他的都一概叫做“多”.然而,这些部落

① 我这里用“原始”一词,表示这些部落文化的状态,而不是指其成员的身体特性,所有生活在今天的人都是现代人类.